Similaritas Uniter Matriks Repesentasi Grup Berhingga

Oleh:
Musthofa
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Misalkan *G* sembarang grup berhingga dan $GL_m(C)$ himpunan semua matriks nonsingular berukuran $m \times m$ dengan entri-entri bilangan kompleks. Jika terdapat suatu homomorfisme $A : G \to GL_m(C)$ maka $A(x) \in GL_m(C)$ disebut matriks representasi dari *G*. Jika *A(x)* suatu matriks representasi dari *G* maka selalu dapat dicari suatu matriks uniter yang similar dengan *A(x)*.

Kata Kunci : Matriks representasi, matriks uniter, similar

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut teorema Cayley, jika *G* suatu grup berhingga maka terdapat suatu grup permutasi yang isomorfis dengan *G*. Sembarang permutasi pada himpunan *G* dapat direpresentasikan oleh suatu matriks yang disebut matriks permutasi.

Definisi 1.1.

Misalkan $G = \{ g_1, g_2, g_3, \dots , g_n \}$ *dan p adalah suatu permutasi pada G dengan* $p = \begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ p(g_1) & p(g_2) & p(g_3) & \cdots & p(g_n) \end{Bmatrix}$. *Dibentuk matriks* $A(p) = [\, a_{ij}(p) \,]$ *dengan*

$$a_{ij}(p) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } p(g_i) = g_j \\ 0 & \text{, jika } p(g_i) \neq g_j \end{cases}$$

A(p) disebut matriks permutasi dari p.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Sebagai contoh misalkan $G = \{\, e, a, b, \ c \,\}$dan p permutasi pada G dengan $p(e) = a,\ p(a)= b,\ p(c) = d,\ p(d) = e$ yang dapat ditulis sebagai $p = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & b & c & e \end{pmatrix}$.

Diperoleh :

$a_{11}(p) = 0$	$a_{12}(p) = 1$	$a_{13}(p) = 0$	$a_{14}(p) = 0$
$a_{21}(p) = 0$	$a_{22}(p) = 0$	$a_{23}(p) = 1$	$a_{24}(p) = 0$
$a_{31}(p) = 0$	$a_{32}(p) = 0$	$a_{33}(p) = 0$	$a_{34}(p) = 1$
$a_{41}(p) = 1$	$a_{42}(p) = 0$	$a_{43}(p) = 0$	$a_{44}(p) = 0$

Jadi $A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sehingga setiap grup berhingga G dapat direpresentasikan oleh himpunan matriks permutasi. Jika $p = \begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ p(g_1) & p(g_2) & p(g_3) & \cdots & p(g_n) \end{Bmatrix}$ maka invers dari p adalah $p^{-1} = \begin{Bmatrix} p(g_1) & p(g_2) & p(g_3) & \cdots & p(g_n) \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \end{Bmatrix}$.

Jadi, diperoleh $a_{ij}(p) = a_{ji}(p) = a_{ij}^{-1}(p)$. Sehingga matriks permutasi selalu merupakan matriks uniter.

Definisi 1.2.

Misalkan G grup berhingga dan $GL_m(C)$ himpunan semua matriks nonsingular berukuran $m \times m$ dengan entri-entri bilangan kompleks. Jika $A : G \rightarrow GL_m(C)$ homomorfisma, yaitu $\forall x,y$ v G terdapat $A(x), A(y)$ v $GL_m(C)$ sehingga

$$A(x)\,A(y) = A(xy)$$

maka $A(x)$ disebut matriks representasi dari G.

Jika $B(x)$ matriks yang similar dengan $A(x)$, misalkan $B(x) = S^{-1} A(x)\, S$ dengan S suatu matriks nonsingular, maka

$$\begin{aligned} B(x)\,B(y) &= S^{-1} A(x)\, S\ S^{-1} A(y)\, S \\ &= S^{-1} A(x)\ A(y)\ S \\ &= S^{-1} A(xy)\, S \end{aligned}$$

$= B(xy)$

Jadi *B(x)* juga matriks representasi dari *G*. Sehingga jika *A(x)* adalah matriks representasi dari *G* maka setiap matriks *B(x)* yang similar dengan *A(x)* juga merupakan matriks representasi dari *G*.

1.2. Rumusan Masalah

Misalkan *A(x)* matriks representasi dari *G*.

1. Untuk setiap *A(x)* adakah suatu matriks uniter *B(x)* yang similar dengan *A(x)* ?
2. Bagaimana mencari matriks nonsingular *S* sedemikian sehingga $S^{-1}A(x\ S = B\ (x)$ merupakan matriks uniter ?

1.3 Urgensi Masalah

Matriks uniter merupakan salah satu jenis matriks yang memiliki beberapa keistimewaan, antara lain hasil kali dua matriks uniter adalah matriks suatu matriks uniter, invers suatu matriks uniter adalah suatu matriks uniter, matriks identitas merupakan matriks uniter dan nilai mutlak dari determinan suatu matriks uniter *U*, $|\det U| = 1$.

Sehingga jika dapat ditemukan suatu matriks nonsingular *S* sedemikian sehingga $S^{-1}A(x)\ S$ matriks uniter, dengan *A(x)* matriks representasi dari *G*, maka untuk sebarang matriks representasi *A(x)* pasti terdapat matriks uniter yang similar dengan *A(x)* dan merupakan matriks representasi dari *G*.

II. PEMBAHASAN

Misalkan *A(x)* matriks representasi dari grup berhingga *G*. Akan dicari matriks uniter *B(x)* yang similar dengan *A(x)*. Beberapa definisi dan teorema yang diperlukan untuk masalah tersebut antara lain sebagai berikut :

Definisi 2.1. (Nering, 1970).

*Matriks A disebut **normal** jika* $A\ A^* = A^*\ A$.

Beberapa contoh matriks normal antara lain matriks diagonal, matriks uniter, dan matriks hermite.

Teorema 2.2. (Nering, 1970).

Sebarang matriks A dapat didiagonalkan secara uniter jika dan hanya jika A matriks normal.

Setiap matriks hermite adalah matriks normal. Sehingga sebarang matriks hermite dapat didiagonalkan secara uniter. Dengan kata lain jika H matriks hermite maka pasti terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga $U^{-1}HU = D$.

Prosedur untuk mendiagonalkan secara uniter suatu matriks hermite H adalah sebagai berikut:

1. Cari nilai-nilai eigen H.
2. Cari suatu basis ruang eigen dari setiap nilai eigen.
3. Terapkan proses gram-schmidt kesetiap basis untuk mendapatkan basis ortonormal setiap ruang eigen.
4. Bentuk matriks U yang kolom - kolomnya merupakan vektor – vektor basis yang dibangun dalam langkah 3. Matriks U akan mendiagonalisasi H secara uniter dan hasil digonalisasi H merupakan suatu matriks diagonal D dengan $d_{ii} = \lambda_i$, dengan λ_i nilai eigen ke-i dari H.

Misalkan $A(x)$ matriks representasi dari grup G. Dibentuk matriks H dengan

$$H = \sum_{x \in G} A(x)A(x)^* \qquad (2.1)$$

Matriks H merupakan matriks hermite sebab

$$H^* = \left(\sum_{x \in G} A(x)A(x)^* \right)^* = \sum_{x \in G} A(x)^{**} A(x)^* = \sum_{x \in G} A(x)A(x)^* = H$$

Sehingga terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga $U^{-1}HU = D$ dengan D matriks diagonal. Entri diagonal D merupakan nilai eigen-nilai eigen H dan merupakan bilangan real positif. Entri diagonal D dapat ditulis sebagai

$$d_{jj} = \sum_{i} \sum_{k} u_{ji}^{-1} h_{ik} u_{kj} \qquad (2.2)$$

Dibentuk matriks $D^{\frac{1}{2}} = \left[d_{jj}\right]^{\frac{1}{2}}$ dengan $d_{jj}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d_{jj}}$. Selanjutnya akan dicari hubungan antara *A(x)* , *U* dan *D*. Substitusikan $H = \sum_{x \in G} A(x)A(x)^*$ ke dalam persamaan $U^{-1}H\,U = D$.

$$U^{-1} \left(\sum_{x \in G} A(x)A(x)^* \right) U = D$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{x \in G} U^{-1}A(x)A(x)^*U = D$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{x \in G} U^{-1}A(x)\ (UU^{-1})\ A(x)^*U = D \qquad (2.3)$$

karena $U^{-1}\,A(x)^*\,U = (\,U^{-1}A(x)\,U)^*$

sehingga persamaan (2.3) menjadi

$$\sum_{x \in G} (U^{-1}A(x)U)\ (U^{-1}A(x)^*U)^* = D \qquad (2.4)$$

Jika $U^{-1}A(x)\,U = C(x)$ maka persamaan (2.4) menjadi $\sum_{x \in G} C(x)C(x)^* = D$ (2.5)

Didefinisikan $B(x) = D^{-\frac{1}{2}}C(x)D^{\frac{1}{2}}$, dengan $d_{jj}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{d_{jj}}}$. Akan ditunjukkan *B(x)* similar dengan *A(x)*.

$$B(x) = D^{-\frac{1}{2}}\,(\,U^{-1}\,A(x)\,U\,)\,D^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad B(x) = (UD^{\frac{1}{2}})^{-1}\,A(x)\,(\,UD\,)^{\frac{1}{2}} \qquad (\,2.6\,)$$

Jadi *B(x)* similar dengan *A(x)* . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *B(x)* matriks uniter , yaitu $B(x)\,B(x)^* = B(x)\,B(x)^{-1} = I$.

$$B(x)\,B(x)^* = B(x)\,B(x)^{-1} = (\,D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})\,(D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}}\,)^*$$

$$\Leftrightarrow \quad (D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})\ I\ (\,D^{\frac{1}{2}}\,C(x)^*\,D^{-\frac{1}{2}}) \qquad \text{sebab } (D^{\frac{1}{2}})^* = D^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})\ \ (D^{-\frac{1}{2}}\,D\,D^{-\frac{1}{2}}\,)\ \ (\,D^{\frac{1}{2}}\,C(x)^*\,D^{-\frac{1}{2}}) \qquad (\,2.7\,)$$

Karena $D^{\frac{1}{2}}\,D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}\,D^{\frac{1}{2}} = I$ dan $D = U^{-1}HU = U^{-1}\,(\,\sum_{x \in G} A(x)\,A(x)^*\,)\,U$ maka diperoleh

$$(D^{-\frac{1}{2}}C(x))\,U^{-1}\,(\sum_{x \in G} A(x)\,A(x)^*\,)\,U\,(\,C(x)^*\,D^{-\frac{1}{2}}\,) = B(x)\,B(x)^* \qquad (\,2.8)$$

karena $C(x) = U^{-1}A(x)\,U$ maka persamaan di atas menjadi

$$(D^{-\frac{1}{2}}U^{-1}\,A(x)\,U)\,U^{-1}\,(\sum_{x\in G} A(x)\,A(x)^{*}\,)\,U\,(\,U^{-1}A(x)^{*}\,U\;D^{-\frac{1}{2}}\,)$$

$$= \quad B(x)\,B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\,D^{-\frac{1}{2}}\;U^{-1}\,A(x)\;\;)\sum_{x\in G} A(x)\,A(x)^{*}\;\;(\,A(x)^{*}\,U\;\;D^{-\frac{1}{2}}\;) = B(x)\,B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\,D^{-\frac{1}{2}}\;U^{-1})\;\;\sum_{x\in G} A(x)\,A(x)\,A(x)^{*}\,A(x)^{*}\;\;(\,U\;\;D^{-\frac{1}{2}}\;) = B(x)\,B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\,D^{-\frac{1}{2}}\;U^{-1})\;\;\sum_{x\in G} A(x^{2})\;\;A(x^{2})^{*}\;\;(\,U\;\;D^{-\frac{1}{2}}\;) = B(x)\,B(x)^{*} \qquad (2.9)$$

Misalkan $y = x^{2}\;\;v\;\;G$ maka persamaan di atas menjadi

$$\Leftrightarrow \quad D^{-\frac{1}{2}}\;U^{-1}\;\;\sum_{y\in G} A(y)\,A(y)^{*}\;\;\;U\;\;D^{-\frac{1}{2}}\;\;= B(x)\,B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad D^{-\frac{1}{2}}\;\;\;D\;\;\;\;D^{-\frac{1}{2}}\;\;=\;\;B(x)\,B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad I \;=\; B(x)\,B(x)^{*} \qquad (2.10)$$

Jadi terbukti *B(x)* matriks uniter.

Contoh:

Misalkan $G = \{e,\;a\}$ grup dengan matriks representasi $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ maka terlihat bahwa matriks representasi ini bukan merupakan matriks uniter sebab $A(a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq A(a)^{*}$. Sehingga akan dicari matriks representasi uniter yang similar dengan matriks representasi di atas.

Dibentuk matriks $H = \sum A(x)\,A(x)^{*}$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa *H* matriks Hermite. Sehingga terdapat matriks uniter *U* sedemikian sehingga $U^{-1}\;H\;U = D$. Untuk mencari *U* digunakan langkah – langkah sebagai berikut :

1. Mencari nilai eigen H

$$\left| H - I\lambda \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

Didapat persamaan karakteristik $5 - 5\lambda + \lambda^2 = 0$ dan akar – akar persamaan karakteristik (nilai eigen) H adalah $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

.

2. Mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen H

(a). Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$$[H - I\lambda]\; X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\, x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, x_2 = 0$$

Diperoleh $x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\, x_2$. Ambil $x_2 = t$ dengan $t \neq 0$ sebagai parameter. Didapat vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t \quad , \; t \neq 0$$

(b). Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$$[H - I\lambda]\; X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,x_1 \;-\; x_2 \;=\; 0$$

$$-\,x_1 \;+\; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,x_2 \;=0$$

Diperoleh $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,x_2$. Ambil $x_2 = s$ dengan $s \neq 0$ sebagai parameter.

Didapat vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} s \;,\; s \neq 0$$

3. Mencari basis ortonormal ruang eigen dari setiap nilai eigen.

(a). $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ adalah $X = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t \;,\; t \neq 0.$

Sehingga basis untuk ruang eigen dari λ_1 adalah $U_1 = \left\{ \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right) \right\}$.

Dengan proses Gram-Schmidt basis ortonormal ruang eigen dari λ_1 adalah

$$W_1 = U_1$$

$$V_1 = \frac{1}{\|W_1\|}\;W_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5}\;)^2+4}{4}}}\;\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}\;\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5}\,)}} \;,\; \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \right)$$

(b). $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2 adalah $X = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} s \;,\; s \neq 0$.

Sehingga basis ruang eigen dari λ_2 adalah $U_2 = \left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right) \right\}$.

Dengan proses Gram-Schmidt basis ortonormal ruang eigen dari λ_2 adalah

$$W_2 = U_2$$

$$V_2 = \frac{1}{\|W_2\|} W_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2+4}{4}}} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \;,\; \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \right)$$

Diperoleh matriks uniter U dengan kolom – kolomnya merupakan basis ortonormal ruang – ruang eigen di atas, yaitu

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{bmatrix} \text{dan matriks } D = U^{-1}HU = \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$U\,D^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\,U\,D^{1/2}\,)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh matriks representasi uniter dari $G = \{\, e \,,\, a \,\}$ sebagai berikut :

$B(e) = (\,UD^{1/2}\,)^{-1}\,A(e)\,(\,UD^{1/2}\,)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B(a) = (\,UD^{1/2}\,)^{-1}\,B(a)\,(\,UD^{1/2}\,)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa $B(x)$ uniter, yaitu $B(e)\,B(ex)^* = B(a)\,B(a)^* = I$.

III. Penutup

3.1 Kesimpulan

1. Jika $A(x)$ matriks representasi dari grup G maka terdapat matriks representasi uniter $B(x)$ yang similar dengan $A(x)$.
2. Untuk mencari $B(x)$ digunakan langkah – langkah sebagai berikut :
   a. Mencari $H = \sum A(x)\,A(x)^*$
   b. Mencari U (*gunakan prosedur untuk mendiagonalisasi matriks hermite*).
   c. Mencari $D^{1/2}$ dengan $D = U^{-1} H U$
   d. Mencari $UD^{1/2}$ dan inversnya
   e. $B(x) = (UD^{1/2})^{-1} A(x)(UD^{1/2})$

3.2. Saran

Beberapa masalah yang selanjutnya perlu dikaji adalah jika G grup berhingga, apakah matriks uniter berukuran $m \times m$ yang merupakan matriks representasi dari G juga berhingga ?

DAFTAR PUSTAKA

Ledermann, Walter. 1977. *Introduction to Group Characters.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nering, Evar, D. 1970. *Linear Algebra and Matriks Theory Second Edition.* New York : John Wiley and Sons.

Nicholson, W, Keith. 2002. *Linear Algebra With Application Fourth Edition.* Singapore : McGraw-Hill Education.