

Kajian Matematis Dua Sinar Sebidang

ABSTRAK

Oleh : Maman Fathurrohman, dkk

Dua sinar sebidang yang tidak sejajar dimungkinkan untuk saling berpotongan. Ketika hal itu terjadi maka masing-masing sinar akan memiliki panjang sinar saat bertemu. Ada dua hal yang mempengaruhi besaran panjang sinar saat bertemu (L) yaitu jarak antara kedua sumber sinar (R) dan bentuk pertemuan kedua sinar tersebut. Karena L sebanding dengan R , dan L dipengaruhi oleh bentuk pertemuan kedua sinar, maka apabila bentuk pertemuan ditransformasikan dalam suatu nilai tertentu yang disebut Nilai Bentuk Pertemuan (NBP), secara umum akan terjadi persamaan yang menghubungkan ketiga nilai tersebut. Permasalahannya belum diketahui persamaan seperti apa yang menghubungkan antara panjang sinar saat bertemu (L), jarak antara kedua sumber sinar (R), dan Nilai Bentuk Pertemuan (NBP) tersebut.

Metode kajian yang digunakan adalah studi literatur dan kajian secara matematis terhadap sketsa pertemuan kedua sumber sinar yang dimaksud. Kemudian itu dilanjutkan dengan pembahasan memanfaatkan pengetahuan yang diperoleh, secara teoretis maupun aplikatif termasuk sebagai dasar pengetahuan proses komputasi.

Hasil kajian menunjukkan bahwa hubungan antara L , R , dan NBP adalah sebagai berikut :

$$L_a = V_{a \rightarrow b} \cdot R \quad \text{dan} \quad L_b = V_{b \rightarrow a} \cdot R \quad \text{dengan } NBP \text{ sinar } a \text{ terhadap sinar } b \text{ dan } NBP \text{ sinar } b \text{ terhadap sinar } a \text{ masing-masing adalah } V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)} \text{ dan } V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}.$$

Kata Kunci : DUA SINAR SEBIDANG, BERPOTONGAN, NBP

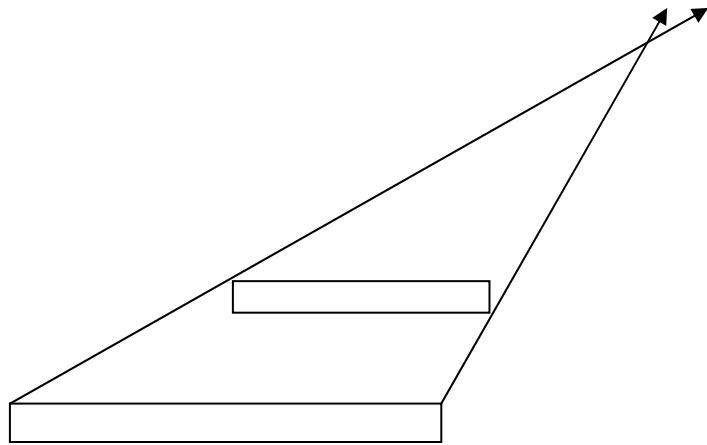
BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar belakang permasalahan

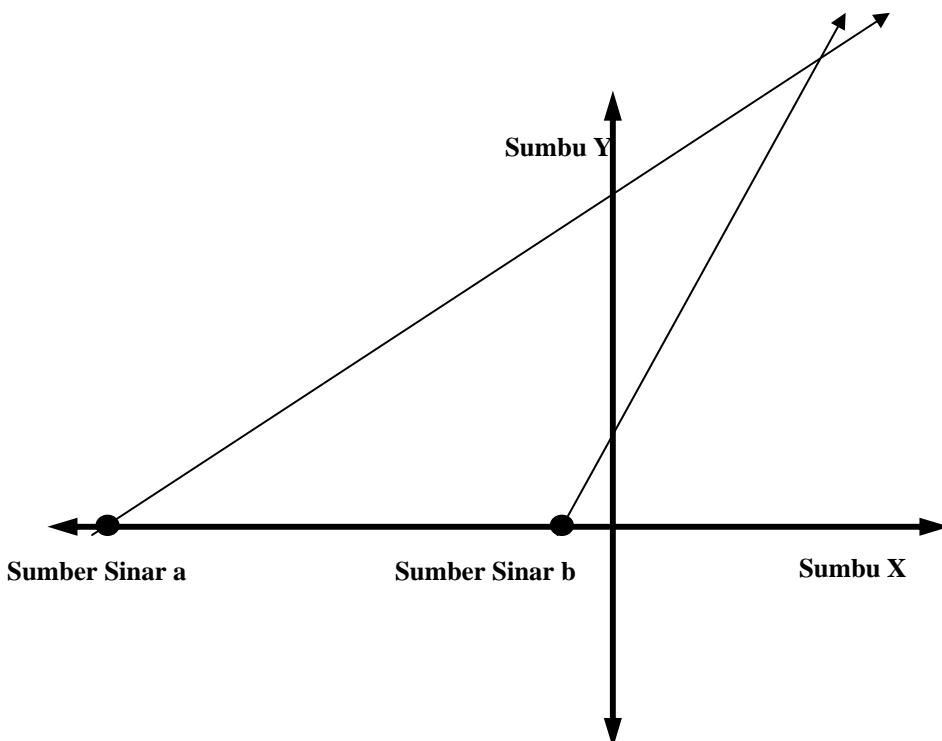
Dilingkungan sekitar, ditemukan beberapa benda yang kedudukannya saling sejajar. Jika dipandang dalam perspektif Dua Dimensi (2D) tampak bahwa benda yang satu lebih panjang dari yang lain. Contohnya TV dengan rak TV, papan tulis dengan lantai dan sebagainya. Seperti diperlihatkan pada

gambar I-1, diandaikan dari kedua ujung benda yang lebih panjang dipancarkan sinar yang masing-masingnya hampir menyentuh ujung terdekat benda yang lebih pendek, timbul pertanyaan, dimana kedua sinar tersebut akan berpotongan ?.



Gambar 1-1 Gambaran umum dua sinar berpotongan

Ketika dua sinar saling berpotongan, terbentuklah titik temu. Kemudian kedua sinar akan memiliki panjang sinar saat bertemu, yaitu panjang sinar dari sumber sinar masing-masing sampai titik temu tersebut. Dua sinar yang terletak pada satu bidang (sebidang) dapat dipastikan berpotongan, sejajar atau berhimpit. Pada kasus berpotongan, letak titik temu kedua sinar tersebut dipengaruhi oleh jarak antara kedua sumber sinar dan bentuk pertemuannya



Gambar 1-2 Kedudukan dua sinar berpotongan

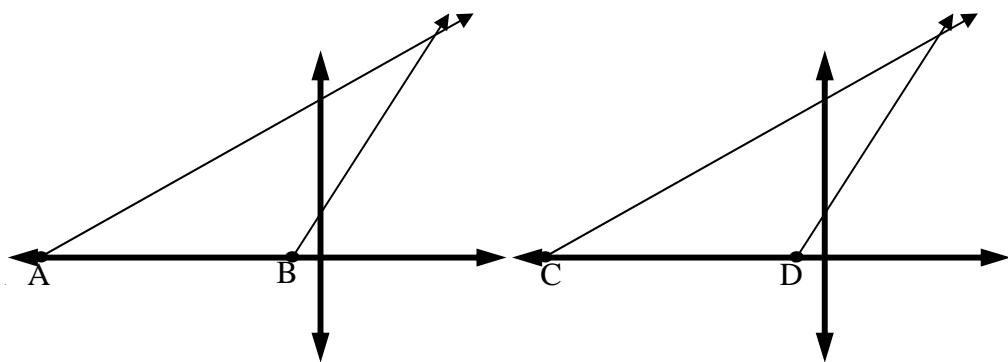
Secara logika dapat dikatakan bahwa panjang sinar a maupun b saat berpotongan dipengaruhi oleh beberapa hal yaitu:

1. Jarak atau jangkauan antara kedua sumbersinarnya (*Range*), disimbolkan dengan R .

Panjang kedua sinar saat bertemu sebanding dengan Jarak antara keduanya, sehingga $L \sim R$.

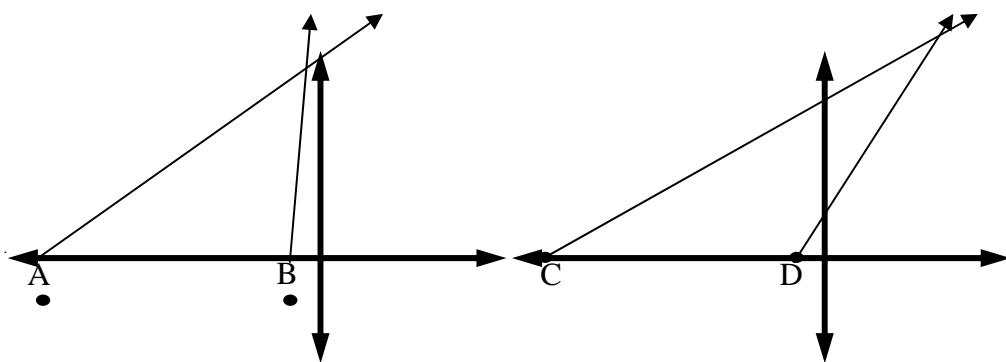
2. Bentuk pertemuan antara sinar yang satu dengan yang lain.

Terlepas dari jarak antara kedua sumber sinar, bentuk pertemuan kedua sinar yang berpotongan pasti turut mempengaruhi jauh dekatnya titik temu.



Gambar 1-3 Model Bentuk Pertemuan dua sinar sebidang yang sama

Perhatikan gambar 1-3. Pada kedua model diatas, bentuk pertemuannya sama karena itu jika jarak antara sumber sinar A terhadap sumber sinar B sama dengan jarak antara sumber sinar C terhadap sumber sinar D maka kedudukan titik temu antara kedua model tersebut juga sama. Tetapi, pada kondisi lainnya yaitu ketika bentuk pertemuannya berbeda, meskipun jarak antara sumber sinar A terhadap sumber sinar B sama dengan jarak antara sumber sinar C terhadap sumber sinar D, kedudukan titik temu antara keduanya tetap tidak sama. Hal ini diilustrasikan pada gambar 1-4 dibawah ini.



Gambar 1-4 Model Bentuk Pertemuan dua sinar sebidang yang berbeda

Bentuk pertemuan dua sinar sebidang mempengaruhi kedudukan titik temu. Ingat bahwa kedudukan titik temu dapat dinyatakan jaraknya baik terhadap sumber sinar yang satu maupun terhadap sumber sinar yang lain dalam bilangan, karena itu bentuk pertemuan tersebut dapat ditransformasi menjadi nilai tertentu sedemikian sehingga apabila dua bentuk pertemuan antara dua sinar sebidang sama maka keduanya akan memiliki nilai bentuk pertemuan yang sama tetapi untuk dua bentuk pertemuan yang berbeda maka nilai bentuk pertemuan masing-masingnya pun berbeda. Nilai ini juga akan terkait dengan kedudukan titik temu dua sinar sebidang tersebut.

Dengan kata lain. Bentuk pertemuan dua sinar sebidang dikonversi menjadi Nilai Bentuk Pertemuan (*NBP*) dua sinar sebidang yang kemudiannya disimbolkan dengan $V_{a \rightarrow b}$ (*V* berarti *Value*). Dibaca Nilai Bentuk Pertemuan sinar a terhadap sinar b, untuk a dan b sinar sebidang.

Berdasarkan dua uraian diatas, dapat diajukan suatu persamaan hipotesis.

$$\left. \begin{array}{l} L \sim R \\ V_{Sinar(pertama) \rightarrow Sinar(kedua)} \end{array} \right\} L_{pertama} = V_{Sinar(pertama) \rightarrow Sinar(kedua)} R$$

Sehingga untuk dua sinar a dan b sebidang maka

$$L_a = V_{a \rightarrow b} R$$

$$L_b = V_{b \rightarrow a} R$$

Dengan

L_a adalah Panjang sinar a saat berpotongan

L_b adalah Panjang sinar b saat berpotongan

$V_{a \rightarrow b}$ adalah Nilai Bentuk Pertemuan sinar a terhadap sinar b

$V_{b \rightarrow a}$ adalah Nilai Bentuk Pertemuan sinar b terhadap sinar a

R adalah Jarak antara sinar a dan sinar b

Berdasarkan uraian di atas tampak jelas bahwa ketika dua sinar saling berpotongan maka masing-masing sinar akan memiliki panjang sinar saat bertemu, yaitu panjang sinar dari sumber sinarnya masing-masing sampai titik temunya. Ada dua hal yang mempengaruhi besaran panjang sinar saat bertemu (L) yaitu jarak antara kedua sumber sinar (R) dan bentuk pertemuan kedua sinar tersebut. Karena L sebanding dengan R , dan L dipengaruhi oleh bentuk pertemuan kedua sinar, maka apabila bentuk pertemuan ditransformasikan dalam suatu nilai tertentu yang disebut Nilai Bentuk Pertemuan (NBP), secara umum akan terjadi persamaan yang menghubungkan ketiga nilai tersebut.

B. Perumusan masalah

Berdasarkan uraian di atas, diajukan rumusan permasalahan sebagai berikut : permasalahan seperti apa yang menghubungkan antara panjang sinar saat bertemu (L), jarak antara kedua sumber sinar (R), dan Nilai Bentuk Pertemuan (NBP) tersebut ?.

C. Arti penting kajian

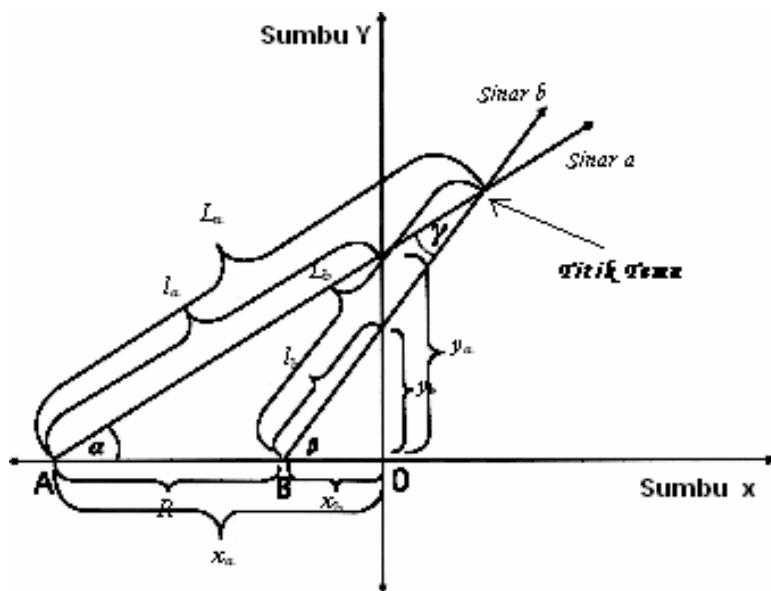
Dua sinar sebidang pada hakikatnya dapat dipandang sebagai dua buah garis dalam bidang X-Y. Oleh karena itu, pengetahuan mengenai hal ini dapat digunakan untuk mengembangkan Geometri khususnya dalam Geometri Analitik Bidang. Selain itu, apabila hasil kajian memberikan persamaan-persamaan yang sifatnya *programmable* maka persamaan-persamaan tersebut dapat digunakan dalam komputasi untuk memudahkan proses penghitungan

berbagai hal yang terkait dengan dua buah sinar atau garis yang saling berpotongan.

BAB II

PEMBAHASAN

A. Kajian sketsa dua sinar sebidang



Gambar 2-2 Sketsa Dua Sinar Sebidang

Ditetapkan

- A** Adalah Sumber Sinar a
- B** Adalah Sumber Sinar b
- x_a Adalah jarak antara sumber sinar A ke titik pusat
- x_b Adalah jarak antara sumber sinar b ke titik pusat
- y_a Adalah jarak antara titik potong sinar a pada sumbu Y dengan titik pusat
- y_b Adalah jarak antara titik potong sinar b pada sumbu Y dengan titik pusat

- l_a Adalah panjang sinar a saat memotong sumbu Y
- l_b Adalah panjang sinar b saat memotong sumbu Y
- L_a Adalah Panjang Sinar a saat berpotongan dengan sinar b
- L_b Adalah panjang sinar b saat berpotongan dengan sinar a
- R Adalah jarak antara sumber sinar a dan sumber sinar b

Diketahui:

$$\sin \alpha = \frac{y_a}{l_a}, \quad \sin \beta = \frac{y_b}{l_b}, \quad \cos \alpha = \frac{x_a}{l_a}, \quad \text{dan} \quad \cos \beta = \frac{x_b}{l_b}$$

$$l_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$l_b = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

$$\text{dan } \gamma = \beta - \alpha$$

Menggunakan Dalil Sinus

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{diperoleh}$$

$$\frac{L_b}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \gamma}, \quad \text{karena } \gamma = \beta - \alpha, \text{ maka}$$

$$\frac{L_b}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Diketahui bahwa $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$

Sehingga,

$$\frac{L_b}{\sin \alpha} = \frac{R}{\{(\sin \beta \cos \alpha) - (\cos \beta \sin \alpha)\}}$$

Substitusi nilai-nilai $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, dan $\cos\beta$

Diperoleh,

$$\frac{L_b}{l_a} = \frac{R}{\left\{ \left(\frac{y_b}{l_b} \frac{x_a}{l_a} \right) - \left(\frac{x_b}{l_b} \frac{y_a}{l_a} \right) \right\}}$$

$$\frac{L_b l_a}{y_a} = \frac{R l_a l_b}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

Sehingga

$$L_b = \frac{y_a l_b R}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

Dengan metode yang hampir sama. Diperoleh:

$$L_a = \frac{y_b l_a R}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

Apabila dibandingkan diperoleh:

Persamaan	$L_a = V_{a \rightarrow b} R$	$V_{a \rightarrow b} R = \frac{y_b l_a}{(x_a y_b - x_b y_a)} R$
Persamaan	$L_a = \frac{y_b l_a R}{(x_a y_b - x_b y_a)}$	

$$\text{Sehingga } V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b l_a}{(x_a y_b - x_b y_a)} .$$

Substitusi pada persamaan diatas, diperoleh

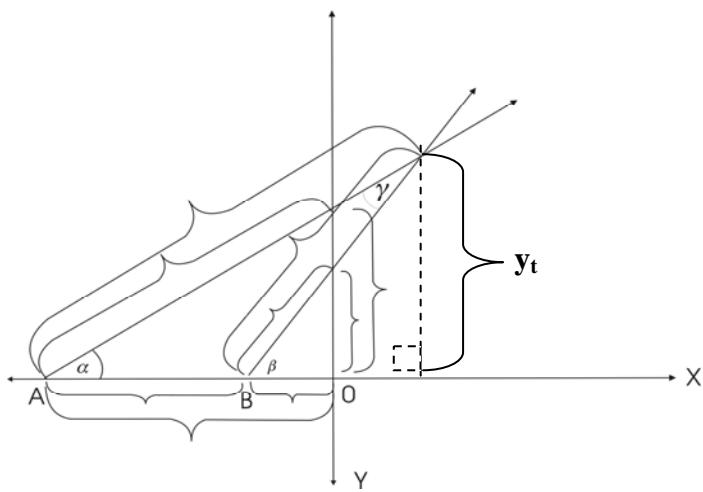
$$V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

B. Hubungan antara NBP dengan kedudukan titik temu

Secara geometris dapat ditentukan tinggi titik temu dari jarak antara kedua sinar sebagai berikut:



Gambar 2-2 Penentuan Tinggi Titik Temu

$$\text{Diketahui } \sin \beta = \frac{y_b}{l_b} = \frac{y_t}{L_b},$$

sehingga diperoleh

$$yt = \frac{y_b}{l_b} L_b,$$

$$\text{Karena } L_b = V_{b \rightarrow a} R \text{ dan } lb = \sqrt{x_b^2 + y_b^2},$$

$$\text{Maka } yt = V_{b \rightarrow a} \frac{y_b R}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Cara lain untuk menentukan yt adalah dengan

$$\sin \alpha = \frac{y_a}{l_a} = \frac{y_t}{L_a},$$

dengan cara ini dihasilkan $yt = V_{a \rightarrow b} \frac{y_a R}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$

Jarak antara sumber sinar A dan B ke garis tegak lurus tersebut (disebut A_t dan B_t) juga dapat ditentukan

Berikut penentuannya :

$$\cos \beta = \frac{x_b}{l_b} = \frac{A_t}{L_b}, \text{ sehingga}$$

$$A_t = \frac{x_b}{l_b} Lb, \text{ karena } L_b = V_{b \rightarrow a} R \text{ dan } lb = \sqrt{x_b^2 + y_b^2},$$

$$\text{Maka } A_t = V_{b \rightarrow a} \frac{x_b R}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Dengan cara yang hampir sama untuk Bt , dengan Bt adalah jarak antara sumber sinar A dengan yt diperoleh:

$$B_t = V_{a \rightarrow b} \frac{x_a R}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

C. Review hasil kajian

Berdasarkan beberapa kajian matematis diatas, diperoleh bahwa persamaan yang dapat berfungsi sebagai Nilai Bentuk Pertemuan adalah $\frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$ sebagai $V_{a \rightarrow b}$, dan $\frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$ sebagai $V_{b \rightarrow a}$. Nilai Bentuk Pertemuan terkait dengan jauh-dekatnya titik temu sekaligus dapat digunakan untuk menentukan kedudukan titik temu tersebut yaitu:

1. Jaraknya dari sumber sinar A sama dengan panjang sinar a saat berpotongan dengan sinar B, diformulasikan dengan

$$L_a = V_{a \rightarrow b} R, \text{ dengan } V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

2. Jaraknya dari sumber sinar A yaitu sama dengan panjang sinar A saat berpotongan dengan sinar B, diformulasikan dengan

$$L_b = V_{b \rightarrow a} R, \text{ Dengan } V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

3. Tinggi titik temu dari jarak antara kedua sinar, diformulasikan dengan

$$1). y_t = V_{b \rightarrow a} \frac{y_b R}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

$$2). y_t = V_{a \rightarrow b} \frac{y_a R}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

$$\text{Dengan } V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)} \text{ dan } V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

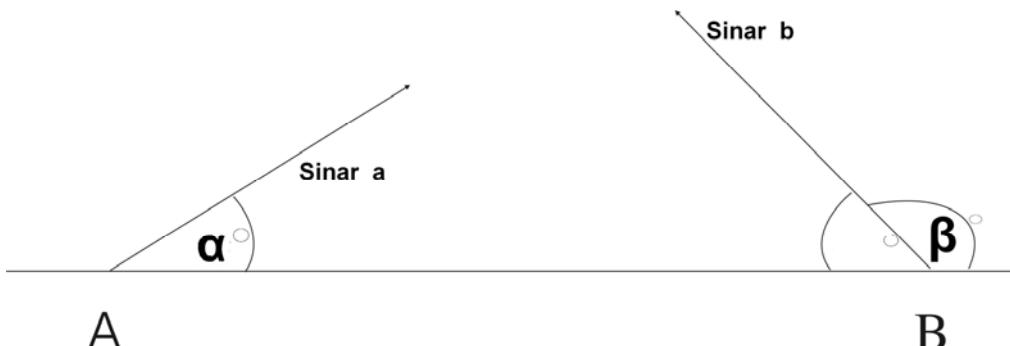
4. Jarak antara sumber sinar A dan sumber sinar B dengan y_t

$$1). A_t = V_{b \rightarrow a} \frac{x_b R}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

$$2). B_t = V_{a \rightarrow b} \frac{x_a R}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

$$\text{Dengan } V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)} \text{ dan } V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

D. Kajian dengan besar sudut diketahui



Gambar 2-3 Sketsa untuk kajian berdasarkan besar sudut

Apabila besar sudut α dan β diketahui, maka nilai besar sudut tersebut dapat diubah ke nilai x_a , y_a , x_b , dan y_b . Karena $\tan \alpha = \frac{y_a}{x_a}$, dan $\tan \beta = \frac{y_b}{x_b}$.

Apabila x_a , y_a , x_b , dan y_b telah diketahui maka Nilai Bentuk Pertemuan dapat ditentukan dan persamaan –persamaan yang diketahui dapat langsung digunakan.

Contoh:

Diketahui $\alpha = 30^\circ$ dan $\beta = 45^\circ$. Maka

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ sehingga } ya = \sqrt{3} \text{ dan } xa = 3.$$

$$\tan \beta = \frac{1}{1} \text{ sehingga } yb = 1 \text{ dan } xb = 1.$$

E. Keajegan nilai bentuk pertemuan

Uraian diatas menegaskan bahwa apabila besar sudut α dan β maka nilai-nilai x_a , y_a , x_b , dan y_b dapat ditentukan. Namun demikian mungkin akan timbul keraguan, karena untuk $\tan \alpha = \frac{y_a}{x_a}$, nilai x_a , dan y_a dapat bervariasi. Misalkan untuk $\alpha = 30^\circ$ maka $\tan \alpha$ dapat bervariasi diantaranya

- $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sehingga $y_a = \sqrt{3}$ dan $x_a = 3$. Atau
- $\tan \alpha = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1}$ sehingga $y_a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ dan $x_a = 1$, maupun
- $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{6}$ sehingga $y_a = 2\sqrt{3}$ dan $x_a = 6$.

Bukti berikut menegaskan bahwa Nilai Bentuk Pertemuan tidak berubah karena adanya variasi nilai x_a , y_a , x_b , dan y_b untuk nilai α dan β yang sama. Misalkan α dan β besar sudut dua sinar sebidang. maka

Pembuktian

$\tan \alpha = \frac{y_a}{x_a}$ variasinya adalah $\tan \alpha' = \frac{m}{m} \frac{y_a}{x_a}$, $m \in \text{Real}$ dan $m \neq 0$.

$\tan \beta = \frac{y_b}{x_b}$ variasinya adalah $\tan \beta' = \frac{n}{n} \frac{y_b}{x_b}$, $n \in \text{Real}$ dan $n \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } & x_a' = m x_a, & y_a' = m y_a \\ & x_b' = n y_b & y_b' = n y_b \end{aligned}$$

$$V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)} \text{ sedangkan } V_{a \rightarrow b}' = \frac{y_b' \sqrt{(x_a')^2 + (y_a')^2}}{(x_a' y_b' - x_b' y_a')}$$

$$V_{a \rightarrow b}' = \frac{(ny_b) \sqrt{(mx_a)^2 + (my_a)^2}}{\{(mx_a)(ny_b) - (nx_b)(my_a)\}}$$

Apabila $V_{a \rightarrow b}'$ disederhanakan

$$V_{a \rightarrow b}' = \frac{(ny_b) \sqrt{m^2 \{(x_a)^2 + (x_b)^2\}}}{\{(mn)(x_a)(y_b) - (mn)(x_b)(y_a)\}}$$

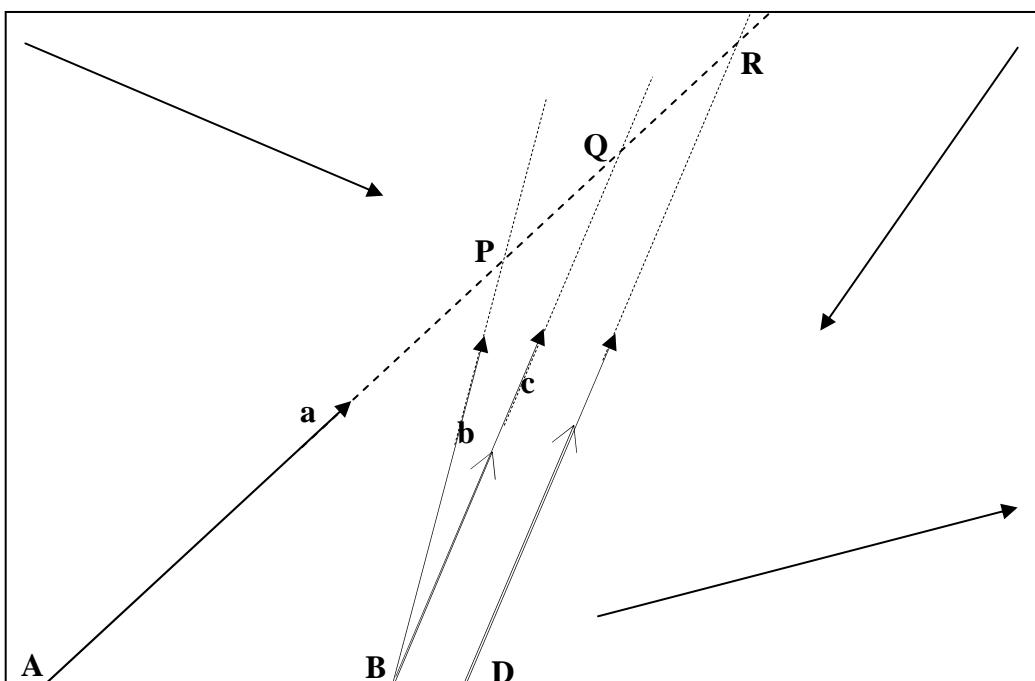
$$V_{a \rightarrow b}' = \frac{mn(y_b) \sqrt{(x_a)^2 + (x_b)^2}}{mn\{(x_a)(y_b) - (x_b)(y_a)\}} = \frac{(y_b) \sqrt{(x_a)^2 + (x_b)^2}}{\{(x_a)(y_b) - (x_b)(y_a)\}} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$$

Sehingga $V_{a \rightarrow b}' = V_{a \rightarrow b}$

Demikian pula halnya untuk $V_{b \rightarrow a}' = V_{b \rightarrow a}$

Terbukti bahwa variasi nilai x_a , y_a , x_b , dan y_b pada sudut yang sama tidak mempengaruhi besar Nilai Bentuk Pertemuan, yang artinya juga tidak mempengaruhi hasil pada persamaan

F. Gambaran umum nilai bentuk pertemuan



Gambar 2-4 Model Beberapa Sinar Sebidang

Ilustrasi diatas menggambarkan beberapa sinar yang berasal dari sumber sinar A, B, D dan beberapa sinar lainnya. Sinar a berpotongan dengan sinar b, c, dan d berturut-turut di P, Q R. Seperti diilustrasikan pada gambar (2-4), ketika suatu sinar memancar maka sinar tersebut memiliki Nilai Bentuk Pertemuan terhadap sinar lain yang sebidang dengan sinar tersebut.

Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat dikatakan bahwa sinar a memiliki Nilai Bentuk Pertemuan terhadap sinar b ($V_{a \rightarrow b}$), dan sinar a pun memiliki

Nilai Bentuk Pertemuan terhadap sinar c ($V_a \rightarrow c$). Sinar b memiliki Nilai Bentuk Pertemuan terhadap sinar a ($V_b \rightarrow a$) dan sinar c pun memiliki Nilai Bentuk Pertemuan terhadap sinar a ($V_c \rightarrow a$,) demikian seterusnya. ($V_a \rightarrow b$,) belum tentu sama nilainya dengan ($V_b \rightarrow a$,) karena berbeda acuan sinarnya (berkaitan dengan letak sinarnya). ($V_a \rightarrow b$,) mengacu pada sinar a sedangkan ($V_b \rightarrow a$,) mengacu pada sinar b. Meskipun demikian ada kemungkinan, besar nilai ($V_a \rightarrow b$,) sama dengan besar nilai ($V_b \rightarrow a$,).

G. Analisis persamaan nilai bentuk pertemuan

Pada Bab sebelumnya telah diuraikan proses mendapatkan Persamaan Nilai Bentuk Pertemuan. Dari proses tersebut diperoleh $V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$ dan

$$V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}.$$

Berikut analisis terkait dengan persamaan-persamaan tersebut.

Analisis I.

Pengaruh $(x_a y_b - x_b y_a)$ terhadap besar-kecilnya Nilai Bentuk Pertemuan (Untuk

$$V_{a \rightarrow b} > 0, V_{b \rightarrow a} > 0)$$

1. Secara umum dapat dikatakan bahwa $\sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ dan $\sqrt{x_b^2 + y_b^2}$ akan selalu bernilai positif dan lebih besar dari nol. Atau dengan kata lain $\sqrt{x_a^2 + y_a^2} > 0$ dan $\sqrt{x_b^2 + y_b^2} > 0$.
2. Berdasarkan pembuktian (Variasi Nilai Tan sudut sinar) tampak bahwa besarnya nilai y_a maupun y_b tidak akan mempengaruhi besarnya Nilai Bentuk Pertemuan.

3. Sehingga hanya $(x_a y_b - x_b y_a)$ yang mempengaruhi besar kecilnya Nilai Bentuk Pertemuan. Pada sisi lain diketahui bahwa $V_{a \rightarrow b}$ dan $V_{b \rightarrow a}$ berbanding terbalik dengan $(x_a y_b - x_b y_a)$. Sehingga $V_{a \rightarrow b} \sim \frac{1}{(x_a y_b - x_b y_a)}$, $V_{b \rightarrow a} \sim \frac{1}{(x_a y_b - x_b y_a)}$. Jadi semakin kecil nilai $(x_a y_b - x_b y_a)$ akan berakibat pada semakin besar Nilai Bentuk Pertemuan.

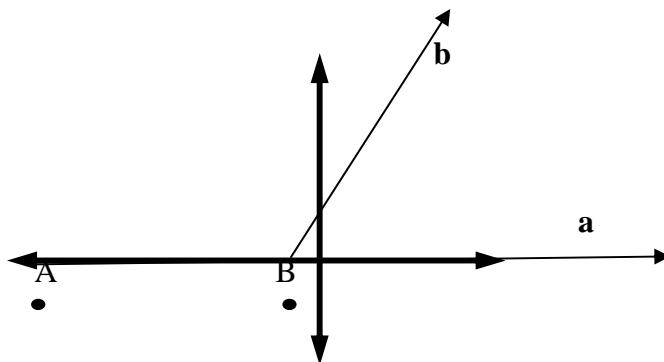
(Hasil ini kelak digunakan untuk menjelaskan tentang gerak semu benda mengenai Manfaat Nilai Bentuk Pertemuan).

4. Apabila $x_a y_b = x_b y_a$ Maka kedua sumber sinar sejajar ini terjadi karena $\alpha = \beta$. Yang berakibat pada $V_{a \rightarrow b} = V_{b \rightarrow a} = \frac{n}{0}, n \in R$

Analisis II.

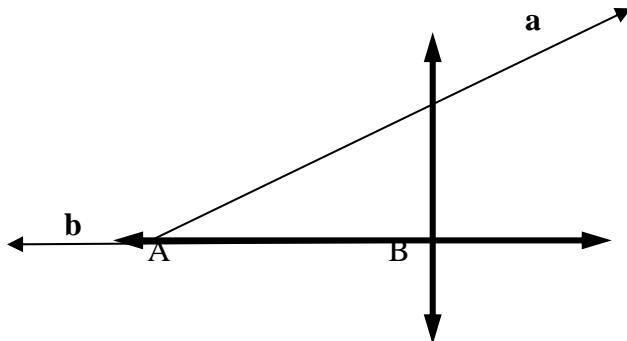
Jika y_a dan atau y_b bernilai nol.

- Jika $y_a = 0$, dan $y_b \neq 0$ maka titik temu terletak di Sumber Sinar B. Dengan kata lain sinar A memancar kearah sumber sinar B. Bila ditinjau dari nilai bentuk pertemuannya diperoleh $V_{b \rightarrow a} = 0$



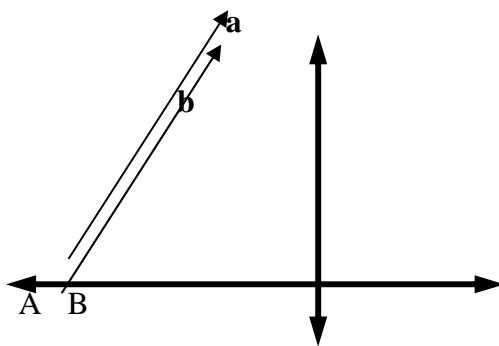
Gambar 2-5 Bentuk pertemuan ketika $V_{b \rightarrow a} = 0$

- Jika $y_b = 0$, dan $y_a \neq 0$ maka Titik Temu terletak di Sumber Sinar A. Dengan kata lain sinar B memancar kearah sumber sinar A. Bila ditinjau dari nilai bentuk pertemuannya diperoleh $V_{a \rightarrow b} = 0$



Gambar 2-6 Bentuk pertemuan ketika $V_{a \rightarrow b} = 0$

- Jika $y_a = 0$, dan $y_b = 0$ maka kedua sinar berhimpit. Dengan kata lain kedua sinar sama (sumber sinar sama dan arah pancarannya pun sama) bila ditinjau dari nilai bentuk pertemuannya diperoleh $V_{a \rightarrow b} = V_{b \rightarrow a} = \frac{0}{0}$



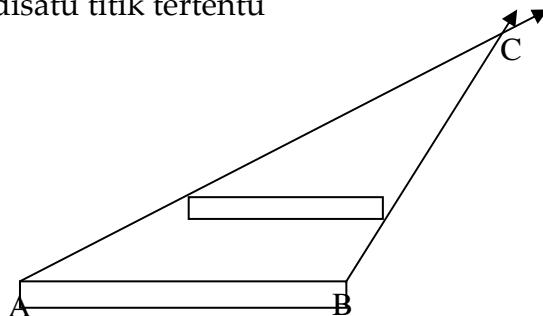
Gambar 2-7 Bentuk pertemuan ketika $V_{a \rightarrow b} = V_{b \rightarrow a} = \frac{0}{0}$

H. Manfaat pengetahuan

Berikut beberapa manfaat dari pengetahuan yang telah diperoleh

Penentuan kedudukan titik dengan metode NBP

Jika diingat kembali basis pemikiran pada Bab I yaitu mengenai dua sumber sinar yang bertemu disatu titik tertentu



Gambar 2-8 Gambaran Umum Dua Sinar Berpotongan

dan hasil pada Bab II mengenai hubungan antara nilai bentuk pertemuan dengan kedudukan titik temu tersebut. Maka dapat diandaikan, bila dari suatu tempat (misal A) melihat suatu benda kemudian dari tempat lain (misal B) juga melihat benda tersebut dan tampak bahwa sudut pandang terhadap benda tersebut berbeda. Maka dengan menggunakan metode Nilai Bentuk Pertemuan maka kedudukan benda tersebut dapat ditentukan dengan mudah terutama bila dapat menggunakan bantuan perhitungan media berbasis algoritma Nilai Bentuk Pertemuan. Tentunya diharapkan keakuratan dengan cara ini akan lebih tinggi karena kemungkinan kesalahan pada perkiraan sudut pandang dan perhitungan dapat diminimalisir.

Pemikiran tentang gerak semu

Ketika bergerak (misalkan dengan kendaraan) akan terlihat bahwa benda yang dekat (misalkan pepohonan disamping jalan) akan bergerak berlawanan arah kendaraan dengan cepat, sedangkan yang jauh (misalkan pepohonan dan atau bangunan yang jauh) akan tampak lambat gerakannya, dan yang lebih jauh lagi (misalkan gunung) seakan tidak bergerak. Padahal benda-benda

tersebut diam terhadap bumi, pada sisi lain gerakan kendaraan tetap. Dari pengalaman tersebut tampak bahwa ada suatu kejadian yang mengakibatkan perbedaan gerakan benda-benda tersebut yang tentunya harus dapat dijelaskan secara ilmiah. Karena itu bagaimana menjelaskannya?

Contoh lainnya adalah ketika berjalan diwaktu malam. Tampak bahwa kemanapun melangkah bulan seakan terus mengikuti langkah kita. Apakah benar demikian adanya bahwa bulan tidak berubah kedudukannya terhadap kita saat itu?

Fenomena tersebut dapat dijelaskan bahwa pengamatan terhadap suatu benda dari dua sudut pandang yang berbeda (misalkan dari A ke B) pada perpindahan tertentu (yaitu jarak antara A dan B) dapat diandaikan dengan ilustrasi dasar Nilai Bentuk Pertemuan.

Ingat bahwa nilai L_a sebanding dengan $V_{a \rightarrow b}$, ($L_a \sim V_{a \rightarrow b}$), dan nilai L_b sebanding dengan $V_{b \rightarrow a}$, ($L_b \sim V_{b \rightarrow a}$). Ini berarti semakin jauh jarak benda dari pengamat, maka Nilai Bentuk Pertemuan akan semakin besar demian juga sebaliknya pada jarak yang relatif sama. Kemudian itu perhatikan logika berikut:

- Jika Nilai Bentuk Pertemuan $\frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}$ semakin besar¹
maka $(x_a y_b - x_b y_a)$ semakin kecil, karena berbanding terbalik dengan Nilai Bentuk Pertemuan.
- Jika $(x_a y_b - x_b y_a)$ semakin kecil, maka $x_a y_b \approx x_b y_a$
- Jika $x_a y_b \approx x_b y_a$ maka $\alpha \approx \beta$
- Jika $\alpha \approx \beta$ maka seakan kita melihat kedudukan benda tersebut di A maupun di B *hampir* sama. (perubahan amat kecil)

¹ Dalam hal ini adalah nilai mutlaknya karena tanda positif ataupun negatifnya menandakan perbedaan arah sinar (bentuk pertemuannya).

Jadi semakin jauh bendanya dari pengamat, maka ketika berpindah dari A ke B seakan-akan keadaaannya tetap tidak berubah. Jadi penyebab fenomena diatas adalah karena benda-benda tersebut (yang dekat, jauh, dan agak jauh) memiliki *Nilai Bentuk Pertemuan* yang berbeda terhadap pengamat dan semakin jauh jaraknya dari pengamat maka perubahan kedudukannya dari sudut pandang pertama maupun kedua amat kecil sehingga seakan tidak berubah.

Adapun mengenai bulan, sebenarnya ada perubahan kedudukan tetapi karena perubahannya sangat kecil (yaitu karena jaraknya yang amat jauh) maka ketika kita berpindah dan melihatnya seakan sama saja dan mengikuti kita ketika bergerak.

I. Algoritma nilai bentuk pertemuan

Dalam uraian sebelumnya telah diuraikan bahwa ketika sebuah sinar memancar, sinar tersebut memiliki nilai bentuk pertemuan terhadap sinar lain yang sebidang dengannya. Secara umum juga telah diuraikan pada awal bab mengenai salah satu penerapannya yaitu tentang penentuan kedudukan titik dengan metode nilai bentuk pertemuan. Dalam hal ini, tampak bahwa diperlukan proses perhitungan untuk mendapatkan nilai tertentu, baik jaraknya dari sumber sinar yang satu maupun dari sumber sinar yang lainnya melalui persamaan Nilai Bentuk Pertemuan dan persamaan-persamaan lainnya.

Perhatikan bahwa jika nilai x_a, y_a, x_b , dan y_b serta R diketahui maka $V_{a \rightarrow b}$, $V_{b \rightarrow a}$, A_t , B_t , L_a , L_b dan y_t . dapat dihitung secara matematis. Sehingga dapat disusun algoritma dengan berbasis pada peta relasi tersebut, yang pada akhirnya dapat disusun program komputer yang mempermudah penghitungan

nilai-nilai $V_{a \rightarrow b}$, $V_{b \rightarrow a}$, A_t , B_t , L_a , L_b dan y_t . Satu hal yang perlu diketahui, nilai-nilai x_a , y_a , x_b , dan y_b serta R dapat diupayakan keakuratannya dan hal ini mungkin untuk dilakukan. Karena itu, nilai-nilai $V_{a \rightarrow b}$, $V_{b \rightarrow a}$, A_t , B_t , L_a , L_b dan y_t yang diperoleh melalui proses algoritma metode Nilai Bentuk Pertemuan dari nilai-nilai x_a , y_a , x_b , dan y_b serta R yang akurat tentunya dapat dipertanggungjawabkan keakuratannya.

BAB III

PENUTUP

A. Simpulan

Hasil kajian menunjukkan bahwa hubungan antara L , R , dan NBP adalah sebagai berikut : $L_a = V_{a \rightarrow b} \cdot R$ dan $L_b = V_{b \rightarrow a} \cdot R$ dengan NBP sinar a terhadap sinar b dan NBP sinar b terhadap sinar a masing-masing adalah

$$V_{a \rightarrow b} = \frac{y_b \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)} \text{ dan } V_{b \rightarrow a} = \frac{y_a \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{(x_a y_b - x_b y_a)}.$$

B. Saran

Berikut beberapa saran yang diajukan:

- Penjelasan secara ilmiah tentang gerak semu benda dan pengetahuan tentang adanya Nilai Bentuk Pertemuan yang dimiliki suatu sinar terhadap sinar lainnya diharapkan dapat menjadi sumbangsih pemikiran yang bermanfaat dalam mengembangkan ilmu pengetahuan terutama matematika dan fisika
- Keakuratan dan ketepatan yang tinggi dalam menentukan kedudukan suatu benda dengan memanfaatkan perubahan sudut pandang

terhadap benda tersebut tentunya diharapkan dapat dimanfaatkan dan diaplikasikan dengan sebaik-baiknya baik dengan mengembangkan alat, media ataupun aplikasi yang mendukung dan sesuai.

- Beberapa hal berikut diharapkan dapat difikirkan sebagai upaya pengembangan Nilai Bentuk Pertemuan
 1. Apakah metode ini juga berlaku dalam lingkup alam semesta ?; dengan kata lain ketika melihat sebuah benda langit dengan sudut pandang tertentu dari suatu planet misalkan bumi, dan pada saat bersamaan juga melihatnya dari planet lain selain di bumi apakah benda langit tersebut dapat dengan tepat ditentukan kedudukannya dari bumi dan dari planet lain tersebut ?.
 2. Gerak semu, sebagaimana yang diuraikan pada Bab II dapat dipandang sebagai gerak subjektif menurut pengamatnya. Apakah gerak ini dapat terus dikaji atau sekedar fenomena indera manusia saja ?
 3. Bagaimana jika yang berubah kedudukan bendanya sedang pengamatnya tetap apakah masih tetap dapat diupayakan penentuan kedudukannya melalui kajian secara matematis ?.

DAFTAR PUSTAKA

Djoko Iswadji.2001.*Geometri Ruang*.Jogjakarta: FMIPA UNY

Murdanu.2003.*Geometri (Geometri Euclides Secara Deduktif-Aksiomatik)*

.Jogjakarta: FMIPA UNY

Purcell, Edwin J dan Dale Verberg.1984.*Kalkulus dan Geometri Analitis*

(diterjemahkan oleh I Nyoman susila, M.Sc, dkk).Jakarta:Penerbit Erlangga

Spielberg, Murray S. 1956. *Matematika Dasar (Terjemahan)*. Jakarta : Penerbit

Erlangga.

Tim PKBBI.1989.*Kamus besar Bahasa Indonesia*.Jakarta:Balai Pustaka