Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

SIFAT-SIFAT INVARIAN PADA INVERSI

Himmawati Puji Lestari, Caturiyati

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
Email: himmawatipl@yahoo.com, wcaturiyati@yahoo.com

Abstrak

Inversi merupakan pencerminan terhadap suatu lingkaran sedemikian sehingga hasil kali jarak antara titik yang dicerminkan ke pusat lingkaran dengan jarak bayangannya ke pusat lingkaran sama dengan kuadrat jari-jari lingkaran. Dengan mengkaji bayangan suatu objek terhadap inversi, dalam tulisan ini akan ditentukan sifat-sifat invarian terhadap inversi, terutama titik tetap, garis tetap dan lingkaran tetap.

Kata kunci: inversi, invarian, titik tetap, garis tetap, lingkaran tetap

PENDAHULUAN

Hal-hal mendasar yang dibahas dalam transformasi geometri adalah bayangan suatu objek terhadap transformasi dan sifat-sifat transformasi dilihat dari sifat-sifat bayangannya. Salah satu sifat yang penting adalah sifat invarian, yaitu bayangan suatu objek terhadap transformasi adalah objek itu sendiri.

Inversi merupakan salah satu transformasi geometri yang jarang dibahas jika dibandingkan jenis-jenis transformasi yang lain. Inversi merupakan pencerminan di bidang terhadap suatu lingkaran. Dalam tulisan ini akan dibahas invers dari suatu titik, garis, dan lingkaran terhadap suatu inverse. Selanjutnya akan ditentukan titik invariant, garis iinvarian, dan lingkaran invariant terhadap suatu inversi.

Definisi 1

Diberikan lingkaran yang berpusat di titik O dan berjari-jari r, $O(r)$ di R^2. Inversi pada lingkaran ini adalah pemetaan $t : R^2 \setminus \{O\} \to R^2 \setminus \{O\}$ yang didefinisikan oleh

$$t(A) = A'$$

dengan A' terletak pada garis lurus yang melalui O dan A, sepihak dengan A terhadap O, dan memenuhi $OA.OA' = r^2$.

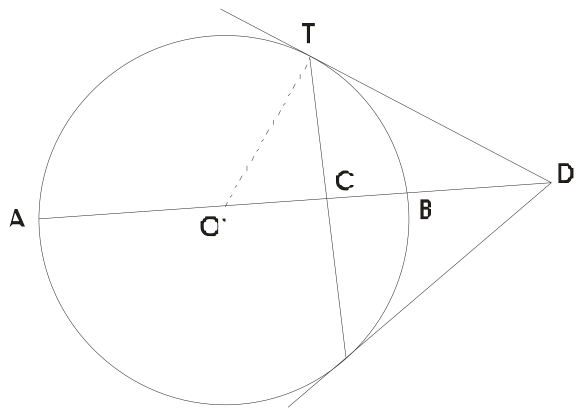
Selanjutnya lingkaran $O(r)$ disebut lingkaran inversi, titik O disebut pusat inversi, r disebut jari-jari inversi, r^2 disebut kuasa inversi, dan titik A' disebut invers titik A terhadap $O(r)$. Inversi dengan pusat O dan kuasa $r^2 > 0$ dinotasikan $I(O, r^2)$.

Definisi di atas mengakibatkan bahwa untuk setiap titik A pada bidang selain titik O terdapat dikorespondensikan dengan tunggal suatu invers titik A', dan jika A' adalah invers A, maka A adalah invers dari A'. Karena tidak ada titik yang berkorespondensi dengan pusat inversi O, maka bukan merupakan suatu transformasi dari himpunan R^2 yang terdiri dari semua titik pada bidang. Agar inversi membentuk suatu transformasi, dapat dilakukan dengan dua cara. Pertama, dengan mengambil $R^2 \setminus \{O\}$ himpunan semua titik pada bidang kecuali titik O, maka inversi merupakan suatu transformasi pada $R^2 \setminus \{O\}$. Kedua, dengan menambahkan pada himpunan S, suatu "*single ideal point at* *infinity Z* menjadi himpunan $R^{2}{}'$ yang akan berkorespondensi dengan pusat inversi. Pada tulisan ini, untuk membentuk transformasi dilakukan dengan cara yang pertama.

Berikut akan dibahas bagaimana menentukan bayangan suatu titik terhadap suatu inversi.

Teorema 1
Suatu titik *D* di luar lingkaran inversi dan suatu titik *C* yang merupakan titik potong dari tali busur singgung dari titik *D* pada lingkaran inversi dan garis diametral $\overleftrightarrow{OD}$ merupakan titik-titik invers.

Bukti
Harus dibuktikan bahwa $OD.OC=r^2$.
Pandang $\Delta\, OTD$ yang siku siku di T.
Dari sifat "tali busur singgung tegak lurus garis diametral" berarti $TC \perp OD$. Menurut sifat pada segitiga siku siku diperoleh bahwa $OD.OC=OT^2=r^2$.



Gambar 1. Invers suatu titik

Dari persamaan $OA.OA'=r^2$ pada definisi, terlihat bahwa (Kunkel, 2003):

1. jika titik A' invers dari titik *A*, maka titik *A* adalah invers dari A';
2. jika titik *A* titik interior lingkaran, maka A' adalah titik eksterior lingkaran;
3. jika titik *A* titik eksterior lingkaran, maka titik A' titik interior;
4. jika titik *A* adalah titik pada lingkaran inversi, maka begitu juga titik A'.

Corollary 2
Jika titik *P* berada di lingkaran inversi, maka inversnya adalah titik itu sendiri.

Bukti
Jika terdapat titik *P* pada lingkaran inversi, maka $OP=r$. Dengan demikian, invers dari *P* adalah *P*' sedemikian sehingga *P'* berada pada garis *OP* dan $OP.OP'=r^2$, yaitu $OP'=r$. Jadi *P'* berada pada titik *P*.

Selanjutnya akan dibahas bagaimana menentukan invers dari suatu garis terhadap suatu inversi. Berdasarkan kedudukan garis tersebut terhadap lingkaran inversi, akan ditentukan invers garis yang melalui pusat inversi, garis yang memotong lingkaran inversi tetapi tidak melalui pusat lingkaran inversi, dan garis yang tidak mempuyai titik persekutuan dengan lingkaran inversi.

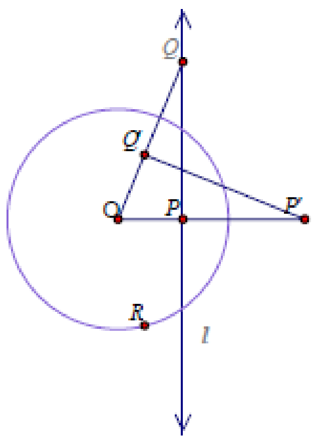
Teorema 3 (Kozai, 2009:8)
Invers dari sebuah garis yang melalui pusat lingkaran inversi adalah garis itu sendiri.

Bukti
Misal garis l melalui pusat inversi O. Misalkan P sebarang titik pada garis l yang tidak sama dengan O. Maka invers dari P adalah P' sedemikian sehingga P' berada di garis OP dan memenuhi $OP.OP'=r^2$. Di pihak lain, $OP=l$. Dengan demikian, invers dari sebarang dua titik yang tidak sama dengan O juga berada pada l. Jadi bayangan suatu garis yang melalui pusat inversi adalah garis itu sendiri.

Dari Teorema 3 diperoleh garis invarian terhadap suatu inversi, yaitu garis yang melalui pusat lingkaran invers. Selanjutnya akan ditentukan invers dari suatu garis yang tidak melalui pusat inversi O.

Teorema 4 (Eves, 1972)
Diberikan lingkaran $O(r)$. Invers dari suatu garis l yang tidak melalui O terhadap $I(O, r^2)$ adalah suatu lingkaran yang melalui O dan diameternya yang melalui O tegak lurus dengan l.

Bukti
Misalkan l memotong $O(r)$ tidak di O. Misalkan P adalah titik potong sinar garis OP dengan l yang saling tegak lurus dan titik Q terletak pada l. Maka $OP.OP'=r^2$ dan $OQ.OQ'=r^2$.
Segitiga ΔOPQ sebangun dengan $\Delta OQ'P'$, dan $\angle OPQ$ sehingga $\angle OQ'P'$ juga siku-siku. Dengan demikian, $\angle OQ'P'$ merupakan sudut keliling lingkaran dengan OP' sebagai diameter, sehingga Q' berada pada lingkaran yang berdiameter OP'. Jadi invers garis l berada pada lingkaran yang berdiameter OP'.
Dengan membalik konstruksi, setiap titik pada garis l mempunyai invers yang berupa titik pada lingkaran berdiameter OP'.



Gambar 2. Invers suatu garis

Teorema 5

Invers lingkaran C melalui *O* terhadap $I(O, r^2)$ adalah suatu garis *l* yang tidak melalui *O* dan tegak lurus dengan diameter *C* melalui *O*.

Bukti

Misalkan titik *A* adalah suatu titik pada lingkaran *C* yang merupakan pasangan titik ujung diameter yang titik ujung lainnya adalah *O*. Misalkan juga *P* sebarang titik pada lingkaran *C* yang berbeda dengan titik *O* dan *A*. Misal titik *A'* dan *P'* invers dari *A* dan *P*. Maka berlaku

$$OA.OA' = OP.OP'$$

sehingga *OP'/OA'=OA/OP* dan segitiga *OP'A'* sebangun dengan segitiga *OAP*. Diperoleh

$$\angle OA'P' = \angle OPA = 90^o.$$

Dengan demikian *P'* terletak pada garis *l* yang melalui *A'* dan tegak lurus dengan *OA*. Sebaliknya, jika *P'* sebarang titik pada garis *l* yang berbeda dengan titik *A'*, misalkan *OP'* memotong lingkaran *C* di *P*. Maka pastilah *P'* merupakan invers dari *P*.

Berdasarkan Corollary 2, diperoleh bahwa lingkaran inversi merupakan lingkaran invarian terhadap inversi.

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh beberapa simpulan bahwa inversi memiliki sifat invarian, yaitu

1. titik invarian adalah titik-titik pada lingkaran inversi,
2. garis invarian adalah garis yang melalui titik pusat lingkaran inversi,
3. lingkaran invarian adalah lingkaran inversi itu sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

Eves, Howard. (1972). *A Survey of Geometry*. Boston : Allyn and Bacon.

Kozai, Kenji., & Libeskind, Shlomo. 2009. *Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry.*: diakses melalui http://jwilson.coe.uga.edu pada tanggal 10 Januari 2011.

Stephen Hugget. (2004). *Inversive Geometry.* http://homepage.mac.com /stephen_huggett/home.html. Didownload pada 26 Juli 2006.

Paul Kunkel (2003). *Inversion Geometry. whistling@whistleralley.com* . Didownload pada 25 Mei 2007.