Penentuan Kestabilan Sistem Hibrid melalui Trayektorinya pada Bidang

Oleh:

Kus Prihantoso Krisnawan
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Sistem hibrid mempunyai bentuk:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), m(t)\right)$$
$$m\left(t^{+}\right) = \phi\left(x(t), m(t)\right)$$

dengan $x \in \Re^N$, $m \in M = \{m_1, m_2, ..., m_N,\}$, x merupakan variabel kontinu dan m disebut sebagai fungsi tukar yang bersifat diskrit. Kestabilan dari sistem ini untuk N = 2 dapat ditentukan dengan menggambarkan trayektorinya. Kestabilan dari masing-masing subsistem tidak menjamin sistem hibridnya menjadi stabil. Salah satu faktor penentu kestabilan sistem hibrid ini adalah fungsi tukarnya.

Kata kunci: sistem hibrid, kestabilan

A. Pendahuluan

Dewasa ini, begitu banyak bidang seperti energi listrik, transportasi, kedokteran, dan sebagainya yang menggunakan sistem hibrid. Penggunaan sistem hibrid pada bidang energi diantaranya adalah pada pembangkit listrik hibrid terbesar di dunia yang terletak di Hawaii [7]. Pada bidang transportasi juga mulai diproduksi mobil berteknologi hibrid [6], hal ini ditandai dengan mulai bermunculannya mobil-mobil hibrid diantaranya adalah honda accord hibrid, honda civic hibrid, honda insight hibrid, toyota prius, dan masih banyak yang lainnya [5].

Dalam matematika sistem hibrid hadir sebagai hasil kombinasi antara sistem diskrit dan kontiu yang diproses menggunakan suatu pembuat keputusan logis. Pada contoh-contoh diatas, sistem-sistem tersebut bukanlah murni sistem dinamik kontinu maupun diskrit namun kombinasi antara keduanya. Sistem hibrid linier disajikan dalam bentuk

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT “** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

$$\dot{x}(t) = A_m(x(t)),\ m \in \{1, \cdots N\}$$

dengan $x(t) \in \Re^N$ dan m disebut sebagai fungsi tukar.

Untuk menentukan kestabilan sistem hibrid ini terlebih dahulu perlu diketahui kestabilan masing-masing subsistem dan kemudian pengaruh fungsi tukarnya terhadap kestabilan sistem secara keseluruhan. Penentuan kestabilan sistem diperlukan untuk mengetahui efek dari perubahan input terhadap sistem [3]. Sistem yang stabil lebih bermanfaat bagi manusia karena keadaan sistem pada waktu-waktu berikutnya dapat diperkirakan sedangkan sistem yang tak stabil mengarah pada keadaan yang tak menentu.

Kestabilan untuk sistem dua dimensi dapat dilihat melalui potret fasenya pada bidang. Potret fase merupakan gambar semua kurva solusi, namun sebenarnya yang diperlukan bukanlah gambar solusi secara keseluruhan tetapi hanya gambar trayektori yang mewakili. Dengan kata lain, kestabilan dari sistem hibrid untuk N = 2 juga dapat ditentukan dengan menggambarkan trayektorinya.

Dalam makalah ini akan dibahas bagaimana menentukan kestabilan sistem hibrid melalui trayektorinya pada bidang. Disini juga diberikan contoh kasus untuk menentukan fungsi tukar dari sistem sedemikian sehingga didapatkan suatu sistem hibrid yang stabil. Fungsi tukar penstabil ini mungkin juga ada untuk keadaan ekstrim, yaitu saat masing-masing subsistem tak stabil.

B. KESTABILAN

Sistem persamaan diferensial outonom hadir dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2.1)$$

dengan x adalah fungsi yang tak diketahui dalam t dan f adalah fungsi dalam x. Terdapat titik (orbit) dari sistem ini yang mempunyai peran yang sangat penting dalam studi kualitatif dari sistem persamaan dieferensial. Titik ini disebut sebagai titik kesetimbangan.

Definisi 2.1 [3]**:** Sebuah titik $\bar{x} \in \Re$ disebut sebagai *titik kesetimbangan* (titik kritis) dari sistem (2.1) jika $f(\bar{x}) = \mathbf{0}$.

Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem (2.1) dikatakan stabil jika setiap diberikan nilai awal yang dekat dengan $\bar{x}$ maka solusi sistem tetap dekat dengan $\bar{x}$, selanjutnya jika solusi ini menuju $\bar{x}$ saat t menuju tak hingga maka $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotis.

Definisi 2.2 [3]**:** Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem (2.1) dikatakan *stabil* jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, solusi φ (t, x_0) dari sistem (2.1) memenuhi $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Jika tidak demikian maka *tidak stabil*.

Definisi 2.3 [1]**:** Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem (2.1) dikatakan *stabil asimtotis* jika titik ini stabil dan terdapat $r > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < r$ berlaku $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \to 0$ saat $t \to +\infty$.

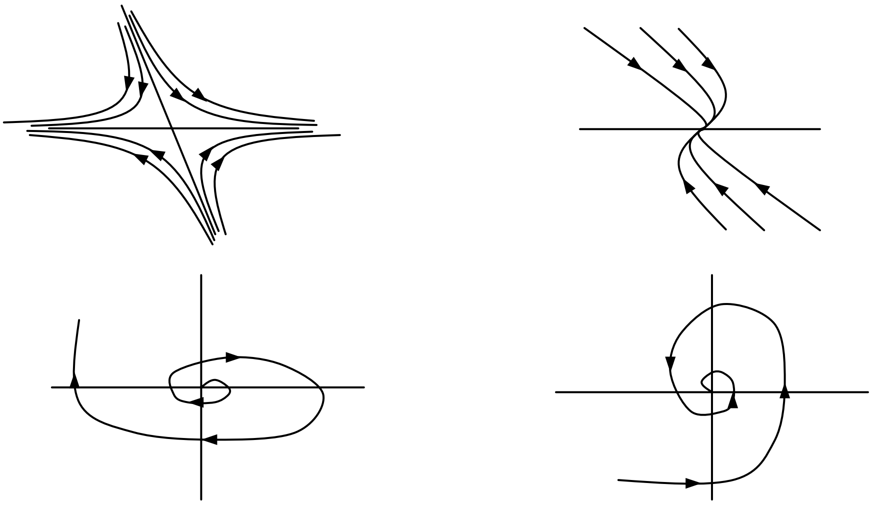
Jika setiap fungsi f dari (2.1) merupakan fungsi linier maka sistem (2.1) merupakan sistem linier dan dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax. \qquad (2.2)$$

Kestabilan dari sistem (2.2) dapat ditentukan hanya dengan mencari nilai eigennya.

Teorema 2.4 [1]**:** Jika semua nilai eigen dari matriks koefisien A pada sistem 2.2 mempunyai bagian real yang bernilai negatif maka titik kesetimbangan $\bar{x} = \mathbf{0}$ stabil asimtotis.

Secara khusus, kestabilan untuk sistem dua dimensi dapat dilihat melalui potret fasenya pada bidang. *Potret Fase* adalah gambar kurva-kurva solusi dengan indikasi arah untuk waktu yang semakin besar [4]. Potret fase merupakan gambar semua kurva solusi, namun sebenarnya yang diperlukan bukanlah gambar solusi secara keseluruhan tetapi hanya gambar trayektori yang mewakili. Gambar 2.1 menyajikan beberapa contoh potret fase yang stabil dan tak stabil.



a. **b.**

Gambar 2.1. (a) Potret fase dari sistem tak stabil
(b) Potret fase dari sistem stabil

Berikut ini juga diberikan definisi suatu fungsi definit positif bernilai real yang turun sepanjang trayektori yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan. Fungsi ini disebut sebagai fungsi Liapunov. Ide dasar dibalik metode Liapunov adalah menentukan bagaimana suatu fungsi bernilai real tertentu berubah sepanjang solusi sistem (2.1). Mari kita mulai mendefinisikan fungsi ini.

Misalkan C^1 melambangkan himpunan semua fungsi terdiferensial yang turunan pertamanya kontinu. Untuk mudahnya maka fungsi yang merupakan anggota dari himpunan C^1 disebut sebagai fungsi C^1.

Definisi 2.5 [1]**:** Misalkan U subset terbuka dari $\Re^2$ yang memuat titik asal. Sebuah fungsi C^1 bernilai real

$$V : U \to \Re; \quad x \mapsto V(x)$$

Dikatakan *definit positif* pada U jika

(i) $V(\mathbf{0}) = 0$;

(ii) $V(x) > 0$ untuk semua $x \in U$ dengan $x \neq \mathbf{0}$.

fungsi C^1 bernilai real V dikatakan *definit negatif* jika $-V$ definit positif.

Teorema 2.6 [1]**:** Misalkan $\bar{x} = \mathbf{0}$ adalah titik kesetimbangan dari sistem (2.1) dan V adalah fungsi C^1 definit positif pada persekitaran U dari $\mathbf{0}$.

(i) Jika $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk $x \in U - \{\mathbf{0}\}$ maka $\bar{x}$ stabil

(ii) Jika $\dot{V}(x) < 0$ untuk $x \in U - \{\mathbf{0}\}$ maka $\bar{x}$ stabil asimtotis

(iii) Jika $\dot{V}(x) \geq 0$ untuk $x \in U - \{\mathbf{0}\}$ maka $\bar{x}$ tak stabil.

Berikut adalah teorema Liapunov mengenai kestabilan pada sistem linier.

Teorema 2.7 [2]**:** Sistem (2.2) *stabil* jika dan hanya jika setiap diberikan matrik definit positif Q terdapat matrik definit positif P yang memenuhi

$$A^T P + P A = -Q.$$

C. PEMBAHASAN

Dalam sistem hibrid terdapat subsistem yang kontinu dan diskrit terhadap waktu yang diproses menggunakan suatu pembuat keputusan logis. Subsistem yang kontinu/diskrit hadir dalam bentuk persamaan diferensial/persamaan diferensi. Komponen pengambilan keputusan logis dapat berupa automata berhingga (finite automaton) maupun sistem kejadian diskrit yang lebih umum. Proses kontinu/diskrit berpengaruh terhadap pembuat keputusan logis dan pembuat keputusan logis berpengaruh pada gerak dinamik dari proses kontinu/diskritnya. Secara formal, sistem hibrid didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1: Sistem hybrid mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), m(t)) \\ m(t^+) &= \phi(x(t), m(t)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan $x \in \Re^N$, m disebut sebagai fungsi tukar dengan $m \in M = \{m_1, m_2, ..., m_N,\}$, dan masing-masing $m_i = [m_{i,1} \cdots m_{i,d}]^T \in \Re^d$. Variabel x bersifat kontinu sedangkan m bersifat diskrit. Masing-masing fungsi $f(x, \text{-})$ merupakan fungsi yang kontinu terdiferensial dan bentuk $m(t^+)$ berarti nilai m sesudah $m(t)$.

Perlu diketahui bahwa sistem (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{x}(t) = f_m(x(t)),\ m \in \{1, \cdots N\} \tag{3.2}$$

dengan $x(t) \in \Re^N$. Sedangkan jika untuk sistem hibrid linier maka masing-masing fungsi f_m merupakan fungsi linier. Sehingga sistem (3.2) menjadi

$$\dot{x}(t) = A_m(x(t)),\ m \in \{1, \cdots N\}$$

dengan $x(t) \in \Re^N$.

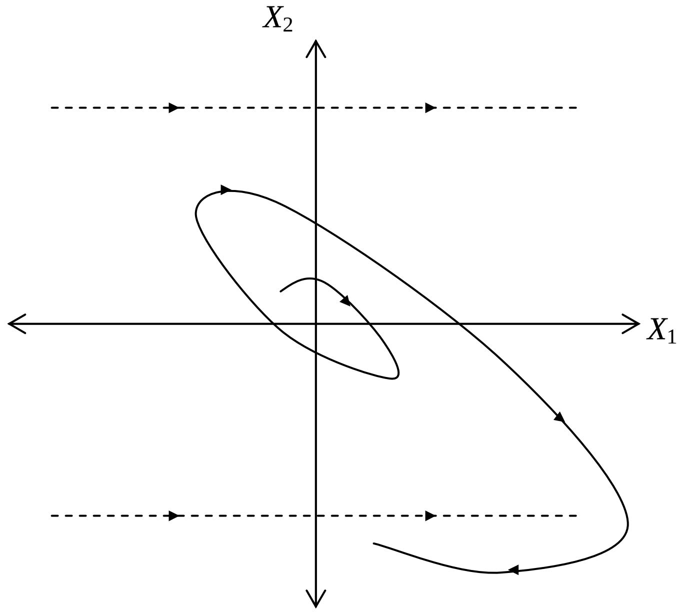
Berikut ini diberikan 2 buah contoh sistem hibrid linier dan kemudian ditinjau trayektorinya.

Contoh 3.1: Diberikan sistem hibrid $\dot{x}(t) = A_m x$ dengan $x = [x_1, x_2]^T \in \Re^2$, $m \in \{1, 2\}$, dan

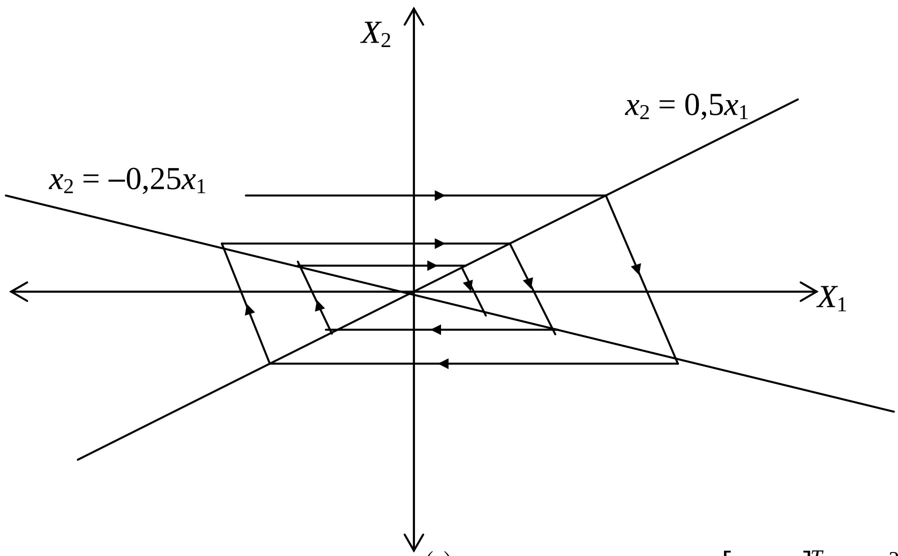
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ A_2 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2 \\ -2 & -0{,}5 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$m(t^+) = \begin{cases} 1, & jika\ m(t) = 2\ dan\ x_2(t) = -0{,}25 x_1(t) \\ 2, & jika\ m(t) = 1\ dan\ x_2(t) = 0{,}5 x_1(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

Sistem (3.3) yaitu $\dot{x}(t) = A_1 x$ dan $\dot{x}(t) = A_2 x$ keduanya tak stabil, A_1 mempunyai nilai eigen 0 dan A_2 mempunyai nilai eigen $0{,}5 \pm i\sqrt{3}$. Potret fase dari masing-masing sistem dapat dilihat pada Gambar 3.1. Jika sistem (3.3) digabungkan dengan menggunakan fungsi tukar (3.2) maka diperoleh trayektori yang stabil (Gambar 3.2).



Gambar 3.1. Garis putus-putus adalah potret fase untuk $\dot{x}(t) = A_1 x$ dan garis tegas adalah potret fase untuk $\dot{x}(t) = A_2 x$



Gambar 3.2. Trayektori Gabungan Sistem $\dot{x}(t) = A_m x$ dengan Fungsi Tukar p

Contoh 3.2: Diberikan sistem hibrid $\dot{x}(t) = A_m x$ dengan $x = [x_1, x_2]^T \in \Re^2$

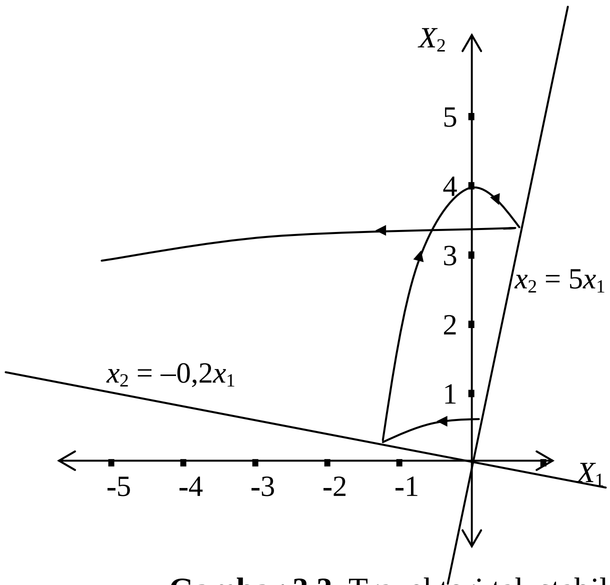
$m \in \{1, 2\}$, dan

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Sistem (3.5) yaitu $\dot{x}(t) = A_1 x$ dan $\dot{x}(t) = A_2 x$ keduanya stabil, karena mempunyai nilai eigen $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{1000}$. Didefinisikan sebuah fungsi tukar $m(t)$ sebagai berikut

$$m(t^+) = \begin{cases} 1, & jika\ m(t) = 2\ dan\ x_2(t) = -\frac{1}{k}x_1(t) \\ 2, & jika\ m(t) = 1\ dan\ x_2(t) = kx_1(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

Jika persamaan (3.6) digunakan sebagai fungsi tukar dari sistem (3.5) dengan $k = -0{,}2$ dan $x(0) \neq 0$ maka trayektori dari sistem hibrid (3.5) (3.6) menuju ke ∞ (lihat gambar 3.3).



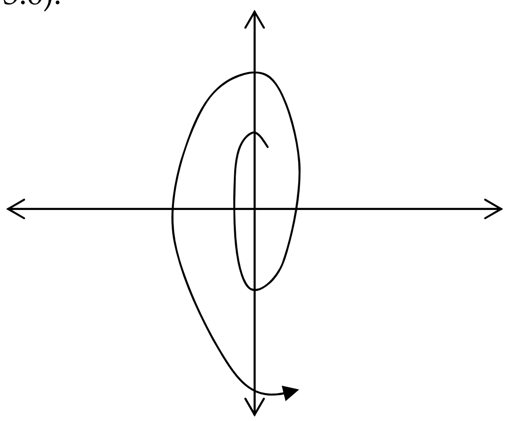
Gambar 3.3. Trayektori tak stabil

Pada contoh 3.1 terlihat bahwa pertukaran antara dua sistem yang tak stabil dapat menghasilkan sistem yang stabil asimtotis, sedangkan pada contoh 3.2 terjadi sebaliknya, yaitu pertukaran antara dua sistem yang stabil dapat menghasilkan sistem yang tak stabil. Hal ini berarti kestabilan masing-masing subsistem tidak menjamin kestabilan sistem hibridnya. Sehingga yang berpengaruh untuk menentukan kestabilan dari sistem hibrid diantaranya adalah fungsi penukarnya.

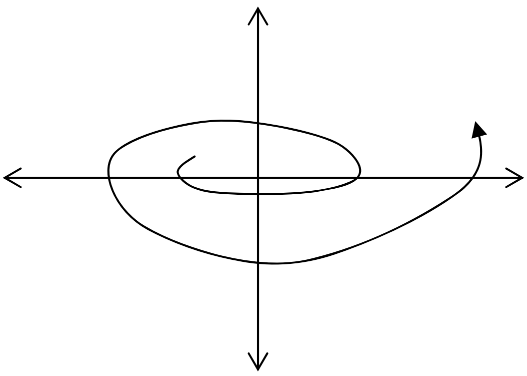
Fungsi Tukar Penstabil

Fungsi tukar dapat menjadikan sistem hibrid tak stabil maka perlu diketahui bagaimana menentukan fungsi tukarnya sehingga sistem hibrid yang terbentuk stabil asimtotis. Fungsi tukar penstabil ini mungkin juga ada untuk keadaan ekstrim, yaitu saat masing-masing subsistem tak stabil.

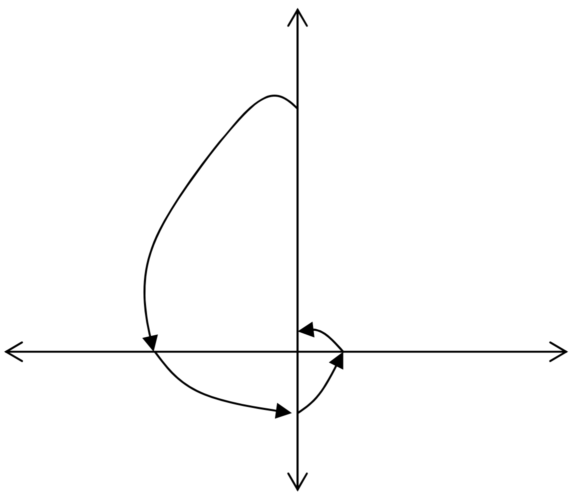
Contoh 3.3: Diberikan dua sistem linier orde 2 yang masing-masing tak stabil. Trayektori dari masing-masing sistem dapat dilihat pada gambar 3.4. dan 3.5. Jika kedua sistem ini ditukarkan sedemikian hingga sistem pertama aktif pada kuadran kedua dan keempat sedangkan sistem kedua aktif pada kuadran pertama dan ketiga maka akan diperoleh sistem yang stabil asimtotis (gambar 3.6).



Gambar 3.4



Gambar 3.5



Gambar 3.6. Trayektori Hasil Pertukaran 2 Sistem yang Tak Stabil

Pada contoh 3.3 dapat dilihat bahwa pertukaran dari dua sistem yang masing-masing tak stabil menghasilkan sebuah sistem hibrid yang stabil dengan menggunakan fungsi tukar yang sesuai.

Diberikan dua sistem linier yaitu

$$\dot{x} = A_1 x \qquad (3.7)$$

$$\dot{x} = A_2 x . \qquad (3.8)$$

dan sebuah fungsi tukar $m \in M = \{1, 2\}$. Didefinisikan *matrik konvek kombinasi* $\gamma_\alpha(A_1, A_2) = \alpha\, A_1 + (1 - \alpha)\, A_2$ dengan $\alpha \in [0, 1]$. Pertukaran antara sistem (3.7) dengan (3.8) dapat menghasilkan sistem hibrid yang stabil jika terdapat matrik konvek kombinasi $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ yang stabil. Hal ini sesuai dengan teorema berikut.

Teorema 3.2: Jika terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ stabil maka terdapat fungsi tukar $m \in M = \{1, 2\}$ sedemikian sehingga sistem hibrid hasil pertukaran antara sistem (3.7) dan (3.8) stabil.

Bukti:

Sebut $A = \gamma_\alpha(A_1, A_2)$, karena terdapat matrik konvek kombinasi yang stabil, maka terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik $A = \alpha\, A_1 + (1-\alpha)\, A_2$ stabil (nilai $\alpha \neq 0$ dan $\alpha \neq 1$ karena dimungkinkan ada A_1 atau A_2 yang tak stabil). Dengan demikian, maka terdapat matrik definit positif P dan Q sehingga

$$A^T P + P\, A = -Q \qquad (3.9)$$

Jika persamaan (3.9) dijabarkan maka diperoleh

$$\alpha\, (A_1{}^T P + P\, A_1) + (1 - \alpha\,)\, (A_2{}^T P + P\, A_2) = -Q$$

dengan mengalikan x^T dan x pada kedua ruas maka $\forall\, x \in \Re^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ diperoleh

$$\alpha\, x^T (A_1{}^T P + P\, A_1)\, x + (1 - \alpha\,)\, x^T (A_2{}^T P + P\, A_2)\, x = -\, x^T Q\, x < 0.$$

Karena $0 < \alpha < 1$ maka untuk setiap $x \in \Re^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ paling tidak terdapat salah satu nilai dari $x^T (A_1{}^T P + P\, A_1)\, x$ dan $x^T (A_2{}^T P + P\, A_2)\, x$ yang negatif dan karena A stabil maka $\Re^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ dapat diwakili oleh gabungan dua daerah kerucut terbuka $\Omega_1 = \{x: x^T (A_1^{\,T} P + P A_1)\, x < 0\}$ dan $\Omega_2 = \{x: x^T (A_2^{\,T} P + P A_2)\, x < 0\}$. Sehingga terdapat fungsi $V(x) = x^T P x$ yang menurun sepanjang solusi dari sistem (3.7) dalam daerah Ω_1 dan menurun sepanjang solusi dari sistem (3.8) dalam daerah Ω_2.

□

Dengan menggunakan sifat ini maka hal ini menjadi mungkin untuk mengkonstruksi fungsi tukar sehingga V menurun sepanjang solusi dari sistem hibrid yang artinya bahwa sistem yang dihasilkan stabil jika terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ stabil.

D. KESIMPULAN

Kestabilan masing-masing subsistem tidak menjamin kestabilan sistem hibridnya. Sehingga untuk membuat suatu sistem hibrid yang stabil hal yang dapat dilakukan diantaranya adalah dengan menentukan fungsi tukar penstabilnya. Fungsi tukar penstabil ini mungkin juga ada untuk keadaan ekstrim, yaitu saat masing-masing subsistem tak stabil. Pengkonstruksian fungsi tukar penstabil sistem dapat dilakukan jika terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik konvek kombinasi $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ stabil.

E. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Hale, J.K. dan Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag, Inc.

[2]. Kailath, T. (1980). *Linear Sistems*. Englewood Cliff NJ: Prentice-Hall, Inc.

[3]. Olsder, G.J. (1994). *Mathematical Systems Theory*. First Edition. Delft: Delftse Uitgevers Maatschappij.

[4]. Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Second Edition. Boca Raton Florida: CRC Press.
[5]. http://www.fueleconomy.gov/feg/hybrid_sbs_cars.shtml diakses pada tanggal 20 Juni 2006.

[6]. http://www.howstuffworks.com/hybrid-car.htm diakses pada tanggal 3 Juli 2006.
[7]. http://www.poweronline.com/cotent/news/article.asp diakses pada tanggal 3 Juli 2006.