Prediksi Kelainan Refraksi Berdasarkan Panjang Sumbu Bola Mata Pada Pasien *Myopia Axial* Melalui Regresi *Bootstrap*

Oleh: Kariyam dan Qoirlina
Statistika UII

ABSTRAKSI

Penelitian ini dilakukan di Rumah Sakit Mata 'Dr. YAP' Yogyakarta dengan tujuan untuk mendapatkan model yang baik dalam mencari hubungan antara panjang sumbu bola mata dan besarnya kelainan refraksi pada pasien *myopia axial.* Analisis ini lebih lanjut digunakan sebagai dasar dalam pertimbangan penentuan tindak lanjut pasien yang mempunyai kelainan panjang sumbu bola mata. Data yang digunakan adalah data sekunder, yaitu data panjang sumbu bola mata dan kelainan refraksi pasien myopia axial tahun 2003-2006. Analisis statistik yang digunakan adalah analisis regresi bootstrap dengan dua prosedur resampling yaitu resampling pada residual dan resampling pada pasangan data. Berdasarkan hasil analisis diperoleh bahwa metode regresi bootstrap residual menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik.

Kata Kunci : Regresi, *Bootstrap* residual, *Bootstrap* pasangan

1. PENDAHULUAN

Penyakit mata banyak kita temui dari penyakit ringan, sedang, maupun berat yang berakibat hilangnya penglihatan atau terjadi kebutaan. Salah satu penyakit mata adalah kelainan refraksi. Kelainan refraksi ini terjadi apabila cahaya tidak dibiaskan sebagaimana mestinya sehingga gambaran yang terbentuk terlihat kabur. Kelainan refraksi mempunyai banyak jenis, antara lain *myopia, hiperopia, astigmata*, dan *presbiopi*. *Myopia* merupakan kelainan refraksi yang relatif banyak menyebabkan gangguan penglihatan, *myopia* juga merupakan salah satu dari lima besar penyebab kebutaan. *Myopia* mempunyai beberapa bentuk atau tipe yang beragam, salah satunya adalah *Myopia Axial*. *Myopia Axial* terjadi akibat bertambah panjangnya sumbu bola mata (diameter *Antero-posterior*) dari normal.

Myopia Axial yang akan diteliti adalah *myopia* yang mempunyai kategori tinggi dimana *myopia* lebih besar dari 6 dioptri. Pada kondisi ini sangat jarang

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema "**Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT**" yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

kita temui orang yang menderita, atau hanya delapan pasien yang menderita dalam kurun waktu tahun 2003-2006.

Dengan populasi yang kecil ini timbul gagasan untuk menganalisis hubungan antara panjang sumbu bola mata terhadap besarnya kelainan refraksi, menggunakan analisis regresi *bootstrap*, karena dengan populasi yang kecil kita sulit untuk mengetahui tingkat akurasi statistik yang digunakan. Pada data panjang sumbu bola mata dan kelainan refraksi juga belum terdapat asumsi apapun mengenai distribusi datanya, sehingga ini menjadi salah satu alasan dalam penggunaan *bootstrap*. Sebab bootstrap mempunyai salah satu keunggulan bahwa metode ini dapat digunakan ketika bentuk distribusi populasi yang dimiliki tidak diketahui atau tidak mengasumsikan apapun mengenai distribusi populasinya.

Analisis regresi *bootstrap* dapat dilakukan dengan dua metode resampling, yakni metode *bootstrap* residual atau sampling dari n residual, maupun dapat juga dilakukan dengan *bootstrap* pasangan data aslinya.

Berdasarkan latar belakang di atas maka **permasalahan** yang akan diteliti dalam tulisan ini adalah bagaimana model yang paling baik untuk menyatakan hubungan antara panjang sumbu bola mata dengan kelainan refraksi.

Data yang digunakan adalah data pasien penderita *Myopia Axial* Rumah Sakit Mata "Dr. YAP" Yogyakarta tahun 2003-2006. Variabel yang digunakan sebatas pada variabel panjang sumbu bola mata

Tujuan dan manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model yang baik untuk menyatakan hubungan antara panjang sumbu bola mata dengan kelainan refraksi.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan adalah panjang axial bola mata dan kelainan refraksi pasien *Myopia Axial* dengan kategori tinggi. Untuk keperluan analisis, penelitian ini bersumber dari data sekunder yang diperoleh dari bagian Rekam Medis Rumah Sakit Mata 'Dr. YAP' Yogyakarta. Data sekunder yang digunakan meliputi data panjang axial bola mata dan besarnya kelainan refraksi pasien.

2.2 Teknik Analisis

Regresi Bootstrap

Analisis regresi adalah suatu analisis statistik yang memanfaatkan hubungan antara dua variabel atau lebih. Variabel yang digunakan terdiri dari variabel respon atau dependen (*Y*) dan variabel prediktor atau independen (*X*). Jika analisis regresi dilakukan untuk satu variabel dependen dan satu variabel independen dinamakan regresi sederhana. Model regresi linier sederhana dapat dinyatakan dengan model berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \text{untuk i = 1, 2,……,n}$$

dimana :

Y_i : variabel respon

β_0, β_1 : parameter model

X_i : variabel prediktor

ε_i : residual model

Alternatif untuk mengestimasi estimasi parameter dalam model regresi linier dapat digunakan metode komputasi yakni *bootstraping linier regresion* model. *Bootstrap* juga dapat digunakan untuk mengestimasi tingkat keakurasian statistik penduga dari parameter regresi.

Metode *bootstrap* adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah kestabilan dan keakurasian. Istilah *bootstrap* berasal dari "*pull oneself up by one's bootstrap*" (Efron and Tibshirani, 1993) yang berarti berpijak diatas kaki sendiri, berusaha dengan sumber yang minimal. Dalam sudut pandang statistik, sumber daya yang minimal adalah data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya.

Prinsip dalam *bootstrap* adalah bahwa kita memperkirakan parameter untuk masing-masing sampel yang diperoleh dengan mengambil sampel berukuran n dari nilai-nilai data asli, sampel ini merupakan sampel acak dengan pengembalian.

Maksudnya, dalam sampel *bootstrap* beberapa nilai asli kita akan menjadi berulang, dan beberapa diantaranya tidak akan terjadi sama sekali. Sampel yang dibangkitkan ini bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter yang mendekati nilai yang sebenarnya. Jumlah iterasi yang mungkin dibangkitkan adalah maksimal n^n sampel random. Dalam konteks regresi, resampling *bootstrap* yang dapat digunakan antara lain :

a. *Bootstrap* residual

   Yaitu metode *bootstrap* yang dilakukan untuk memperoleh model regresi dengan estimasi parameter dari residualnya.

b. *Bootstrap* pasangan data

   Adalah metode *bootstrap* untuk memperoleh estimasi parameter terbaik yang dibangkitkan dari pasangan data.

2.2.1 *Bootstrap* Residual

Model regresi dinyatakan dalam model $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, dimana β_0 dan β_1 merupakan parameter dan ε adalah *error* atau residual. Residual ini diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata 0 (nol) dan standar deviasi tertentu ($\varepsilon \sim N(0, \sigma)$). Sampling dilakukan dengan pengembalian dengan jumlah iterasi maksimal n^n.

Prosedur *bootstrap* residual dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Konstruksi sampel dari residual secara random dengan probabilitas 1/n. Hasil random ini digunakan untuk mendapatkan nilai taksiran $Y*$ yang baru.

b. Penentuan Y* didapat dari model

$$Y* = \hat{y} + e*$$

Dimana Y* merupakan nilai variabel respon dalam *bootstrap* residual, $\hat{y}$ adalah nilai taksiran model yang dicari dengan metode kuadrat terkecil. Sedangkan *error* e* merupakan resampling dari residual populasinya (ε) yang dihasilkan dari $e = y - \hat{y}$.

c. Selanjutnya adalah mengkonstruksikan data menjadi X_i dan Y_i^*. Dari data inilah kita dapat mengetahui estimasi parameternya yaitu untuk b_0* dan b_1*.

d. Untuk menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik atau mendekati nilai sebenarnya, ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak B kali, dengan jumlah iterasi yang mungkin dibangkitkan adalah maksimal n^n sampel random residualnya.

2.2.2 *Bootstrap* Pasangan Data

Metode bootstrap pasangan data adalah metode resampling bootstrap untuk memperoleh estimasi parameter yang dibangkitkan dari pasangan data (Y_i, X_i). Resampling dilakukan dengan pengembalian.

Prosedur pembentukan resampling *bootstrap* pasangan data adalah sebagai berikut :

a. Konstruksikan sampel dari data berpasangan (Y_i, X_i) secara random dengan probabilitas 1/n. Data ini merupakan data asli dari observasi.
b. Misal data hasil random tersebut dinyatakan dalam (Y**,X**), sehingga didapat model regresi $Y^{**} = X^{**}\beta + \varepsilon$.
c. Dari model tersebut kita akan mencari estimasi parameter β, yakni dengan nilai taksiran parameter b_0^{**} dan b_1^{**}
d. Untuk menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik atau mendekati nilai sebenarnya, ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak B kali.

Estimasi *bootstrap* untuk standar *error* adalah mengestimasi standar error dari parameter yang didapat dari standar deviasi empiris dari pengulangan *bootstrap*. Hasil dinotasikan dengan se_B, dimana B adalah banyaknya pengulangan atau iterasi sampel *bootstrap* yang digunakan. Berikut adalah estimasi standar error yang didapat dari sampel *bootstrap* untuk $x^{*1}, x^{*2}, \ldots, x^{*B}$ yang menghasilkan standar deviasi $s(x^{*b})$ yaitu :

$$\hat{se}_B = \left\{ \sum_{b=1}^{B} \frac{\left(s(x^{*b}) - B(\bar{s})\right)^2}{B-1} \right\}^{1/2}$$

3. PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data pasien penderita *myopia* dengan kategori tinggi dalam kurun waktu tahun 2003-2006.

Tabel 1. Panjang sumbu bola mata (X) dan kelainan refraksi (Y) penderita *myopia aksial* tahun 2003-2006

No.	Panjang sumbu bola mata (X) (mm)	Kelainan refraksi (Y) (dioptri)
1.	27.87	-12
2.	27.89	-12

3.	29.10	-15
4.	29.34	-15
5.	30.63	-16
6.	30.79	-18
7.	30.88	-18
8.	31.05	-20

Sumber : RS. 'Dr. Yap' Yogyakarta

Dengan metode kuadrat terkecil, dari data diatas diperoleh taksiran model sebagai berikut :

$\hat{y}_i = -45.3 + 2.06x_i$ untuk i=1, 2, …, 8

Dari model ini didapat nilai residual sebagai berikut :

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ untuk i=1, 2, …, 8

dimana $\hat{y}_i$ adalah fitted (nilai taksiran variabel respon).

a. *Bootstrap* Residual

Analisis *bootsrap* residual dapat dilakukan dengan bantuan program pada lampiran A. Untuk mendapatkan nilai estimasi yang lebih baik dapat dilakukan dengan menambah jumlah iterasinya. Dalam laporan penelitian ini dilakukan sampai dua puluh ribu iterasi yang ditampilkan pada tabel 2.

Hasil iterasi pada tabel 2 menunjukkan bahwa parameter model mulai 5000 iterasi memberikan hasil yang konstan. Sehingga dapat dikatakan bahwa penduga parameter *bootstrap* sudah konsisten.

Tabel 2. Hasil iterasi *bootstrap* residual

iterasi	*bootstrap* rata-rata		*bootstrap* standar error	
	bo*	b_1*	bo*	b1*
10	-44.079	2.014	9.512	0.319
30	-47.11	2.118	7.718	0.259
50	-44.459	2.03	7.247	0.245
100	-46.116	2.084	6.385	0.214

500	-44.946	2.045	6.788	0.228
1000	-45.18	2.052	6.828	0.229
5000	-45.293	2.056	6.84	0.23
10000	-45.277	2.055	6.861	0.231
15000	-45.299	2.056	6.743	0.227
20000	-45.233	2.054	6.873	0.231

b. *Bootstrap* Pasangan Data

Estimasi *bootstrap* pasangan data dapat dilakukan dengan bantuan program pada lampiran B. Untuk mendapatkan estimasi parameter yang lebih baik, dilakukan dengan menambah jumlah iterasi. Dalam penelitian ini iterasi dilakukan sampai 20000 iterasi.

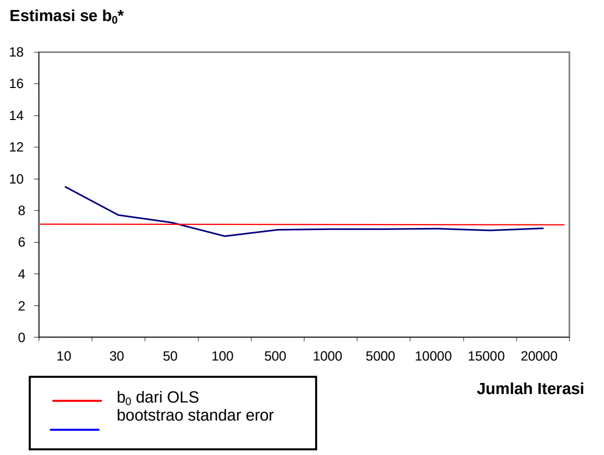
Tabel 3. Hasil iterasi *bootstrap* pasangan data

iterasi	*bootstrap* average		*bootstrap* standard error	
	b_0**	b_1**	b_0**	b_1**
10	-46.419	2.1932	5.771	0.199
30	-44.013	22.013	6.268	0.218
50	-44.246	2.018	8.663	0.297
100	-45.132	2.051	6.499	0.227
500	-44.669	2.034	7.022	0.244
1000	-45.429	2.059	1.099	0.37
5000	-45.958	2.077	16.624	0.546
10000	-45.763	2.07	15.549	0.513
15000	-45.763	2.071	15.295	0.504
20000	-45.748	2.069	15.191	0.5

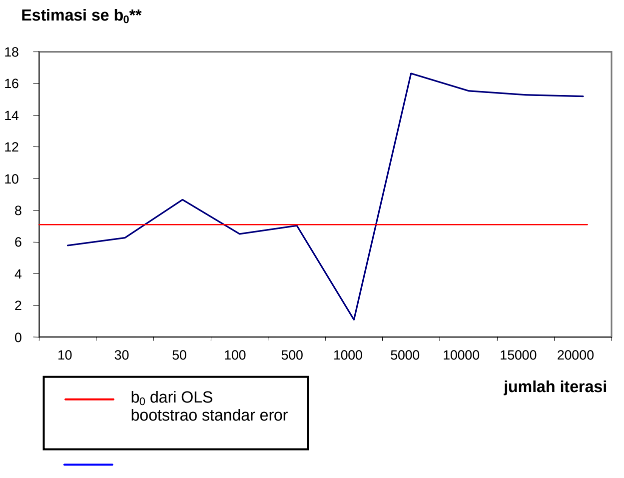
Hasil iterasi pada tabel 3 menunjukkan bahwa parameter model mulai 5000 iterasi memberikan hasil yang konstan. Sehingga dapat dikatakan bahwa penduga parameter *bootstrap* sudah konsisten.

c. Perbandingan Hasil antara *Bootstrap* Residual dan *Bootstrap* Pasangan Data

Untuk melihat seberapa baik estimasi parameter *bootstrap* dapat mendekati parameter yang sebenarnya, dapat ditunjukkan beberapa gambar berikut:

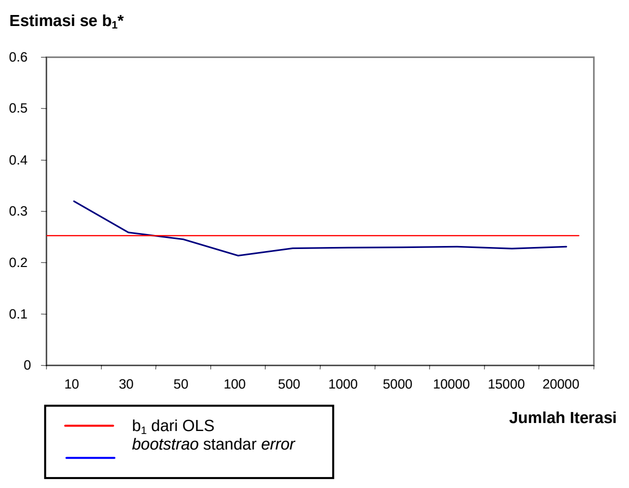


Gambar 1. Estimasi standar eror b_0 dari *bootstrap* residual

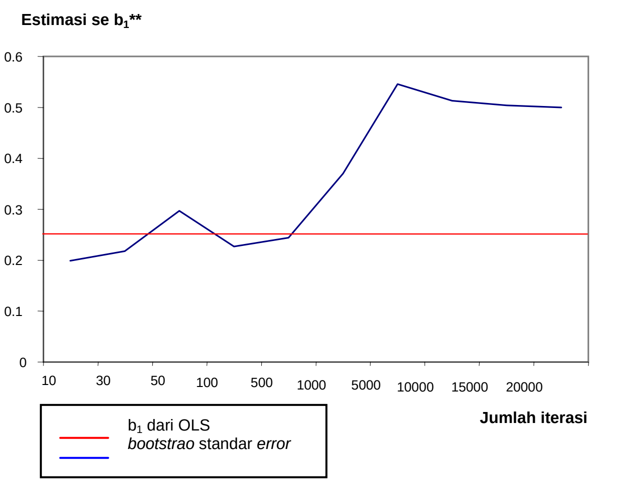


Gambar 2. Estimasi standar eror b_0 dari *bootstrap* pasangan data

Estimasi standar *error* parameter b_o dari *bootstrap* residual pada gambar 1 menunjukkan bahwa standar *error* konstan mulai iterasi ke 5000 dan mendekati nilai b_o dengan OLS. Sedangkan estimasi standar *error* b_o dari *bootstrap* pasangan data pada gambar 2 konstan mulai iterasi ke 10000 dan nilai lebih jauh dari b_o dengan OLS.



Gambar 3. Estimasi standar eror b_1 dari *bootstrap* residual



Gambar 4. Estimasi standar eror b_1 dari *bootstrap* pasangan data

Estimasi standar *error* parameter b_1 dari *bootstrap* residual pada gambar 3 menunjukkan bahwa standar *error* konstan mulai iterasi ke 5000 dan mendekati nilai b_1 dengan OLS. Sedangkan estimasi standar *error* b_1 dari *bootstrap* pasangan data pada gambar 4 konstan mulai iterasi ke 10000 dan nilai lebih jauh dari b_0 dengan OLS.

Berdasarkan hasil pada gambar 1, gambar 2, gambar 3, dan gambar 4 maka estimasi model regresi diambil dari *bootstrap* residual yang memberikan standar *error* terkecil pada posisi konstan yaitu pada jumlah iterasi 15000 dengan model sebagai berikut :

$$Y_i = -45.299+2.056X_i$$

4. SIMPULAN DAN SARAN

Regresi *bootstrap* residual menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik daripada estimasi parameter *bootstrap* pasangan data untuk kasus prediksi kelainan refraksi berdasarkan panjang sumbu bola mata pada pasien *myopia axial* dengan model regresi sebagai berikut :

$$Y_i = -45.299+2.056X_i$$

Adapun saran yang dapat disampaikan adalah perlu diteliti lebih lanjut variabel lain yang berpengaruh terhadap kelainan refraksi.

5. DAFTAR PUSTAKA

Draper, Norman R., dan Harry Smith. 1998. *Applied Regression Analysis*. USA : John Wiley, Inc.

Efron, B., and R. Tibshirani. 1993. *Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall

Ilyas, Sidarta. 2001. *Ilmu Penyakit Mata*. Jakarta : Fakultas Kedokteran UI

Iriawan, Nur, Septin Puji Astuti. 2006. *Mengolah Data Statistik Dengan Mudah Menggunakan Minitab 14*. Yogyakarta : Andi Offset

Qoirlina. 2006. *Perbandingan Antara Regresi Bootstrap Residual dengan Regresi Bootstrap Pasangan Data.* Jogjakarta : Fakultas MIPA UII

Soejoeti, Z. 1986. *Metode Statistika II*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Universitas Terbuka.

Walpole, Ronald, dan Raymond H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi Keempat. Bandung : ITB

LAMPIRAN A

Program untuk Bootstrap Residual

PROGRAM UTAMA

```
#res
let k1=1                          # banyaknya variabel
let k2=8                          # jumlah data
let k10=10                        # jumlah iterasi
let k20=1
let c9=0
let c10=0
name c4 'fitted'
name c5 'resids'
name c7 'Y*'
noecho
print k2
print k10
regress c1 1 c2 c5 c4;        # fungsi regresi
residualS c5.                 # nilai residual
name c5 'resids'
name c4 'fitted'
print c2 c1 c4 c5
exec 'G:\res1.mtb' k10            # memanggil subprogram1
let c11=c9/k10                    # bootstrap rata-rata
```

```
let c12=(c10-k10*c11**2)/(k10-1)    # rumus standar error kuadrat
let c13=sqrt(c12)                   # standar error
print c8-c13
end
stop
```

SUBPROGRAM I

```
#res1
random k2 c6;                       # hasil random data
integer k1 k2.
print k20
print c6
let k3=1
exec 'G:\res2.mtb' k2               # memanggil subprogram 2
noecho
print 'Y*' 'X'
regress 'Y*' 1 'X';                 # fungsi regresi
coeff c8.                           # nilai koefisien
let c9=c9+c8                        # nilai koefisien
let c10=c10+c8**2                   # koefisien regresi kuadrat
let k20=k20+1
end
```

SUBPROGRAM II

```
#res2
let k4=c6(k3)
let c7(k3)=c4(k3)+c5(k4)          # nilai Y*
let k3=k3+1
end
```

LAMPIRAN B

Program untuk Bootstrap Pasangan Data

PROGRAM UTAMA

```
#pairs
let k1=1                          # banyaknya variabel
let k2=8                          # jumlah data
let k10=5                         # jumlah iterasi
let k20=1
let c9=0
let c10=0
name c4 'Y*'
name c5 'X*'
noecho
print k2
print k10
regress c1 1 c2                   #fungsi regresi
print c1 c2
```

```
exec 'G:\pairs1.mtb' k10              # memanggil subprogram 1
let c11=c9/k10                               # bootstrap rata-rata
let
c12=(c10-k10*c11**2)/(k10-1)          # rumus standar error kuadrat
let c13=sqrt(c12)                            # standar error
print c8-c13
end
stop
```

SUBPROGRAM I

```
#pairs1
random k2 c6;                                # hasil random data
integer k1 k2.
print k20
print c6
let k3=1
exec 'G:\pairs2.mtb' k2                      # memanggil subprogram 2
noecho
print 'Y*' 'X*'
regress 'Y*' 1 'X*';                  # fungsi regresi
coeff c8.                                    # koefisien regresi
let c9=c9+c8                          # koefisien regresi
let c10=c10+c8**2                            # koefisien regresi kuadrat
let k20=k20+1
end
```

SUBPROGRAM II

```
#pairs2
let k4=c6(k3)
let c4(k3)=c1(k4)                # nilai Y*
let c5(k3)=c2(k4)                # nilai X*
let k3=k3+1
end
```