TRANSFORMASI HOPF-COLE PADA APPROKSIMASI DIFUSI UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN TRANSFER RADIASI DALAM *INVERSE PROBLEM* PENCITRAAN KANKER OTAK

Jumini[1], Erna Apriliani[2], Mahmud Yunus[3]

MTsN Balen Bojonegoro, Mahasiswa S2 Matematika ITS Surabaya[1]
Juminimtk@yahoo.com
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, ITS Surabaya[2]
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, ITS Surabaya[3]

Abstrak

Persamaan transfer radiasi atau *Radiative Transfer Equation* (RTE) adalah persamaan differensial integral yang mendeskripsikan transfer energi photon yang bergerak menyinari jaringan otot halus yang tembus cahaya, seperti otak. Penyinaran digunakan untuk pencitraan jaringan dan mendapatkan informasi tentang kelainan jaringan otot seperti kanker otak. Pencitraan kanker otak adalah salah satu contoh *inverse problem*. Pada makalah ini dikaji persamaan transfer radiasi dan menyelesaikannya dengan menerapkan metode approksimasi difusi dan transformasi Hopf-Cole. Kedua metode tersebut digunakan untuk menghitung batas pengukuran kepadatan photon, koefisien absorpsi dan difusi pada otak. Dari hasil simulasi diketahui bahwa penyelesaian *inverse problem* pencitraan kanker otak dengan metode transformasi Hopf-Cole lebih stabil jika dibandingkan penyelesaian dengan metode approksimasi difusi.

Kata kunci: Approksimasi Difusi, *Inverse Problem*, Transformasi Hopf-Cole.

PENDAHULUAN

Otak adalah pusat kehidupan. Segala aktivitas kehidupan, hingga yang sekecil-kecilnya, hanya bisa terjadi melalui mekanisme yang diatur oleh otak. Dalam waktu yang bersamaan otak harus menjalankan beribu-ribu aktivitas sekaligus. Seperti bagian tubuh lain, otak bisa terkena tumor atau kanker . Bedanya, jika pada bagian tubuh lain tumor jinak kadang tidak mengganggu dan tidak berbahaya, di otak tumor jinakpun bisa sangat mengganggu dan membahayakan nyawa.

Begitu pentingnya fungsi otak, maka harus segera diambil tindakan jika terjadi gejala-gejala kanker otak. Tindakan awal adalah harus dilakukan tes pencitraan dengan salah satu cara yang sudah ada yaitu *Computed Axial Tomography* (CAT), *Event-related optical signal* (EROS), *Magnetic resonance imaging* (MRI), *Functional magnetic resonance imaging* (FMRI), *Electroencepalography* (EEG), *Magnetoencephalography* (MEG), *Positron emission tomography* (PET), *Single photon emission computed tomography* (SPECT). Semua cara tersebut mempunyai kelebihan tetapi juga mempunyai kelemahan diantaranya membutuhkan biaya yang besar.

Optical tomography telah diakui sebagai suatu tehnik diagnostik yang ideal karena biayanya rendah dan sangat sedikit efek sampingnya (Tahir, 2007). Selanjutnya tehnik pencitraan ini dikenal dengan *Diffuse optical imaging* (DOI) atau *Diffuse optical tomography* (DOT). DOT, adalah salah satu contoh *invers problem,* yang merupakan suatu alat diagnostik yang potensial untuk mendeteksi pertumbuhan jaringan otot halus yang tembus cahaya. Dalam hal ini pengukuran pengaburan dan pemancaran cahaya infra merah pada permukaan tubuh digunakan untuk mengestimasi sifat internal optik pada tubuh dan rekonstruksi gambar dari media yang disinari (Kaipio dan Somersalo, 2004). Pencitraan *optical tomography* dilakukan untuk mendapatkan informasi tentang kelainan jaringan otot seperti kanker payudara dan tumor otak (Tahir, 2007).

Penyinaran pada jaringan dapat dimodelkan sebagai fenomena perpindahan photon. Secara umum model perpindahan photon adalah persamaan transfer radiasi (Radiative Transfer Equation (RTE)). Transfer radiasi adalah fenomena fisik transfer energi dalam bentuk radiasi elektromagnetik. Penyebaran radiasi melalui medium dipengaruhi oleh absorpsi, emisi dan proses pengaburan. Persamaan tranfer radiasi dapat menjelaskan interaksi ini secara matematis yang merupakan persamaan deferensial integral dan mempunyai ketergantungan pada difusi dan parameter absorpsi sebagai koefisien pokok yang tidak diketahui. Dalam masalah ini akan diprediksi batas pengukuran pada kepadatan photon, koefisien absorpsi dan difusi dalam jaringan.

Telah diketahui secara umum bahwa approksimasi difusi berdasarkan *invers problem* pada *optical tomography* secara eksponensial tidak stabil (Natterer, 2001). Dalam tulisan ini akan dikaji persamaan transfer radiasi dan menyelesaikan persamaan tersebut dengan approksimasi difusi untuk menghitung batas pengukuran photon, koefisien absorpsi dan difusi pada pencitraan kanker otak. Untuk memperbaiki kestabilan penyelesaian invers problem dengan approksimasi difusi akan digunakan transformasi Hopf-Cole. Adapun manfaat penelitian ini adalah didapatkan penyelesaian invers problem pencitraan kanker otak baik dengan Approksimasi difusi maupun dengan transformasi Hopf-Cole. Penerapan approksimasi difusi dan transformasi Hopf-Cole pada persamaan transfer radiasi dibatasi untuk medium background konstan yang homogen berdimensi satu.

METODE PENELITIAN

Langkah awal dalam penelitian ini adalah mengkaji persamaan transfer radiasi (*Radiative Transfer Equation* (RTE)). RTE adalah sebuah persamaan differensial yang mendiskripsikan radiasi $L(\vec{r},\hat{s},t)$. Persamaan ini dapat diturunkan melalui hukum kekekalan energi. Singkatnya, RTE menunjukkan sinar dari energi cahaya yang hilang melalui penyerapan dan penyebaran dari sinar dan tambahan sumber cahaya dalam jaringan yang akan dibuat gambarnya. RTE (persamaan Boltzman) ditulis sebagai berikut (Wang dan Wu, 2007) :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L(\vec{r},\hat{s},t)}{\partial t} = -\hat{s}.\nabla L(\vec{r},\hat{s},t) - \mu_t L(\vec{r},\hat{s},t) + \mu_s \int_{4\pi} L(\vec{r},\hat{s},t) P(\hat{s}',\hat{s}) d\Omega' + Q(\vec{r},\hat{s},t) \quad (1)$$

Dengan keterangan sebagai berikut:

- c adalah kecepatan cahaya yang masuk dalam jaringan, ditentukan dengan indeks refraksi relatif
- $\mu_t = \mu_\alpha + \mu_s$, koeffisien punahan
- $P(\hat{s}',\hat{s})$ adalah fungsi keadaan yang merepresentasikan probabilitas dari cahaya dengan arah propagasi $\hat{s}$ yang disebarkan pada sudut solid $d\Omega$ mengelilingi $\hat{s}$. Dalam sebagian besar kasus , fungsi keadaan hanya bergantung pada sudut antara penyebaran $\hat{s}'$ dan penyerapan cahaya dengan arah $\hat{s}$. Dengan kata lain $P(\hat{s}',\hat{s}) = P(\hat{s}'.\hat{s})$. Penyebaran yang tidak isotropi dapat diekspresikan sebagai berikut:
  $$g = \int_{s=4\pi} (\hat{s}'.\hat{s}) P(\hat{s}'.\hat{s}) d\Omega$$
- $Q(\vec{r},\hat{s},t)$ mendiskripsikan sumber cahaya.

Langkah kedua setelah dikaji persamaan tranfer radiasi adalah dilakukan metode approksimasi. Pada umumnya RTE sulit diselesaikan tanpa didahului dengan approksimasi. Approksimasi yang digunakan disini adalah approksimasi difusi yang pada akhirnya didapatkan persamaan difusi.

Langkah ketiga dalam penelitian ini adalah transformasi Hopf-Cole untuk memperbaiki kestabilan approksimasi difusi pada invers problem pencitraan kanker otak dan menemukan solusi analitik untuk medium background konstan yang homogen berdimensi satu. Secara umum transformasi Hopf-Cole adalah transformasi yang digunakan untuk mencari penyelesaian dari persamaan differensial parsial non linear ke dalam penyelesaian persamaan differensial parsial linear.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi hubungan antara parameter estimasi dengan fungsional biaya menggunakan software matlab untuk mengetahui perbandingan tingkat kestabilan penyelesaian *inverse problem* dengan metode approksimasi difusi dan transformasi Hopf-Cole.

PEMBAHASAN

Salah satu tehnik pencitraan otak adalah dengan *Diffuse Optical Tomography* (DOT). DOT merupakan alat *non-invasive* yang digunakan untuk mendeteksi dan merekonstruksi sifat optik didalam media yang sangat hambur misalnya untuk mendeteksi kanker otak. DOT menggunakan cahaya near-infra merah untuk menyelidiki bagian dalam tubuh seperti otak yaitu pada pergantian oksigen atau keadaan fisiologis lainnya. Tidak seperti sinar-X, energi photon yang rendah tidak berjalan dalam lintasan yang lurus, melainkan perambatannya menyebar (*diffuse*) sehingga memberikan sedikit informasi. Untuk mengatasi hal ini DOT menggunakan detektor pada permukaan otak dan kemudian memproses informasi ini dengan model statistik dari transport photon untuk membuat gambar 3-D. Forward model dalam DOT dideskripsikan sebagai model perambatan photon pada jaringan otak yang diberikan dengan approksimasi difusi pada persamaan transfer radiasi Boltzmann. Beberapa besaran penting berdasar pada definisi radiasi adalah (Ambrocio, 2008):

a. Spektrum radiasi

Spektrum radiasi L_v adalah aliran energi per satuan daerah normal per satuan sudut padat per satuan waktu per satuan frekuensi massa luas bidang.

b. Radiasi

Radiasi L didefinisikan sebagai spektrum radiasi yang mengintegrasikan sebuah batasan range frekuensi $[v, v+\Delta v]$

$$L(\vec{r},\hat{s},t) = L_v(\vec{r},\hat{s},t)\Delta v \qquad (2)$$

Dengan $\vec{r}$ menunjukkan posisi, $\hat{s}$ menunjukkan arah vektor satuan dan t menunjukkan waktu.

c. Intensitas cahaya

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{s=4\pi} L(\vec{r},\hat{s},t)d\Omega \qquad (3)$$

Dengan $d\Omega$ menunjukkan defernsial sudut padat

d. Kepadatan aliran cahaya

Kepadatan aliran cahaya J adalah jaringan aliran energi per daerah per satuan waktu.

$$J(\vec{r},t) = \int_{s=4\pi} \hat{s}L(\vec{r},\hat{s},t)d\Omega \qquad (4)$$

Pada approksimasi difusi diasumsikan bahwa penyinaran cahaya near-infra merah pada otak adalah isotropik yaitu penyebarannya merata disetiap komponen jaringan otak.. Untuk mempelajari radiasi dalam batas difusi, radiasi direpresentasikan sebagai sebuah ekspansi *spherical harmonic* sebagai berikut:

$$L(\vec{r},\hat{s},t) \approx \sum_{n=0}^{1}\sum_{m=-n}^{n} L_{n,m}(\vec{r},t)Y_{n,m}(\hat{s}) \qquad (5)$$

Dengan $Y_{n,m}$ menunjukkan *spherical harmonic* dan $L_{n,m}$ menunjukkan koeffisien ekspansi. Komponen isotropik dari L sesuai dengan $n=0$ dan $m=0$. Pada saat $n=1$ dan $m=-1,0,1$ ada komponen yang tidak isotropik. Dengan subtitusi persamaan (5) ke persamaan (3) akan diperoleh persamaan (6) yang berarti syarat isotropik adalah intinsiras cahaya dibagi dengan sudut padat penuh 4π .

$$L_{0,0}(\vec{r},t)Y_{0,0}(\hat{s}) = \frac{\Phi(\vec{r},t)}{4\pi} \tag{6}$$

Perkalian persamaan (5) dengan persamaan $\hat{s}$ dan mensubtitusikannya ke persamaan (4) akan didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\sum_{m=-1}^{1} L_{1,m}(\vec{r},t)Y_{1,m}(\hat{s}) = \frac{3}{4\pi} J(\vec{r},t).\hat{s} \tag{7}$$

Dari persamaan (6) dan (7) maka persamaan ekspansi *spherical harmonik* pada persamaan (5) akan menjadi:

$$L(\vec{r},\hat{s},t) = \frac{1}{4\pi}\Phi(\vec{r},t) + \frac{3}{4\pi} J(\vec{r},t) \tag{8}$$

Subtitusi persamaan (8) ke persamaan transfer radiasi persamaan (1) dan mengintegralkannya diperoleh persamaan differensial skalar sebagai berikut:

$$\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{c\partial t} + \mu_\alpha\Phi(\vec{r},t) + \nabla J(\vec{r},t) = Q(\vec{r},t) \tag{9}$$

Subtitusi persamaan (8) ke dalam persamaan transfer radiasi, persamaan (1) dan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $\hat{s}$, kemudian mengintegralkannya, diperoleh:

$$\frac{\partial J(\vec{r},t)}{c\partial t} + (\mu_\alpha + \mu_s')J(\vec{r},t) + \frac{1}{3}\nabla\Phi(\vec{r},t) = 0 \tag{10}$$

Diasumsikan nilai $\frac{\partial J(\vec{r},t)}{c\partial t}$ sangat kecil maka persamaan (10) menjadi:

$$J(\vec{r},t) = -D\nabla\Phi(\vec{r},t) \tag{11}$$

Subtitusi persamaan (11) ke dalam persamaan (9) diperoleh persamaan difusi yang bergantung pada waktu sebagai berikut:

$$\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{c\partial t} + \mu_\alpha\Phi(\vec{r},t) - \nabla[D\nabla\Phi(\vec{r},t)] = Q(\vec{r},t) \tag{12}$$

$D = \frac{1}{3(\mu_\alpha + \mu_S')}$ adalah koefesien difusi dan $\mu_s' = (1-g)\mu_s$ adalah reduksi koefisien penyebaran. Selanjutnya, approksimasi difusi pada persamaan transfer radiasi dapat ditulis pada kasus yang tidak tergantung pada waktu sebagai berikut:

$$-\vec{\nabla}D(\vec{r})\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) + \mu_\alpha(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = Q(\vec{r}) \tag{13}$$

Dalam penelitian ini jika diasumsikan Ω adalah otak yang menjadi domain dalam pembahasan pada permukaan $\partial\Omega$, maka dapat didefinisikan invers problemnya adalah sebagai berikut: diberikan data Φ yaitu intensitas cahaya, maka akan ditemukan koefisien difusi D dan koefisien penyerapan μ_α. Koefisien difusi D dan koefisien penyerapan μ_α selanjutnya disebut q. Objek dari invers atau parameter estimasi dalam masalah ini dipilih sebuah parameter q^*

dengan meminimumkan kriteria eror atau fungsional biaya. Secara khusus fungsional biaya J_λ diberikan sebagai berikut (Khan, 2007):

$$J_\lambda(q) = \sum_{i=1}^{N} \left|\Phi(\varsigma_i, q) - z_i\right|^2 + \lambda \left\|q - q_0\right\|^2$$

Dengan ς_i berada dalam $\partial\Omega$ dan N adalah banyaknya pengukuran, z_i pengukuran kepadatan photon pada batas yaitu pada permukaan kepala dan λ adalah parameter regularisasi.

Sebagai contoh, dalam satu dimensi dengan $\Omega = [0, l]$, approksimasi difusi dengan background tetap adalah persamaan Strum-Louiville sebagai berikut:

$$-\nabla^2\Phi + q^2\Phi = 0 \tag{14}$$

Dengan $q^2 = \dfrac{\mu_\alpha}{D}$ adalah konstan, dan kondisi batas Rubin sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Phi(0) - \alpha\nabla\Phi(0) = 0 \\ \Phi(l) - \alpha\nabla\Phi(l) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Dalam masalah ini invers problemnya adalah mengestimasi skalar q dari pengukuran kepadatan photon z yang diukur pada $x = 0$ atau $x = l$

Transformasi Hopf-Cole dimulai dengan transformasi Φ sebagai berikut (Evan, 1998):

$$\nabla\psi = D\nabla(\ln(\Phi)) \tag{16}$$

Persamaan (16) adalah transformasi Hopf-Cole kemudian persamaan (14) dan (15) berubah menjadi:

$$-\nabla^2\psi - \frac{|\nabla\psi|^2}{D} + q^2 D = 0 \tag{17}$$

Dengan $q^2 = \dfrac{\mu_\alpha}{D}$ adalah konstan,dengan kondisi batas rubin:

$$\begin{aligned} \alpha\nabla\psi(0) = D \\ \alpha\nabla\psi(l) = -D \end{aligned} \tag{18}$$

Persamaan (14) dan (15) dapat diselesaikan secara analitik dan solusi untuk $x < \eta$ adalah:

$$\Phi(x, \eta; q) = \frac{\left(e^{q\eta} - \gamma e^{-q\eta}\right)\left(e^{q\eta} - \beta e^{-q\eta}\right)}{2qD(\beta - \gamma)} \tag{19}$$

Dengan keterangan:

$$\gamma = \frac{e^{2lq}}{\beta}$$

$$\beta = \frac{1 - \alpha q}{1 + \alpha q}$$

Jika pengukuran dilakukan pada $x = 0$, maka inverse problemnya adalah mengestimasi q dari data z yang diukur pada $x = 0$. Dengan demikian parameter pada pemetaan output diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Tq &= C(\Phi(x,\eta;q)) \\ &= \Phi(0,\eta;q) \\ &= \frac{(e^{q\eta} - \gamma e^{-q\eta})(1+\beta)}{2(\beta-\gamma)} \end{aligned} \tag{20}$$

Persamaan (10) merupakan fungsi nonlinear dari parameter q yang diharapkan. Dengan cara yang sama penyelesaian dari persamaan (7) dan (8) adalah sebagai berikut:

$$\psi(x;q) = D\ln(\beta - e^{2qx}) - qDx \tag{21}$$

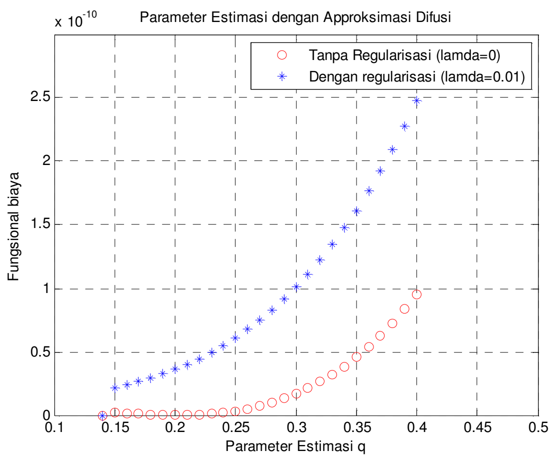
Dan untuk pengukuran pada $x = 0$, parameter pada pemetaan output diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tilde{T}q &= C\psi(x;q) \\ &= \psi(0;q) \\ &= D\ln(\beta - 1) \end{aligned} \tag{22}$$

Selanjutnya dilakukan simulasi hubungan antara fungsional biaya $J_\lambda(q)$ untuk medium background tetap yang homogen dalam satu dimensi dengan parameter estimasi q menggunakan software matlab. Pada simulasi ini diberikan kondisi batas Rubin dengan $\mu_\alpha = 0{,}012mm^{-1}$ dan $D = 0{,}33mm$. Sehingga estimasi awal untuk $q_0 = 0{,}1907mm^{-1}$. Untuk metode approksimasi difusi, besarnya fungsional biaya dapat dihitung dengan rumus:

$$J_\lambda q = \left|\Phi(0;q) - \Phi(0;q_0)\right|^2 + \lambda\left|q - q_0\right|^2$$

Dengan $\Phi(0;q)$ adalah fungsi solusi analitik pada persamaan (19). Simulasi pada gambar 1 menggunakan dua parameter regularisasi λ yaitu $\lambda = 0$ (tanpa regularisasi) dan $\lambda = 0.01$.



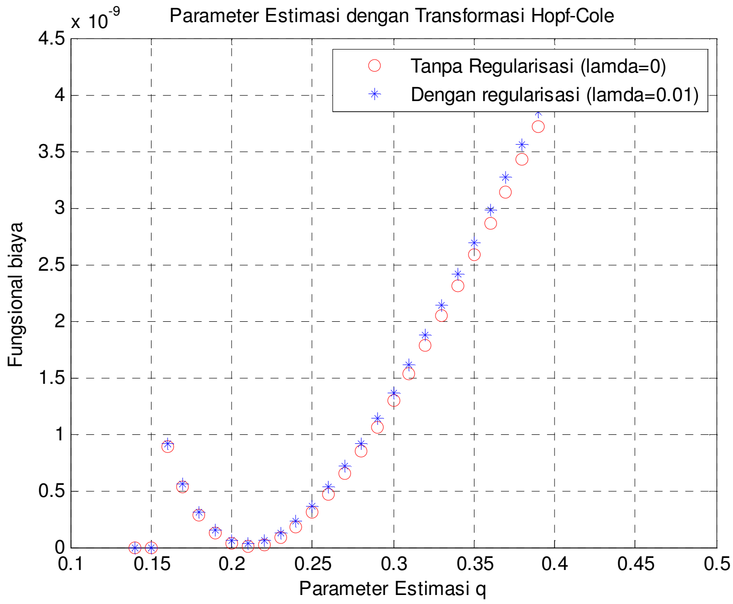
Gambar 1. Parameter estimasi q dengan approksimasi difusi

Pada gambar 1, grafik merah menunjukkan besarnya fungsional biaya dengan $\lambda = 0$ (tanpa regularisasi) dan grafik biru menunjukkan besarnya fungsional biaya dengan regularisasi $\lambda = 0.01$. Pada gambar 1 juga terlihat bahwa parameter regularisasi sangat berpengaruh terhadap besarnya fungsional biaya, hal ini dibuktikan dengan grafik merah yang menyimpang jauh dengan grafik biru, hal ini juga menandakan bahwa metode approksimasi difusi kurang stabil dalam penyelesaian invers problem.

Sedangkan untuk metode transformasi Hopf-Cole, besarnya fungsional biaya dapat dihitung dengan rumus:

$$J_{\lambda} q = \left| \psi(0;q) - \psi(0;q_0) \right|^2 + \lambda \left| q - q_0 \right|^2$$

Dengan $\psi(0;q)$ adalah fungsi solusi analitik pada persamaan (21). Simulasi ini menggunakan dua parameter regularisasi λ yaitu $\lambda = 0$ (tanpa regularisasi) dan $\lambda = 0.01$. Hasil simulasi pada gambar 2 menunjukkan bahwa dengan regularisasi atau tanpa regularisasi, grafik fungsional biaya tidak akan menyimpang jauh, artinya regularisasi tidak mempengaruhi besarnya fungsional biaya. Dengan kata lain, metode transformasi Hopf-Cole akan memperbaiki dan menstabilkan penyelesaian invers problem jika dibandingkan dengan metode approksimasi difusi.



Gambar 2 Parameter estimasi q menggunakan Transformasi Hopf-Cole

KESIMPULAN

penyelesaian *inverse problem* pencitraan kanker otak dengan metode transformasi Hopf-Cole lebih stabil jika dibandingkan penyelesaian dengan metode approksimasi difusi. Hal ini bisa diketahui dari simulasi bahwa grafik hubungan parameter estimasi dengan fungsional biaya baik menggunakan parameter regularisasi atau tanpa regularisasi untuk transformasi Hopf-Cole tidak terjadi banyak perubahan atau sama-sama cekung, jika dibandingkan dengan approksimasi difusi.

DAFTAR PUSTAKA

Ambrocio, E, (2008), " A Self-Consisten Obstacle Scattering Theory for the Diffusion Approximation of the Radiative Transport Equation", *A Technical report submitted in partial fulfillment of the requirement for degree of Master of Science*, University of California, Merced

Evan, LC, (1998), *Partial Differential Equation*, American Mathematical Society, volume 19, Amerika

Kaipio, J dan Somersalo, E, (2004), *Statistical and Computational Invers Problem*, 160, Helsinki dan Kuopio.

Khan, T, R, (2007), " Invers Problem In Optical Tomography Using Diffusion Approximation and Hopf-Cole Transformation", *Departement of Mathematical Science, Clemson University*, SC 29634-0975, Clemson

Natterer, F, (2001), *Mathematical Methods in Image Recontruction*, Siam

Tahir, K, (2007), "*Optical Tomography",* http://www.imperial.ac.uk/research/photonics/reseach/topics/tomog diakses pada tanggal 17 Desember 2010.

Wang, LV, dan Wu, HI, (2007), *Biomedical Optics*, Wiley. ISBN 9780471743040