Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

IDEAL FUZZY YANG DIBANGUN OLEH FUZZY SINGLETON PADA SUATU SEMIGRUP

[1,2]Karyati, [3]Sri Wahyuni, [4]Budi Surodjo, [5]Setiadji

[1] Mahasiswa S3, Jurusan Matematika , FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara, Yogyakarta
[2]Jurusan Penddikan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
Jl. Colombo No. 1, Karangmalang, Yogyakarta
[34,5] Jurusan Matematika , FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara, Yogyakarta
Email: [1,2] yatiuny@yahoo.com, [3]swahyuni@ugm.ac.id, ,[4] surodjo_b@ugm.ac.id

Abstrak

Penelitian terkait dengan struktur aljabar fuzzy telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Semigrup merupakan struktur aljabar sederhana yang hanya melibatkan satu operasi biner dan bersifat asosiatif. Penelitian terhadap ideal fuzzy semigrup telah dilakukan pada tulisan sebelumnya. Pada penelitian sebelumnya juga telah diselidiki tentang sifat-sifat ideal fuzzy semigrup yang dibangun oleh subhimpunan fuzzy, yang selanjutnya dikembangkan pada bi-ideal fuzzy maupun ideal interior fuzzy-nya.

Pada tulisan ini akan dikaji secara khusus bagaimana mendefinikan suatu ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu fuzzy singleton pada suatu semigrup. Selanjutnya dikembangkan pada penyelidikan terhadap sifat-sifatnya.

Sebagai langkah awal didefinisikan suatu ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu subhimpunan fuzzy. Definisi ini dimotivasi oleh pendefinisian ideal yang dibangun oleh himpunan biasa. Selanjutnya, berdasarkan karakter suatu fuzzy singleton yang merupakan subhimpunan fuzzy dibentuk beberapa ideal fuzzy terkecil yang dibangun oleh suatu fuzzy singleton.

Kata kunci: Subhimpunan fuzzy, subsemigrup fuzzy, ideal fuzzy, fuzzy singleton

PENDAHULUAN

Penelitian terkait dengan struktur aljabar fuzzy telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Definisi subhimpunan fuzzy dari suatu himpunan pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Rosenfeld memperkenalkan konsep subgrup fuzzy dari suatu grup. Sementara penelitian tersebut dikembangkan pada konsep subsemigrup fuzzy dari suatu semigrup beserta sifat-sifatnya. Beberapa penelitian terkait dengan struktur subsemigrup fuzzy ini telah dilakukan oleh Karyati, dkk diantaranya adalah tentang ideal fuzzy suatu semigrup dan ideal utama fuzzy semigrup beserta sifat-sifatnya. Dalam tulisan ini akan disajikan hasil kajian teori tentang ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu fuzzy singleton pada suatu semigrup dan beberapa sifat terkait dengan fuzzy singleton tersebut.

Misalkan S adalah semigrup. Subhimpunan tak kosong I dari S disebut ideal jika $SI, IS \subseteq I$. Misalkan I ideal pada semigrup S, ideal I disebut prime jika untuk dua ideal A, B pada semigrup S dengan $AB \subseteq I$ berakibat $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$. Jika X adalah himpunan bagian dari semigrup S maka (X) menotasikan ideal semigrup S yang dibangun oleh X.

Asaad (1991), Kandasamy (2003) dan Mordeson & Malik (1998) mendefinisikan suatu subsemigrup fuzzy sebagai berikut: misalkan S adalah semigrup, fungsi $\mu: S \longrightarrow [0,1]$ disebut subsemigrup fuzzy jika untuk setiap $x, y \in S$, berlaku $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Misalkan λ dan μ subhimpunan fuzzy dari S, yaitu suatu fungsi dari S ke interval $[0,1]$, hasil operasi $\lambda \circ \mu$ didefinisikan sebagai berikut:

$$(\lambda \circ \mu)(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x=yz}\{min\{\mu(y), \mu(z)\}\} \\ 0 \quad \text{jika } x \text{ tidak dapat dinyatakan } x = yz \end{cases}$$

Jika $\lambda(x) \leq \mu(x)$ untuk setiap $x \in S$, maka dikatakan bahwa $\lambda \subseteq \mu$. Selanjutnya $\lambda \subset \mu$ jika dan hanya jika $\lambda \subseteq \mu$ dan terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga berlaku $\lambda(x) < \mu(x)$. Misalkan Ω adalah kolesi subhimpunan fuzzy pada semigrup S, selanjutnya didefinisikan irisan subhimpunan fuzzy, $\bigcap_{\omega \in \Omega} \omega$ dan gabungan subhimpunan fuzzy, $\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega$, sebagai berikut: $(\bigcap_{\omega \in \Omega} \omega)(x) = inf\{\omega(x) | \omega \in \Omega\}$ dan $(\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega)(x) = sup\{\omega(x) | \omega \in \Omega\}$ untuk setiap $x \in S$. Misal $x \in S$ dan $t \in [0,1]$, x_t menotasikan subhimpunan fuzzy dari S yang didefinisikan oleh : $x_t(y) = \begin{cases} t, & \text{jika } y = x \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$

Selanjutnya, x_t disebut *fuzzy singleton* atau *fuzzy point*. Jika x_t dan y_s adalah *fuzzy singleton* maka $x_t + y_s = (x+y)_m$ dan $x_t y_s = (xy)_m$, dengan $m = min\{t, s\}$. Jika x_t adalah *fuzzy singleton* dan $a \in S$, maka $ax_t = (ax)_t$. *Support* suatu subhimpunan fuzzy μ, yang dinotasikan dengan $supp(\mu)$, adalah himpunan $\{x \in S | \mu(x) > 0\}$. Himpunan t – *level* dari subhimpunan fuzzy μ, dinotasikan dengan μ_t, adalah himpunan $\{x \in S | \mu(x) \geq t\}$ dengan $t \in [0,1]$. Peta dari subhimpunan fuzzy μ, atau image dari μ dinotasikan dengan $Im(\mu)$. Subhimpunan fuzzy μ dikatakan mempunyai sifat suprimum jika setiap subhimpunan tak kosong dari $Im(\mu)$ mempunyai elemen maksimal. Subhimpunan fuzzy μ disebut ideal fuzzy semigrup S, jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu(x,y) \geq maks\{\mu(x), \mu(y)\}$. Jika μ ideal fuzzy pada semigrup S , maka μ_t adalah ideal pada S. Misalkan μ subhimpunan fuzzy pada semigrup S, (μ) menotasikan irisan semua ideal fuzzy pada semigrup S yang memuat μ. Dalam hal ini dapat dinyatakan sebagai: $(\mu) = \bigcap \lambda_i$, $\mu \leq \lambda_i$, λ_i adalah ideal fuzzy pada S, untuk setiap i. Dalam hal ini, (μ) disebut ideal fuzzy yang dibangun oleh μ.

PEMBAHASAN

Berdasarkan definisi fuzzy singleton maupun ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu himpunan fuzzy, selanjutnya dibentuk ideal fuzzy lain yang disajikan dalam lemma berikut:

Lemma 2.1. *Misalkan x_t suatu fuzzy singleton pada semigrup S. Selanjutnya dibentuk suatu pemetaan (x_t) sebagai berikut*:

$$(x_t)(y) = \begin{cases} t, & \text{jika } y \in (x) \\ \\ 0, & \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Untuk suatu $y \in S$, dengan (x) adalah ideal pada S yang dibangun oleh x. Sehingga (x_t) adalah ideal fuzzy yang dibangun oleh x_t.

Bukti:

- Dibuktikan bahwa (x_t) ideal fuzzy . Ambil $y, z \in S$ dan $y, z \in (x)$, sehingga diperoleh: $y = rx$ dan $z = qx$ untuk suatu $r, q \in S$. Sehingga $yz \in (x)$, yang berakibat:

  $(x_t)(yz) = t \geq maks\{t, t\} = maks\{(x_t)(y), (x_t)(z)\}$

  Ambil $y, z \in S$ dan $y \notin (x), z \in (x)$, akibatnya $yz \in (x)$ sehingga diperoleh:

  $(x_t)(yz) = t \geq maks\{0, t\} = maks\{(x_t)(y), (x_t)(z)\}$

  Untuk kasus yang lain, bukti sejalan.

- Dibuktikan $x_t \subseteq (x_t)$ atau $x_t(y) \leq (x_t)(y)$ untuk setiap $y \in S$
  $x_t(y) = t,$ untuk $x = y$ dan $x_t(y) = 0$ untuk $x \neq y$
  Sedangkan $(x_t)(y) = t$, untuk $y \in (x)$, dan nol untuk yang lain. Untuk kasus ini dapat dilihat bahwa nilai $x_t(y) = t \leq (x_t)$(y)
- Misalkan terdapat ideal lain yang memuat x_t, misal (x'_t) sehingga $x_t(y) \leq (x'_t)(y)$ untuk setiap $y \in S$. Selanjutnya dapat dibuktikan $(x'_t) \subseteq (x_t)$ atau dipenuhi $(x'_t)(y) \leq (x_t)(y)$, untuk setiap $y \in S$.

Lemma berikut memberikan pernyataan sifat-sifat dari fuzzy singleton:

Lemma 2.2. *Misalkan x_t suatu fuzzy singleton pada semigrup S. Pernyataan-pernyataan berikut berlaku:*

i. *Untuk setiap $y \in S$, berlaku:*

$$(S \circ x_t \circ S)(y) = \begin{cases} t, & y \in SaS \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

ii. $(x_t) = x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S$

iii. $(x_t)^3 = S \circ x_t \circ S$

Bukti

iii. Berdasarkan hasil bagian ii., diperoleh:

$$(x_t)^3 = (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)^2 \circ x_t$$

Dengan

$$(x_t)^2 = (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S) \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)$$
$$\subseteq S \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)$$
$$= (S \circ x_t) \cup \big(S \circ (x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)\big)$$
$$= (S \circ x_t) \cup \big((S \circ x_t \circ S) \cup S \circ (S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)\big)$$
$$= (S \circ x_t) \cup (S \circ x_t \circ S)$$

Selanjutnya diperoleh:

$$(x_t)^3 = (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)^2 \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)$$
$$\subseteq ((S \circ x_t) \cup (S \circ x_t \circ S)) \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)$$
$$\subseteq (S \circ x_t) \cup (S \circ x_t \circ S)$$

Misalkan A subhimpunan dari semigrup S, maka fungsi karakteristik pada himpunan A, yang dinotasikan dengan C_A didefinisikan sebagai berikut:

$$(C_A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in S \backslash A \end{cases}$$

Fungsi karakteristik ini dapat dipandang sebagai subhimpunan fuzzy pada S. Untuk $t \in [0,1]$, didefinisikan subhimpunan fuzzy pada S sebagai berikut:

$$tC_A(x) = \begin{cases} t, & x \in A \\ 0, & x \in S \backslash A \end{cases}$$

Berdasarkan definisi tersebut, diperoleh sifat yang tercantum dalam lemma sebagai berikut:.

Lemma 2.3. *Jika A adalah subhimpunan dari semigrup S dan $t \in [0,1]$, maka pernyataan berikut dipenuhi:*

i. $tC_A \circ tC_B = tC_{AB}$
ii. $tC_A \cap tC_B = tC_{A\cap B}$
iii. $tC_A = \bigcup_{a\in A} a_t$
iv. $S \circ tC_A = tC_{SA}$
v. *Jika A ideal di S, maka tC_A adalah ideal fuzzy pada S*

Bukti:

i. Ambil sebarang $x \in S$, sehingga diperoleh:

$$(tC_A \circ tC_B)(x) = \sup_{x=yz}\{min\{tC_A(y), tC_B(z)\}\}$$

Berdasarkan definisinya, maka diperoleh:

$$(tC_A)(y) = \begin{cases} t, & y \in A \\ 0, & y \in S\backslash A \end{cases} \text{ dan } (tC_B)(z) = \begin{cases} t, & z \in B \\ 0, & z \in S\backslash B \end{cases}$$

a. Untuk kasus $y \in A, z \in B$, sehingga $yz \in AB$

$$(tC_A \circ tC_B)(x) = \sup_{x=yz}\{min\{tC_A(y), tC_B(z)\}\}$$
$$= \sup_{x=yz}\{min\{t,t\}\} = t = (tC_{AB})(x)$$

b. Untuk kasus $y \notin A,\ z \in B$ atau $y \in A,\ z \notin B$, sehingga $yz \notin AB$

$$(tC_A \circ tC_B)(x) = \sup_{x=yz}\{min\{tC_A(y), tC_B(z)\}\}$$
$$= \sup_{x=yz}\{min\{0,t\}\} = 0 = (tC_{AB})(x)$$

ii. Ambil sebarang $x \in S$, sehingga diperoleh:

$(tC_A \cap tC_B)(x) = min\{(tC_A)(x), (tC_B)(x)\}$, dimana:

$$(tC_A)(x) = \begin{cases} t, & x \in A \\ 0, & x \in S\backslash A \end{cases} \text{ dan } (tC_B)(x) = \begin{cases} t, & x \in B \\ 0, & x \in S\backslash B \end{cases}$$

a. untuk kasus $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A \cap B$

$$(tC_A \cap tC_B)(x) = min\{(tC_A)(x), (tC_B)(x)\}$$
$$= min\{t,t\} = t = (tC_{A\cap B})(x)$$

b. Untuk kasus $x \notin A$ dan $x \in B$ atau $x \notin A \cap B$

$$(tC_A \cap tC_B)(x) = min\{(tC_A)(x), (tC_B)(x)\}$$
$$= min\{0,t\} = 0 = (tC_{A\cap B})(x)$$

Untuk kasus $x \in A$ dan $x \notin B$ atau $x \notin A \cap B$, sejalan

iii.

iv. Ambil $x \in S$, sehingga diperoleh:

$$(S \circ tC_A)(x) = \sup_{x=yz}\{min\{S(y), (tC_A)(z)\}\}$$

a. Untuk kasus $y \in S$ dan $z \in A$, sehingga $x \in S$, sehingga:

$$(S \circ tC_A)(x) = \sup_{x=yz}\{min\{S(y), (tC_A)(z)\}\}$$
$$= \sup_{x=yz}\{min\{1,t\}\} = t = (tC_{SA})(x)$$

b. Untuk kasus $y \notin S$ dan $z \in A$ atau $x = yz \notin SA$, sehingga:

$$(S \circ tC_A)(x) = \sup_{x=yz}\{min\{S(y),(tC_A)(z)\}\}$$
$$= \sup_{x=yz}\{min\{0,t\}\} = 0 = (tC_{SA})(x)$$

c. Untuk kasus yang lain bukti sejalan

v. Jika A ideal di S, maka tC_A adalah ideal fuzzy pada S

Ambil $x, y \in A$ maka $xy \in A$, sebab diketahui A suatu ideal di S. Selanjutnya diperoleh:
$(tC_A)(xy) = t = maks\{t,t\} \geq maks\{(tC_A)(x),(tC_A)(y)\}$
Untuk kasus $x \in A$, $y \notin A$, sehingga $xy \in A$, sehingga diperoleh:
$(tC_A)(xy) = t = maks\{t,0\} \geq maks\{(tC_A)(x),(tC_A)(y)\}$
untuk kasus yang bukti sejalan

KESIMPULAN

Berdasarkan paparan pada bagian pembahasan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Misalkan x_t suatu fuzzy singleton pada semigrup S. Selanjutnya dibentuk suatu pemetaan (x_t) sebagai berikut: $(x_t)(y) = t$ jika $y \in (x)$ dan nol untuk yang lain, maka (x_t) adalah ideal fuzzy yang dibangun oleh x_t.
2. Untuk setiap $y \in S$, berlaku:
$$(S \circ x_t \circ S)(y) = \begin{cases} t, & y \in SaS \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$
3. $(x_t) = x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S$
4. $(x_t)^3 = S \circ x_t \circ S$
5. $tC_A \circ tC_B = tC_{AB}$
6. $tC_A \cap tC_B = tC_{A\cap B}$
7. $tC_A = \bigcup_{a\in A} a_t$
8. $S \circ tC_A = tC_{SA}$
9. Jika A ideal di S, maka tC_A adalah ideal fuzzy pada S

DAFTAR PUSTAKA

[1] Howie, J.M. 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London

[2] Kandasamy, W.B.V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA

[3] Karyati, et.al. 2008. Ideal Fuzzy Semigrup. *Seminar Nasional MIPA dan Pendidikan MIPA di FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 30 Mei 2008*. Yogyakarta

[4] Karyati, et.al. 2008. The Fuzzy Version Of The Fundamental Theorem Of Semigroup Homomorphism. *The 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3)Institut Pertanian Bogor, Indonesia, 5-6 August 2008*. Bogor

[5] Karyati, et.al. 2009.Ideal Utama Fuzzy dan Sifat-Sifatnya. *Seminar Nasional Matematika, UNPAR, Bandung*

[6] Mordeson, J.N, Malik, D.S. 1998. *Fuzzy Commutative Algebra.* World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore