Eksak Period dari Solusi Periodik untuk Sebuah Osilator Tak Linear

S.B. Waluya
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang

Abstrak. Dalam makalah ini akan dibahas sebuah oscilator taklinear dalam bentuk $\ddot{x} + x^{(2m-2n+1)/(2n+1)} = 0,$ dengan $m, n \in N$. Akan ditunjukkan bagaimana menemukan solusi-solusi periodik dari sebuah perluasan osilator tak linear dengan menggunakan faktor integral. Akan pula ditunjukkan dalam makalah ini bagaimana menentukan ekspresi period secara eksak dari solusi-solusi periodik yang diperoleh. Hasil yang diperoleh akan dibandingkan dengan metode-metode lain yang dilakukan oleh beberapa peneliti.

Kata kunci : Perluasan Oscilator Tak Linear, Solusi Periodik

Pendahuluan

Dalam makalah ini akan dibahas sebuah perluasan osilator tak linear yang mempunyai bentuk

$$\ddot{x} + x^{(2m-2n+1)/(2n+1)} = 0, \tag{1}$$

dimana $m, n \in N$ dan $\dot{x} = dx/dt$. Mickens dan Semwogerre [4], Mickens [5], Cooper dan Mickens [2] telah mempelajari persamaan osilator tak linear yang mempunyai bentuk umum

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \tag{2}$$

Dalam kasus khusus $f(x) = x^{1/(2n+1)}$ dengan $n \in N$ telah dipelajari dalam [4,5,7]. Dalam hal yang lebih umum dari kasus persamaan (2) telah pula dipelajari oleh Hu dan Xiong [2] dengan metode skema beda hingga tidak standard yang telah dikembangkan oleh Mickens [6]. Metode *harmonic balance* telah digunakan Mickens dan Semwogerere, Mickens, Cooper dan Mickens dalam [1-3] untuk mengaproksimasi solusi periodik, dan period dari solusi-solusi periodik telah dipelajari Cooper dan Mickens dalam [2]. Awrejcewicz dan Andrianov dalam makalah [1] telah mengaproksimasi period dari solusi-solusi periodik dengan

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT** " yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

menggunakan metoda *small* δ. Sementara hitungan secara analitik period eksak dari solusi-solusi periodik telah diselesaikan dengan menggunakan faktor integral oleh Van Horssen dalam makalah [7]. Dalam makalah ini akan dibahas osilator tak linear (1) yang merupakan perluasanan dari osilator tak linear $\ddot{x} + x^{1/(2n+1)} = 0.$ Dalam makalah ini juga akan diberikan contoh perbandingan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode yang dipakai dalam makalah ini dengan metode lain. Persamaan (1) bila $m = n = 0$ akan menjadi persamaan harmonik yang solusi-solusinya merupakan solusi periodik. Persamaan harmonik tersebut adalah

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Bila $m = 1, n = 0$ maka akan didapatkan persamaan osilator tak linear

$$\ddot{x} + x^3 = 0. \tag{3}$$

Persamaan (3) telah dipelajari oleh Yuste dan Bejarano [11] dengan menggunakan perluasan dengan fungsi-fungsi eliptik Jacobian dari metode *harmonic balance*. Apabila $m = n$ maka persamaan (1) akan menjadi

$$\ddot{x} + x^{1/(2n+1)} = 0,$$

yang telah dipelajari oleh Cooper dan Mickens [2], Mickens [5], dan juga Van Horssen [7]. Pengembangan masalah osilator taklinear problem (1) dengan memberikan suku gangguan seperti telah dipelajari oleh Waluya dan Van Horssen [8], Waluya [9,10].

Solusi-solusi Periodik dan Period

Dalam bagian ini akan ditunjukkan bagaimana menyelesaikan perluasan osilator tak linear (1) secara analitik. Tidak hanya solusi-solusi periodik yang akan diberikan tetapi juga ekspresi period secara eksak akan diberikan. Mudah untuk dicek bahwa persamaan (1) mempunyai faktor integral $\dot{x}$. Kita kalikan persamaan (1) dengan faktor integral tersebut dan kita akan dapatkan integral pertama yang diberikan dengan

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{2n+1}{(2m+2)}x^{(2m+2)/(2n+1)} = c, \tag{4}$$

dengan c adalah konstanta integrasi (dapat diinterpertasikan sebagai energi konstan). Dari persamaan (4) dapat diketahui bahwa semua orbit dari solusi-solusi merupakan kurva tutup dalam bidang phase (*phase plane*) $(x, \dot{x})$. Juga orbit-orbit tutup ini akan simetri terhadap sumbu-sumbu koordinat dalam bidang phase. Dengan demikian kita bisa simpulkan bahwa semua solusi dari perluasan oscilator tak linear persamaan (1) akan periodik. Tanpa mengurangi keumuman dapat diasumsikan bahwa sebuah solusi periodik pada saat $t = 0$ berada pada $(x(0), \dot{x}(0)) = (A_0, 0)$, dengan $A_0 > 0$. Maka dari (4) kita akan punyai

$$\frac{2n+1}{(2m+2)}A_0^{(2m+2)/(2n+1)} = c. \tag{5}$$

Misalkan $T_{m,n}(A_0)$ adalah sebuah period dasi sebuah solusi periodik. Karena semua orbit dalam bidang phase simetri terhadap sumbu x dan $\dot{x}$, maka kita punyai

$$\left(x\left(\frac{T_{m,n}(A_0)}{2}\right), \dot{x}\left(\frac{T_{m,n}(A_0)}{2}\right)\right) = (-A_0, 0). \tag{6}$$

Dari persamaan (5) dan (6) kita dapatkan

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2n+1}{m+1}}\sqrt{A_0^{(2m+2)/(2n+1)} - x^{(2m+2)/(2n+1)}},$$

atau ekuivalen dengan

$$\sqrt{\frac{m+1}{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{A_0^{(2m+2)/(2n+1)}-x^{(2m+2)/(2n+1)}}}\frac{dx}{dt}=\pm 1. \tag{7}$$

Kita integralkan persamaan (7) terhadap t dari $t=0$ ke $t=T_{m,n}(A_0)$ dan menghasilkan

$$\frac{T_{m,n}(A_0)}{2}=\sqrt{\frac{m+1}{2n+1}}\int_{-A_0}^{A_0}\frac{1}{\sqrt{A_0^{(2m+2)/(2n+1)}-x^{(2m+2)/(2n+1)}}}dx. \tag{8}$$

Misalkan $x=A_0u$, maka persamaan (8) dapat disederharanakan menjadi

$$T_{m,n}(A_0)=4\sqrt{\frac{m+1}{2n+1}}A_0^{(n-m)/(2n+1)}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^{(2m+2)/(2n+1)}}}du. \tag{9}$$

Atau

$$T_{m,n}(A_0)=2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2n+1}{m+1}}A_0^{(n-m)/(2n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2m+2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2n+2}{2m+2n}\right)}, \tag{10}$$

dimana Γ adalah fungsi gamma.

Simulasi Numerik Period dari Solusi Periodik

Untuk $m=n=0$, maka kita peroleh $T=2\pi$ yang merupakan period dari oscilator harmonik yang sudah diketahui umum. Untuk $m=0$ maka period T dari persamaan (9) atau persamaan (10) dapat dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dalam makalah [5,7]. Untuk nilai m dan n yang lain dapat dihitung period dari solusi periodik dalam persamaan (9) atau (10) dengan menggunakan standar perhitungan numerik (lihat Tabel 1). Dari tabel dapat diperhatikan bahwa dalam diagonal utama merupakan period dari persamaan osilator tak linear seperti yang telah dipelajari oleh Cooper dan Mickens [2], Mickens [5], dan juga Van Horssen [7].

Kesimpulan

Telah ditunjukkan secara analitik bagaimana menentukan period dari solusi-solusi periodik dari perluasan osilator tak linear. Untuk menentukan period tersebut, ditentukan terlebih dahulu solusi-solusi periodiknya dengan menggunakan faktor integral. Dengan faktor integral ditunjukkan secara analitik integral pertamanya. Metode ini dapat dikembangkan dalam kasus-kasus yang lebih sulit dan umum dari osilator tak linear terutama masalah oscilator dengan gangguan (lihat misalnya dalam makalah [8-10]).

Tabel 1. Period untuk beberapa nilai m dan n dari persamaan (9) atau (10)

n \ m	0	1	2	3	4	5	10	50	500
0	2π	$7.4162A_0^{-1}$	$8.4134A_0^{-2}$	$9.3087A_0^{-3}$	$10.128A_0^{-4}$	$10.886A_0^{-5}$	$14.084A_0^{-10}$	$28.952A_0^{-50}$	$89.656A_0^{-500}$
1	$5.4416A_0^{1/3}$	5.8697	$6.2832A_0^{-1/3}$	$6.6786A_0^{-2/3}$	$7.0556A_0^{-1}$	$7.4162A_0^{-4/3}$	$9.0201A_0^{-3}$	$17.156A_0^{-49/3}$	$51.906A_0^{-499/3}$
2	$5.2678A_0^{2/5}$	$5.5277A_0^{1/5}$	5.7850	$6.0372A_0^{-1/5}$	$6.2832A_0^{-2/5}$	$6.5223A_0^{-3/5}$	$7.6253A_0^{-8/5}$	$13.623A_0^{-48/5}$	$40.315A_0^{-498/5}$
3	$5.1950A_0^{3/7}$	$5.3798A_0^{2/7}$	$5.5648A_0^{1/7}$	5.7465	$5.9300A_0^{-1/7}$	$6.1079A_0^{-2/7}$	$6.9499A_0^{-1}$	$11.791A_0^{-47/7}$	$34.166A_0^{-71}$
4	$5.1541A_0^{4/9}$	$5.2974A_0^{1/3}$	$5.4416A_0^{2/9}$	$5.5851A_0^{1/9}$	5.7283	$5.8697A_0^{-1/9}$	$6.5487A_0^{-2/3}$	$10.639A_0^{-46/9}$	$30.213A_0^{-496/9}$
5	$5.1281A_0^{5/11}$	$5.2453A_0^{4/11}$	$5.3628A_0^{3/11}$	$5.4807A_0^{2/11}$	$5.5984A_0^{1/11}$	5.7153	$6.2832A_0^{-5/11}$	$9.8381A_0^{-45/11}$	$27.403A_0^{-45}$
10	$5.0734A_0^{10/21}$	$5.1338A_0^{3/7}$	$5.1950A_0^{8/21}$	$5.2562A_0^{1/3}$	$5.3176A_0^{2/7}$	$5.3798A_0^{5/21}$	5.6875	$7.8584A_0^{-40/21}$	$20.099A_0^{-70/3}$
50	$5.0258A_0^{50/101}$	$5.0382A_0^{49/101}$	$5.0507A_0^{48/101}$	$5.0632A_0^{47/101}$	$5.0756A_0^{46/101}$	$5.0883A_0^{45/101}$	$5.1515A_0^{40/101}$	5.6632	$10.096A_0^{450/101}$
500	$5.0146A_0^{500/1001}$	$5.0158A_0^{499/1001}$	$5.0172A_0^{498/1001}$	$5.0186A_0^{71/143}$	$5.0196A_0^{496/1001}$	$5.0209A_0^{45/91}$	$5.0270A_0^{70/143}$	$5.0773A_0^{450/1001}$	5.6575

Daftar Pustaka

[1] Awrejcewicz, J. dan I.V. Andrianov. 2002. Oscillations of a nonlinear system with restoring force close to sign(x). *Journal of Sound and Vibration* 252. 962-966.

[2] Cooper dan R. E. Mickens. 2002. Generalized harmonic balance/ numerical method for determining analytical approximations to the periodic solutions of the $x^{4/3}$ potential. *Journal of Sound and Vibration* 250. 951-054.

[3] Hu, H. dan Z. G. Xiong. Oscillation in an $x^{(2m+2)/(2n+1)}$ potential. *Journal of Sound and Vibration* 259(4). 977-980.

[4] Mickens, R. E. dan D. Semwogerere, 1996. Fourier analysis of a rational harmonic balance approximation for periodik solutions. *Journal of Sound and Vibration* 195. 528-530.

[5] Mickens, R. E. 2001. Oscilations in an $x^{4/3}$ potential. *Journal of Sound and Vibration* 246. 375-378.

[6] Mickens, R. E. 1994. *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*. Singapore: World Scientific.

[7] Van Horssen, W. T. 2003. On the periods of the periodic solutions of the nonlinear oscillator equation $\ddot{x} + x^{1/(2n+1)} = 0$. *Journal of Sound and Vibration* 260. 961-964.

[8] Waluya, S.B. and W.T. Van Horssen. 2003. On the Periodic Solutions of a Generalized Nonlinear Van der Pol Oscillator, *Journal of Sound and Vibration* 268, 209 – 215.

[9] Waluya, S.B. 2004. On the generalized fractional nonlinear Van der Pol Oscillator. *Journal of Indonesian Mathematical Society (MIHMI)* 1 (32), 109 – 141.

[10] Waluya, S.B. 2005. A Strongly Nonlinear Fractional Rayleigh Oscillator, *Proceedings of the International Conference on Applied Mathematics*, Bandung, Indonesia, 711 (CP7).

[11] Yuste, S.B. dan J. D. Bejarano. 1986. Construktion of Approximate Analytical Solutions to a Class of Nonlinear Oscillator Equations. *Journal of Sound and Vibration* 110(2). 347-350.