Simetrisasi Aljabar Max-Plus

Lutfina Sahroni[1]**, Fitria**[2]**, Yeni Susanti**[3]

[1, 2] Mahasiswa S1 Matematika FMIPA UGM

[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM

Abstrak :

Aljabar max-plus merupakan aljabar yang dilengkapi operasi max $\oplus$ dan plus $\otimes$ dan berstruktur semifield idempoten.

Pada makalah ini dibahas simetrisasi aljabar max-plus beserta sifat-sifatnya.

Kata kunci : aljabar max-plus

Di dalam teori sistem persamaan linear atas aljabar max-plus tidak semua persamaan mempunyai penyelesaian. Oleh karena itu perlu pengkonstruksian struktur baru yang lebih luas daripada aljabar max-plus diantaranya dengan simetrisasi.

Yang dimaksud dengan aljabar max-plus $\Re_{max}$ adalah semifield idempoten $\Re_{\varepsilon}$ dengan operasi max $\oplus$ dan operasi plus $\otimes$ yang didefinisikan dengan :

babababa+=⊗=⊕},{Maks

dengan ε sebagai elemen netral.

Selanjutnya akan ditinjau struktur $\Re^2_{max}$. Untuk sebarang pasangan berurutan ()''',*xxx*=dan ()''',*yyy*= ∈2maxℜdidefinisikan operasi biner sebagai berikut : dan ⊕⊗

))'''()'''(),''''()''((),'(),'()''''',''(),'(),'(*yxyxyxyxyyxxyxyxyyxx*⊗⊕⊗⊗⊕⊗=⊗⊕⊕=⊕

Terhadap dua operasi $\oplus$ dan $\otimes$ tersebut, membentuk struktur dioid, yaitu memenuhi aksioma : 2maxℜ

1. terhadap operasi $\oplus$
   a. bersifat asosiatif

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

b. bersifat komutatif

c. ada elemen netral ε

d. setiap elemennya idempoten, yaitu untuk setiap $a\in$berlaku

${}_{2\max}\Re$

$a \oplus a = a$

2. terhadap operasi $\otimes$

a. bersifat asosiatif

b. ada elemen identitas e sehingga untuk setiap $a\in$berlaku

${}_{2\max}\Re$

$aaeea=\otimes=\otimes$

c. bersifat menyerap yaitu untuk sebarang elemen $a\in$, ${}_{2\max}\Re$

$\varepsilon\varepsilon\varepsilon=\otimes=\otimes aa$

3. bersifat distributif tehadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$, yaitu untuk setiap a, b, $c\in$, berlaku ${}_{2\max}\Re$

$)()()(cbcacba\otimes\oplus\otimes=\otimes\oplus$

Dapat ditunjukkan bahwa elemen $(\varepsilon,\varepsilon)$ merupakan elemen netral dan elemen (e,ε) merupakan elemen identitas di dalam . ${}_{2\max}\Re$

Selanjutnya, pada juga didefinisikan tanda minus $\ominus$, harga mutlak | |, dan operator keseimbangan ${}_{2\max}\Re^{\bullet}$ sebagai berikut :

Untuk setiap di dalam , didefinisikan $\ominus x$ = ,)",'(xxx=${}_{2\max}\Re$)',"($xx'xxx=\oplus$dan $x^{\bullet}$ =$()_{,xx}$.

Ketiga operasi tersebut mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

Sifat 1

1. $x^{\bullet} = (\ominus x)^{\bullet}$
2. $x^{\bullet\bullet} = x^{\bullet}$ (idempoten)

3. $x \otimes y^{\bullet} = (x \otimes y)^{\bullet}$ (menyerap)
4. $\ominus(\ominus x) = x$
5. $\ominus(x \oplus y) = (\ominus x) \oplus (\ominus y)$
6. $\ominus(x \otimes y) = \ominus x \otimes y$

Bukti :

1. $x^{\bullet}$ =(),xx= =)"',"'(xxxx⊕⊕)"',"'(xxxx⊕⊕=(Θx) •

2. $x^{\bullet\bullet}$= •••|)||,(|xx==•⊕⊕⊕⊕⊕⊕))"'()"'(),"'()"'((xxxxxxxx)"',"'(xxxx⊕⊕

   = $x^{\bullet}$

3. $x \otimes y^{\bullet}$ = ⊗)",'(xx•)",'(yy

   =)))"'("())"'('()),"'("())"'('((yyxyyyxyyxyyx⊕⊗⊕⊕⊗⊕⊗⊕⊕⊗=

)))""()"'())"'()"()),""()"'())"'()"((yxyxyxyxyxyxyxyx⊗⊕⊗⊕⊗⊕⊗⊗⊕⊗⊕⊕⊕⊗=

•⊗⊕⊗⊗⊕⊗))"'()"'(),""()"((yxyxyxyx = •⊗)(yx

4. Jelas dari definisi.

5. $\ominus(x \oplus y)$ = Θ)"",''(yxyx⊕⊕ =)",""(yxyx⊕⊕= $(\ominus x) \oplus (\ominus y)$

6. $\ominus(x \otimes y)$ = Θ))"'()"'(),""()"((yxyxyxyx⊗⊕⊗⊗⊕⊗

   =)",'()',"())""()"(),"'()"'((yyxxyxyxyxyx⊗=⊗⊕⊗⊗⊕⊗

   = $\ominus x \otimes y$

Selanjutnya, berikut ini didefinisikan relasi R yang merupakan relasi ekuivalensi.

Definisi 2

Pada didefinisikan relasi R sebagai berikut : 2maxℜ

()()()()""""""""""jikadan,,,,untuklainnya.yyyxxxxRyyxxyyxx ⎧⊕=⊕≠≠⎪⇔⎨=⎪⎩

Dari definisi 2 tersebut, dapat dipahami bahwa untuk sebarang dengan dan)",'(),",'(yyxx)",'(R)",'(yyxx·xx≠ serta ·yy≠, terdapat dua kemungkinan yaitu :

1. Jika""'xyx=⊕ maka""'yyx=⊕, sebab'''xx≠.

Akibatnya jikamaka ""'xxx=⊕"yx=

2. Jika""'yyx=⊕maka""'xyx=⊕, sebab'''yy≠.

Akibatnya, jika ""'xxx=⊕maka""'yx=

Dengan menggunakan fakta di atas, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa R merupakan relasi ekuivalensi serta dengan mudah pula dapat ditentukan kelas-kelas ekuivalensinya.

Dari fakta tersebut di atas, dapat ditunjukkan bahwa ada 3 kelas ekuivalensi yaitu :

1. ()(){}"'",,ttxx−∞=< yang selanjutnya disebut elemen positif ;

2. ()(){}",,ttxx−∞=< yang selanjutnya disebut elemen negatif ;

3. ()(){},,tttt= yang selanjutnya disebut elemen keseimbangan .

Definisi 3

Aljabar R2max$\Re$ *disebut aljabar simetris dan dilambangkan dengan S.*

Dengan menghubungkan (,t−∞ dengan $t\in\Re_{\max}$ dapat diidentifikasi struktur baru dari $\Re_{\max}$. Perhatikan pendefinisian berikut :

Himpunan kelas positif atau nol dinotasikan dengan , himpunan kelas negatif atau nol (dari bentuk $\ominus x$ untuk S⊕xS⊕∈yaitu ()''',xx) dinotasikan dengan $S^{\ominus}$, himpunan kelas keseimbangan (elemen dengan bentuk (x,x)) dinotasikan dengan $S^{\bullet}$ dan himpunan nol didefinisikan dengan (),−∞−∞.

Selanjutnya, pada S didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut :

()()(),,,abcdabcd⊕=⊕⊕

$$(a,b)\otimes(c,d) = \left((a\otimes c)\oplus(b\otimes d),\ (a\otimes d)\oplus(b\otimes c)\right)$$

Dapat ditunjukkan bahwa dua operasi tersebut well-defined.

Sifat 4

1. $S^{\oplus}$ *merupakan semifield .*
2. S^{Θ} *tidak stabil terhadap operasi pergandaan dan bukan merupakan semifield.*
3. $S^{\bullet}$ *isomorfis terhadap* $\Re_{\max}$.

Bukti :

1. Bukti bahwa $S^{\oplus}$ semifield dapat diturunkan secara analog dengan menggunakan aksioma-aksioma pada $\Re_{\max}$.
2. S^{Θ} tidak stabil pada operasi pergandaan

   Ambil sebarang $(x_1,t_1)=(-\infty,t_1),(x_2,t_2)=(-\infty,t_2) \in S^{\Theta}$ diperoleh :

   $$(-\infty,t_1)\otimes(-\infty,t_2) = \left((-\infty\otimes-\infty)\oplus(t_1\otimes t_2),\ (-\infty\otimes t_2)\oplus(t_1\otimes-\infty)\right)$$
   $$= \left(t_1\otimes t_2,\ -\infty\oplus-\infty\right)$$
   $$= (t_1\otimes t_2,-\infty) \notin S^{\Theta}$$

   Jadi, S^{Θ} tidak stabil pada operasi pergandaan. Dengan demikian, himpunan S^{Θ} bukan merupakan semifield.
3. $S^{\bullet}$ isomorfis terhadap $\Re_{\max}$.

   Akan ditunjukkan terdapat homomorphisma yang bijektif dari $S^{\bullet}$ ke $\Re_{\max}$.

   Bentuk pemetaan $f : S^{\bullet} \rightarrow \Re_{\max}$ dengan $f(x^{\bullet}) = x$ atau dengan kata lain $f((x,x)) = x$. Akan ditunjukkan :

   i) f homomorphisma

Ambil sebarang $x^{\bullet}$, $y^{\bullet}$ $\in$ $S^{\bullet}$.

Akan dibuktikan : a). $f(x^{\bullet} \oplus y^{\bullet}) = f(x^{\bullet}) \oplus f(y^{\bullet})$

b). $f(x^{\bullet} \otimes y^{\bullet}) = f(x_1^{\bullet}) \otimes f(y^{\bullet})$

Misalkan maka diperoleh),(dan),(*yyyxxx*==

•⊕=⊕⊕=⊕=•⊕•)(),(),(),(x*yxyxyxyyxxy*

dan

•⊗=⊗⊗=⊗⊕⊗⊗⊕⊗=⊗=•⊗•)(),())()(),()((),(),(x*yxyxyxyxyxyxyxyyxxy*

sehingga

)()())(()(•⊕•=⊕=•⊕=•⊕•*yfxfyxyxfyxf*

dan

εεεε==)),(()(*ff*.

Selain itu juga diperoleh

)()())(()(•⊗•=⊗=•⊗=•⊗•*yfxfyxyxfyxf*

dan

eeefef==)),(()(

Jadi f homomorphisma.

ii) f *s*urjektif

Ambil sebarang y $\in\Re_{\max}$. Akan dibuktikan ada •*x*sehingga .

Dengan mengambil , diperoleh *yxf*=•)(),(*yyx*=•*yxf*=•)(

Jadi, f Surjektif

iii) f injektif

Ambil sebarang •∈=•=•S),(dan),(*yyyxxx*dengan)()(•=•*yfxf*

Akan dibuktikan •=•*yx*. Karena

)()(•=•*yfxf*

maka

$)),(()),((yyfxxf=$

$yx=\Leftrightarrow$

$),(),(yyxx=\Leftrightarrow$

$\bullet=\bullet\Leftrightarrow yx$

Jadi, f injektif. Dengan demikian, dari poin i) sampai iii) dapat disimpulkan bahwa f isomorfisma.

Gabungan dari , $S_{\oplus}S^{\ominus}$ dan $S^{\bullet}$ adalah himpunan S atau dapat ditulis . Elemen ε adalah satu-satunya elemen yang berada dalam irisan ketiga himpunan tersebut. Hal ini dapat dimengerti sebab misalkan , berarti $\bullet\oplus\cup\cup=SSSS_{\theta}\bullet\oplus\cap\cap=\in SSSSx_{\theta}xS_{\oplus}\in$; $xS\in$ dan $xS_{\bullet}\in$.

$_{\oplus}\in Sx$ artinya $(,xt=-\infty$……………………………………(i)

$_{\theta}Sx\in$ artinya $(),xt=-\infty$…………………………………..(ii)

artinya $_{\bullet}\in Sx(),xtt=$ ……………………………………..(iii)

Dari (i),(ii),dan (iii) maka yang memenuhi ketiganya adalah $(),x=-\infty-\infty\varepsilon=$

Definisi 5

Untuk sebarang dengan $Syx\in,),(-\infty=xx$ dan $),(-\infty=yy$, $x',y'\in$, *didefinisikan operasi* $\ominus$ *sebagai berikut :* $_{\max}\Re$

$x\ominus y$ = $),(),(yx-\infty\oplus-\infty$

Terhadap operasi tersebut, memiliki sifat sebagai berikut $_{\max}\Re$

Sifat 6

Untuk sebarang dengan $Syx\in,),(-\infty=xx$ dan $),(-\infty=yy$, $x',y'\in$, *berlaku* : $_{\max}\Re$

1. " jika$\theta yxxyx>=$
2. " jika$\theta xyyyx>=\theta$

3. $\bullet = xxx\theta$

Bukti :

1. Ambil sebarang dengan $Syx\in ,),(-\infty = xx$ dan $),(-\infty = yy$, $x',y'\in$ dengan , diperoleh $_{\max}\Re'' yx>$

$x\Theta y$ = $)',(),'(yx-\infty+-\infty$

$=)','(yx$ = $),'(-\infty x=$ x

2. Ambil sebarang dengan $Syx\in ,),(-\infty = xx$ dan $),(-\infty = yy$, $x',y'\in$ dengan , diperoleh $_{\max}\Re'' xy>$

$x\Theta y$ = $)',(),'(yx-\infty+-\infty$

$=)','(yx$

= $)',(y-\infty$

= $),'(\theta-\infty y$

= $y\theta$

3. Jelas dari definisi operator $\bullet$.

Referensi :

Bacceli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J.P., 1992, *Synchronization and Linearity*, Jon Wiley and Sons