Penyelesaian Persamaan Linear Dalam Bentuk Kongruen

Yayat Priyatna
Jurusan Matematika FMIPA UNPAD Jl. Raya Jatinangor Bdg-Smd Km 11
E-mail : yatpriyatna@yahoo.com
Tlp / Fax : 022 4218676 HP :08122334508

Abstrak

Pesamaan linear dalam bentuk kongruen ax = b (mod m) dapat diselesaikan jika persamaan tadi mempunyai bentuk a s + m t = u , dengan u pembagi b. Selanjutnya dengan mencari Faktor Persekutuan terbesar (FPB) dari a dan m dengan menggunakan pembagian bilangan bulat bersisa, Nilai x dapat ditentukan yang bersesuaian dengan a s + m t = u. Bentuk a s + m t = u serupa dengan bentuk ax +by = c selanjutnya persamaan a x + b y = c dapat diselesaikan dengan bantuan kelipatan persekutuan terbesar (KPK) dan perhitungan pembagian bilangan bulat bersisa.
Kata kunci : Kongruen, factor persekutuan terbesar

PENDAHULUAN

Persamaan Linear dalam Bentuk Kongruen ax = b (mod m) mempunyai arti bahwa ax dibagi m bersisa b atau m pembagi (ax – b). Biasa ditulis : m | (ax – b). Persamaan ini dapat diselesaikan jika dan hanya jika d = (a,m) adalah pembagi dari b. Selanjutnya nilai ini disebut Greatest Common divisor (gcd) atau Faktor Persekutuan terbesar (FPB).

Greatest Common Divisor (gcd) atau Nilai Faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua buah bilangan bulat dapat dicari dengan menggunakan algoritma Euclidean. Nilai ini dicari dengan mencari sisa-sisa dari perkalian bilangan yang kecil sampai diperoleh sisanya sama dengan nol. Algoritma Euclidean ini juga bisa disajikan dalam bentuk sajian bentuk algoritma program komputer.

Model

Bentuk ax = b (mod m) dengan a,b dan m bilangan bulat dengan m >0 bisa diselesaikan. Jika gcd (a,m) adalah merupakan Faktor Persekutuan terbesar (FPB) dari a dan m. Bentuk lain dari gcd (a,m) adalah bentuk ak + mn = t.

Nilai a dan m di formulasikan sebagai berikut :

$a= b. k_1 + s_1$

$b = s_1. k_2 + s_2$

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT “** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

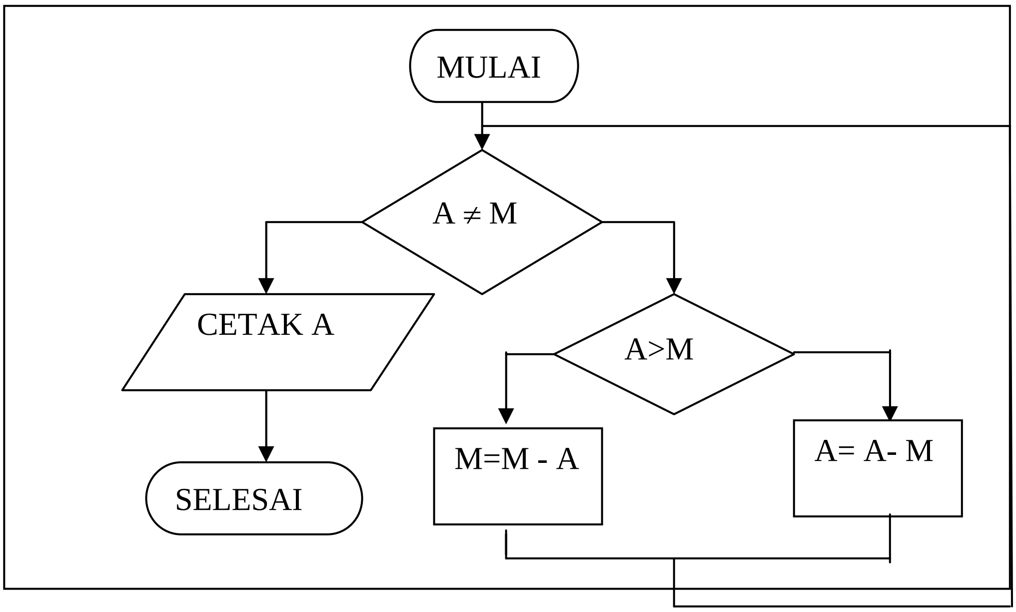
$s_1 = s_2.k_3 + s_3$

$s_{n-2} = s_{n-1} . k_n + s_n$

Sampai diperoleh nilai $s_n = 0$

Kemudian cari nilai s_{n-1} sampai dengan s_1 dari bawah keatas sehingga berbentuk : ak + mn = t.

Bentuk lain dari algoritma Euclidean adalah ditulis dalam bentuk gcd(a,m). Nilai ini dicari dengan mengurangkan bilangan yang besar dikurangi dengan bilangan yang kecil, dan simpan hasilnya pada bilangan yang besar dan seterusnya sampai didapatkan nilai a = m , yaitu sebagai nilai dari gcd (a,m). Dalam sajian program komputer algoritmanya adalah sebagai berikut :



Input a,m

Do while a ≠ m

    If a > m then

      a = a – m

      Else

      m = m – a

Endwhile

Cetak a

  End

Analisis

Bentuk ax = b (mod m) dengan a,b dan m adalah bilangan bulat diselesaikan sebagai berikut :

1. Cari nilai gcd(a,m). Misalkan nilai gcd(a,m) = d.
2. Periksa apakah d|b ? Jika ya maka ada jawab.

Sebagai Ilustrasi diberikan contoh berikut :

7x = 5 (mod 256)

Penyelesaian :

gcd(256,7) = gcd(249,7) = gcd(242,7) = gcd(235,7) = gcd(228,7) = gcd(221,7) = gcd(214,7) = gcd(207,7) = gcd(200,7) = gcd(193,7)= gcd(186,7)= gcd (179,7) = gcd (170,7) = gcd(163,7) = gcd(156,7) = gcd(149,7) = gcd(142,7) = gcd(135,7) = gcd(128,7) = gcd(121,7) = gcd(114,7) = gcd(107,7) = gcd(100,7) = dan seterusnya

gcd(256,7) = 1.

Dengan program flowchart untuk program komputer algoritmanya sebagai berikut :

```
Input a,m
Do while a ≠ m
        If a > m then
          a = a – m
          Else
          m= m– a
Endwhile
Cetak a
End
```

a	m	a ≠ m	a > m	output
7	256	7 ≠ 256 ya	7 > 256 tidak	
	249	7 ≠ 249 ya	7 > 249 tidak	

	242	$7 \neq 242$ ya	$7 > 242$ tidak
	235	$7 \neq 235$ ya	$7 > 235$ tidak
7	228	$7 \neq 228$ ya	$7 > 228$ tidak
	221	$7 \neq 221$ ya	$7> 221$ tidak
7	214	$7 \neq 214$ ya	$7 > 214$ tidak
7	207	$7 \neq 207$ ya	$7> 207$ tidak
7	200	$7 \neq 200$ ya	$7 > 200$ tidak
7	193	$7 \neq 193$ ya	$7 > 193$ tidak
7	186	$7 \neq 186$ ya	$7 > 186$ tidak
7	179	$7 \neq 179$ ya	$7 > 179$ tidak

dan seterusnya sampai didapat nilainya sama dengan 1.

$(256,7) = 1 = d = 256\ k + 7\ n$

dan $1 \mid 5$, sehingga ada solusi.

Dengan cara mencari sisa dari perkalian bilangan yang kecil dengan suatu konstanta dicari sebagai berikut :

$(256,7) =$

$256 = 7.36 + 4$	$1 = 4 - 3.1$
$7 = 4.1 + 3$	$= 4 - (7 - 4.1).1$
$4 = 3.1 + 1$	$= 4 - 7.1 + 4.1$
$3 = 1.3 + 0$	$= 4.2 - 7.1$
	$= (256 - 7.36).2 - 7.1$
	$= 256.2 - 7.73$

diperoleh nilai $k = 2$, dan nilai $n = -73$

Sehingga $5 = 256\ (10) + 7\ (-365)$

Sehingga diperoleh Nilai $x = -365$ sebagai solusi jawabannya.

Hal yang cukup menarik disini yaitu kita dapat menyelesaikan suatu persamaan linear dengan dua buah variabel, dengan menggunakan bantuan perhitungan faktor persekutuan terbesar seperti cara diatas.

Perhatikan sebuah persamaan linear ax + by = c .Persamaan linear ini dapat diselesaikan jika diketahui a,b dan c baik adalah suatu bilangan bulat ataupun bilangan real. Nilai x dan nilai y yang akan dicari akan didapatkan suatu harga yang unik.

Sebagai ilustrasi misalkan diketahui suatu persamaan linear $7x + 5y = 69$.

Persamaan ini dapat diselesaikan sebagai berikut:

1. Hitung KPK dari 7 dan 5 atau KPK (a,b) = KPK (7,5) = 1
2. Hitung sisa pembagian sebagai berikut:

$$7 = 5 \,.\, 1 + 2$$

$$5 = 2 \,.\, 2 + 1$$

$$2 = 1 \,.\, 2 + 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \,.\, 2 \\ &= 5 - 2 \,.\, (7 - 5 \,.\, 1) \\ &= 5 - 2 \,.\, 7 + 2 \,.\, 5 \\ &= 3 \,.\, 5 - 2 \,.\, 7 \end{aligned}$$

Jadi $69 = 3\ (69) + 7\ (\ -2.\ 69)$

Maka nilai x = -138 dan nilai y = 207

Simpulan

a. Bentuk $ax = b \pmod{m}$ dengan a,b dan m bilangan bulat dapat diselesaikan jika dan hanya jika $(a,m) = d$, dan $d \mid b$
b. Pencarian $(a,m) = d$ bisa diselesaiakan dengan bantuan gcd atau FPB
c. Dalam bentuk lain pencarian gcd adalah dengan algoritma Euclidean disajikan dalam bentuk program flowchart loop perulangan Do While.

d. Bentuk sebuah persamaan linear ax + by = c dapat diselesaikan dengan nilai x dan y adalah unik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Frank Ayres,JR. (19655). Modern Algebra : SCHAUM OUTLINE SERIES

[2] Lovasz, L . (2003). Discrete Mathematics . Springer : USA

[3] Richard J. (1993). Discrete Mathematics fort edition. : PHI.

[4] Rinaldi Munir. (2001). Matematika Diskrit . Bandung : Informatika Bandung .