Syarat Cukup dan Perlu Elemen Gelanggang Merupakan Pembagi Nol Kiri maupun Kanan $)(RM_{nn}\times$

Oleh
K a r y a t i
R. Rosnawati

Abstrak

Himpunan matriks ordo atas gelanggang nR komutatif, yang selanjutnya dinotasikan dengan , membentuk struktur gelanggang terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks standar. $()RM_{nn}\times$

Dengan memandang himpunan $()RM_{nn}\times$ sebagai gelanggang, dalam tulisan ini akan diselidiki syarat perlu dan cukup elemen $()RM_{nn}\times$ merupakan pembagi nol kiri maupun kanan jika R adalah gelanggang komutatif maupun daerah integral.

Diperoleh hasil bahwa: Jika R gelanggang komutatif, maka matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika$A)(RM_{nn}\times)()\det(RZA\in$, matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika$A)(RM_{nn}\times)()\det(RZA\in$, matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika matriks merupakan pembagi nol kanan dalam . Selanjutnya, jika $A)(RM_{nn}\times A)(RM_{nn}\times R$ adalah daerah integral, maka berlaku matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika, matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika$A)(RM_{nn}\times 0A=)\det(A)(RM_{nn}\times 0A=)\det($.

Kata kunci: matriks atas gelanggang, pembagi nol kiri, pembagi nol kanan, pembagi nol.

Pendahuluan

1. Latar Belakang Masalah

Struktur gelanggang (*ring*) R adalah suatu himpunan R yang kepadanya didefinisikan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi aksiom-aksioma tertentu, yaitu: terhadap operasi penjumlahan membentuk grup abelian, terhadap operasi pergandaan membentuk struktur semigrup dan memenuhi sifat distributif kiri maupun kanan.

Himpunan matriks ordo atas gelanggang nR komutatif, yang selanjutnya dinotasikan dengan $()RM_{nn}\times$, membentuk struktur gelanggang terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks standar.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT** " yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Dari kedua struktur gelanggang tersebut, banyak hal yang dapat dipelajari berkaitan dengan keduanya. Misalkan: adalah ideal dalam $RI\subseteq R$ jika dan hanya jika $()IM_{n\times n}$ ideal dalam gelanggang $()RM_{n\times n}$. Selain itu, dapat pula diperluas pengertian rank matriks atas lapangan ke rank matriks atas gelanggang beserta sifat-sifat rank matriksnya.

Terkait dengan suatu struktur gelanggang, dikenal suatu elemen spesifik, yang disebut elemen pembagi nol (*Zero Devisor*) kiri maupun kanan . Jika dan $Ra\in 0b\neq$ adalah elemen – elemen pada gelanggang R sedemikian sehingga , maka disebut pembagi nol kiri dan jika maka disebut pembagi nol kanan. Tidak semua struktur gelanggang mempunyai elemen tersebut. Oleh karena itu, dalam tulisan ini akan diselidiki syarat perlu dan cukup elemen-elemen gelanggang $0ab=a0ba=a()RM_{n\times n}$ merupakan pembagi nol kiri (kanan) terkait dengan pembagi nol kiri (kanan) pada gelanggang komutatif R.

2. Landasan Teori

Untuk keperluan dalam penyelidikan syarat perlu dan cukup elemen gelanggang matriks merupakan pembagi nol kiri (kanan), maka perlu didukung definisi gelanggang (***ring***) sebagai berikut :

Definisi 1. (Adkins : p. 49) *Gelanggang (R,+,.) adalah suatu himpunan R bersama dengan dua operasi biner + : RxR→R (penjumlahan) dan . :RxR→R (pergandaan) yang memenuhi aksioma sebagai berikut:*

(a) (R,+) merupakan grup abelian

(b) a.(b.c) = (a.b).c (asosiatif)

(c) a.(b + c) = a.b + a.c dan (a + b).c = a.c + b.c (distributif kanan dan kiri)

Gelanggang R dikatakan komutatif, jika terhadap operasi pergandaannya bersifat komutatif, dan dikatakan mempunyai elemen satuan jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga $a.1=1.a=a$.. Suatu elemen $a \in R$ dikatakan mempunyai invers $b \in R$ jika berlaku $a.b=b.a=1$. Suatu gelanggang disebut lapangan (***field***) jika komutatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers.

Dalam mempelajari suatu struktur aljabar, senantiasa dipelajari suatu sub strukturnya, yang didefinisikan atas himpunan bagiannya. Dalam hal ini, diberikan definisi tentang sub gelanggang sebagai berikut:

Definisi 2 (Adkins : p. 51) *Misalkan S himpunan bagian dari gelanggang R, himpunan S dikatakan sub gelanggang dari R jika terhadap operasi biner yang sama pada R , S membentuk gelanggang.*

Berikut ini, juga diberikan suatu definisi tentang pembagi nol kiri, pembagi nol kanan dan pembagi nol yang akan menjadi pendukung dalam pembahasan utama dalam penelitian ini:

Definisi 3 (Brown:1) *Elemen* $Ra\in$ *disebut :*

a. *pembagi nol kiri, jika terdapat elemen tak nol* $Rb\in$ *sedemikian sehingga* $0ab=$

b. *pembagi nol kanan, jika terdapat elemen tak nol* $Rb\in$ *sedemikian sehingga* $0ba=$

c. *pembagi nol, jika merupakan pembagi nol kanan sekaligus pembagi nol kiri* $Ra\in$

Dalam tulisan ini diberikan, yang menotasikan himpunan semua elemen pembagi nol kiri maupun kanan . Jika)(*RZR* gelanggang komutatif, maka -nya merupakan himpunan pembagi nol)(

Berikut diberikan definis daerah integral, yaitu suatu struktur gelanggang yang mempunyai sifat khusus, yang selengkapnya diberikan pada definisi berikut:

Definisi 4 (Brown : 2) *Gelanggang R disebut Daerah Integral jika komutatif, memuat elemen satuan , .*)(*RZ*}{*0*=

Matriks yang entri-entrinya anggota suatu gelanggang, disebut matriks atas gelanggang, yang dinotasikan dengan $M_{nxn}(R)$. Dalam hal ini gelanggangnya adalah gelanggang komutatif

Teorema di atas berguna dalam menentukan determinan suatu matriks dengan menggunakan ekspansi kofaktor dari matriks yang bersagkutan. Selanjutnya diberikan sifat – sifat matriks atas gelanggang, terkait dengan determinannya:

Teorema 1. *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *maka A invertibel jika dan hanya jika det(A) adalah unit di R.*

Teorema berikutnya menyajikan sifat determinan yang lain, terkait dengan determinan matriks tranposenya:

Teorema 2. *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *maka*)det()det(*tAA*=

Teorema berikut memberikan sifat determinan suatu matriks terkait dengan rank matriksnya:

Teorema 3. *Misalkan* ,)(*RMAnn*×∈*nArank*<)(*jika dan hanya jika*)()det(*RZA*∈

Sistem persamaan linear (SPL), dengan setiap koefisien masing-masing variabel (termasuk nilai ruas kanan persamaan) merupakan elemen dari suatu gelanggang, dapat direpresentasikan dengan suatu matriks atas gelanggang. Teorema berikut menjamin adanya penyelesaian non trivial dari suatu SPL homogen :

Teorema 4. *Misalkan ,sistem persamaan linear homogen* $)(RMA_{nn\times}\in OAX=$ *mempunyai penyelesaian non trivial jika dan hanya jika* $nArank<)($.

Pembahasan

Dalam tulisan ini, yang dimaksud dengan gelanggang R adalah gelanggang komutatif. Himpunan semua matriks berukuran atas gelanggang komutatif $nn\times R$ dinotasikan dengan . Suatu matriks disebut pembagi nol kiri dalam jika untuk suatu matriks tak nol $)(RM_{nn\times}\in A)(RM_{nn\times})(RM_{nn\times}OAB=\in B)(RM_{nn\times}$. Secara sama, matriks $\in A)(RM_{nn\times}$ disebut pembagi nol kanan jika untuk suatu tak nol $OCA=\in C)(RM_{nn\times}$. Dalam kenyataannya suatu matriks dalam merupakan pembagi nol kiri jika dan hanya jika merupakan pembagi nol kanan. Hal ini sebagai akibat dari teorema yang selengkapnya diberikan sebagai berikut: $)(RM_{nn\times}$

Teorema 5. *Diberikan , maka berlaku :* $\in A)(RM_{nn\times}$

a. *Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika .* $A)(RM_{nn\times})()\det(RZA\in$

b. *Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika .* $A)(RM_{nn\times})()\det(RZA\in$

Bukti:

a. $)(\Leftarrow$

Jika , maka menurut sifat rank matriks atas gelanggang komutatif $)()\det(RZA\in R$ berakibat $nArank<)($. Terkait dengan penyelesaian sistem persamaan linear homogen dengan matriks koefisiennya atas gelanggang komutatif R, yaitu , kondisi tersebut berakibat SPL homogennya mempunyai penyelesaian non trivial. Dengan demikian $0AX=0A=\xi$ untuk suatu

diperoleh $()OBAAB ttt==$, sehingga . Karena $OAB t=OB\neq$, maka . Dengan demikian matriks merupakan pembagi nol kanan pada . $OBt\neq A)(RMnn\times$

Cara lain:

$)()\det(RZA\in\Rightarrow \quad)()\det(RZAt\in$

$\Rightarrow tA$ pembagi nol kiri.

$\Rightarrow BAtO=.$

$\Rightarrow ()OBAAB ttt==$

$\Rightarrow OABt=, \quad OBt\neq$

Jadi matriks merupakan pembagi nol kanan pada . $A)(RMnn\times$

$)(\Rightarrow$

Diketahui pembagi nol kanan dalam , maka untuk suatu matriks tak nol $A)(RMnn\times OBA=\in B)(RMnn\times$. Karena $OBA=$, maka . Andaikan $tttBABA=)(O=[\,]321tB\xi\xi\xi...=$ dalam bentuk partisi kolom. Karena $\in tB)(RMnn\times$ matriks tak nol, maka terdapat suatu kolom $i\xi$ yang bukan vektor nol di nR. Dari yang diketahui diperoleh $[\,][\,]==nt2t1tttAAABAO\xi\xi\xi...$, akibatnya untuk setiap . Karena terdapat kolom $0Ait=\xi n321i,...,,,=i\xi$ yang bukan vektor nol di nR dan , maka SPL homogen mempunyai penyelesaian non trivial. Akibatnya , sehingga . Sesuai dengan sifat determinan, maka diperoleh sehingga

$0Ait=\xi 0XAt=nArankt<)()()\det(RZAt\in)\det()\det(tAA=)()\det(RZA\in$

Cara lain:

A p.n kanan ⇒ untuk suatu *OBA*=*OB*≠

⇒*tttBABA*=)(*O*=, *OBt*≠

® *tA* pembagi nol kiri.

⇒)()det(*RZAt*∈

⇒)det()det(*AAt*=

⇒)()det(*RZA*∈

Teorema berikut sebagai akibat dari Teorema 5 di atas, yang selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Matriks pembagi nol kiri pada gelanggang jika dan hanya jika matriks pembagi nol kanan pada gelanggang . ∈*A*)(*RMnn*×)(*RMnn*×∈*A*)(*RMnn*×)(*RMnn*×

Menurut Teorema 5.a diperoleh:

A)(*RMnn*×

RMnn× pembagi nol kanan (menurut Teorema 5.b)

Daerah integral adalah merupakan gelanggang khusus, dimana selain bersifat komutatif dengan elemen satuan juga hanya memuat pembagi nolnya adalah nol saja. Berdasarkan sifat tersebut dan sebagai akibat dari Teorema 5 diperoleh teorema sebagai berikut:

Andaikan R adalah daerah integral dan ∈*A*)(*RMnn*×*, maka pembagi nol kiri jika dan hanya jika A0A*=)det(

Diketahui *R* adalah daerah integral, maka *R* adalah gelanggang komutatif. Menurut Teorema 5 maka berlaku ∈*A*)(*RMnn*×, maka pembagi nol kiri jika dan hanya jika . Karena *A*)()det(*RZA*∈*R* adalah daerah integral, maka pembagi nolnya adalah nol atau . Diketahui }{)(*0RZ*=)()det(*RZA*∈ dan , maka . }{)(*0RZ*=

Teorema 8. *Andaikan R adalah daerah integral dan* ∈*A*)(*RMnn*×*, maka pembagi nol kanan jika dan hanya jika A0A*=)det(.

Bukti:

Diketahui R adalah daerah integral, maka R adalah gelanggang komutatif. Menurut Teorema 6. pembagi nol kanan jika dan hanya jika pembagi nol kiri, dan menurut Teorema 7 berlaku jika dan hanya jika AA0A=)det(

KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Jika, dengan ∈A)(RMnn×R gelanggang komutatif , maka berlaku :
    a. Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika. A)(RMnn×)()det(RZA∈
    b. Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika . A)(RMnn×)()det(RZA∈
    c. Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam A)(RMnn×A)(RMnn×

2. Jika , dengan ∈A)(RMnn×R daerah integral , maka berlaku :
    a. Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika. A)(RMnn×0A=)det(
    b. Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika . A)(

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, Weintraub. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Spinger – Verlag, New York.

Brown, W.C. 1992. *Matrices Over Commutative Rings*. Marcel Dekker, Inc, New York.