Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

KARAKTERISTIK PERSAMAAN ALJABAR RICCATI DAN PENERAPANNYA PADA MASALAH KENDALI

Muhammad Wakhid Musthofa

Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
Email: mwakhid_m@yahoo.com

Abstrak

Makalah ini membahas karakteristik persamaan aljabar Riccati yang berperan penting dalam desain sintesis berbagai masalah kendali. Pembahasan karakteristik persamaan ini difokuskan pada pembentukan solusi dari persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem. Selanjutnya disajikan penerapan persamaan aljabar Riccati pada masalah desain pengontrol robust H_∞ dan H_2 serta desain kontrol optimal tipe feedback pada masalah linear quadratic regulator.

Kata kunci: Persamaan aljabar Riccati, kontrol robust, kontrol optimal.

PENDAHULUAN

Permasalahan yang sering muncul dalam teori kontrol adalah masalah analisis dan masalah sintesis. Masalah analisis dapat dipandang sebagai pekerjaan memeriksa sebuah pengontrol yang telah diperoleh apakah sinyal-sinyal terkontrolnya (*tracking error*, sinyal pengontrol) memenuhi sifat-sifat yang diinginkan terhadap semua noise, gangguan dan ketidakpastian model yang diperkenankan. Sedangkan masalah sintesis memfokuskan pada pendesainan sebuah pengontrol dari suatu sistem dinamik sedemikian sehingga sinyal-sinyal terkontrolnya memenuhi sifat-sifat yang diinginkan terhadap semua noise, gangguan dan ketidakpastian model yang diperkenankan. Salah satu persamaan yang berperan penting dalam masalah sintesis adalah persamaan aljabar Riccati.

Persamaan aljabar Riccati ialah persamaan matriks dalam bentuk

$$A^* X + XA + XRX + Q = 0 \tag{1}$$

dengan matriks $Q_{n\times n}$, $R_{n\times n}$ simetris yang berelasi dengan matriks Hamiltonian berukuran $2n\times 2n$

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Matriks Hamiltonian di atas sangat bermanfaat untuk menentukan solusi yang menstabilkan sistem yang berkorespondensi dengan persamaan (1).

PERSAMAAN ALJABAR RICCATI

Solusi Persamaan Aljabar Riccati yang Menstabilkan Sistem

Untuk menentukan solusi persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem, diasumsikan matriks Hamiltonian *H* tidak punya nilai eigen pada sumbu imajiner. Dikarenakan spektrum dari matriks *H* mempunyai sifat simetris terhadap sumbu imajiner, akibatnya $H = -H^*$ dan λ sebagai nilai eigen dari *H* mempunyai sifat λ dan $-\overline{\lambda}$ adalah nilai eigen dari *H*. Dengan demikian matriks *H* akan mempunyai *n* nilai eigen di $\mathrm{Re}(s) < 0$ dan *n* nilai eigen di $\mathrm{Re}(s) > 0$. Didefinisikan $X\_(H) = span\ \{v_i\ ;\ i = 1, 2, ..., n\}$ merupakan subruang invarian berdimensi *n* yang berhubungan dengan nilai-nilai eigen di $\mathrm{Re}(s)<0$ dengan v_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i. Susun vektor-vektor $\{v_i\ ;\ i=1,2,...,n\}$ yang merupakan basis dari $X\_(H)$ menjadi matriks

$$X\_(H)=\mathrm{Im}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

dengan $X_1, X_2 \in C^{nxn}$. Jika X_1 nonsingular atau ekuivalen dengan jika subruang

$$X\_(H), \qquad \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{4}$$

saling komplementer, maka dapat dibentuk $X = X_2 X_1^{-1}$ sebagai solusi dari persamaan (1). Dengan demikian X ditentukan secara tunggal oleh *H* atau dapat ditulis

$$H \mapsto X\ ,$$

atau

$$\mathrm{Ric} : \mathrm{dom}\ (\mathrm{Ric}) \subseteq \mathrm{R}^{2n\times 2n} \to \mathrm{R}^{n\times n}. \tag{5}$$

Fungsi dalam persamaan (5) di atas disebut fungsi Riccati dan dinotasikan dengan Ric. Domain dari fungsi Riccati dinotasikan dengan dom(Ric) dipilih beranggotakan semua matriks Hamiltonian yang mempunyai sifat tidak mempunyai nilai eigen pada sumbu imajiner dan dua subruang dalam persamaan (4) saling komplementer. Matriks *X* yang dihasilkan dari pemetaan fungsi Riccati ($X = Ric(H)$) disebut solusi yang menstabilkan sistem.

Berdasarkan konstruksi di atas, matriks *X* sebagai solusi yang menstabilkan sistem dapat diperoleh dengan algoritma berikut :

1. Himpun semua nilai eigen dari H yang memenuhi $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$ beserta dengan $\{v_i\}$, $i=1,2,...,k\le n$ sebagai vektor eigen dari λ_i. Jika hanya terdapat $k<n$ vektor eigen yang bebas linear akibat adanya nilai eigen yang berulang, maka $n-k$ vektor basis yang lain dikonstruksikan dari vektor eigen tergeneralisasi.
2. Himpunan $\{v_i\ ;\ i=1,2,...,n\}$ akan membentuk subruang $X\_(H)$. Susun subruang tersebut dalam bentuk $X\_(H)=\mathrm{Im}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$.
3. Bentuk $X = X_2 X_1^{-1}$ sebagai solusi persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem.

Sifat - Sifat Persamaan Aljabar Riccati dan Solusinya

Berikut ini dipaparkan beberapa teorema yang membicarakan tentang sifat-sifat dari persamaan aljabar Riccati dan matriks $X = Ric(H)$ sebagai solusi dari persamaan tersebut. Teorema berikut mengkarakterisasi matriks *X* sebagai hasil pemetaan jika matriks *H* diambil dari dom(Ric).

Teorema 1

Diberikan persamaan aljabar Riccati (1) dan matriks Hamiltonian H yang bersesuian. Jika $H \in dom(Ric)$ dan $X = Ric(H)$, maka

1. *X* real simetris,
2. X memenuhi persamaan aljabar Riccati (1),
3. $A+RX$ stabil.

Bukti:

1. Ambil $X_1, X_2 \in C^{n\,x\,n}$ dengan $X\_(H) = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, maka terdapat matriks $H\_ \in R^{n\,x\,n}$ sedemikian sehingga

$$H\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H\_ \tag{6}$$

dengan $H\_$ adalah matriks representasi dari pemetaan $Ric(H\_)$ dengan domain $X\_(H)$. Kalikan persamaan (6) dengan $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J$ dari kiri, dan dengan mengingat JH simetris, diperoleh persamaan Lyapunov

$$(-X_1^* X_2 + X_2^* X_1)H\_ + H\_^*(-X_1^* X_2 + X_2^* X_1) = 0\ . \tag{7}$$

Karena $H\_$ stabil, maka solusi dari persamaan di atas adalah

$$-X_1^* X_2 + X_2^* X_1 = 0\ .$$

Sehingga $X_1^* X_2 = X_2^* X_1$ atau $X_1^* X_2$ Hermit, akibatnya $X = X_2 X_1^{-1} = (X_1^{-1})^* X_1^* X_2\, X_1^{-1}$ juga Hermit. Karena X_1, X_2 selalu dapat dipilih real dan X tertentu dengan tunggal maka X real simetris.

2. Kalikan persamaan (6) dengan X_1^{-1} dari kiri dan dengan $[X \quad -I]$ dari kanan, diperoleh $[X \quad -I]H\begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix} = 0$ yang merupakan persamaan Riccati.

3. Kalikan persamaan $H\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} X_1 H\_ X_1^{-1}$ dengan $[I \quad 0]$ dari kiri, diperoleh $A + RX = X_1 H\_ X_1^{-1}$. Karena $H\_$ stabil maka $A + RX$ juga stabil.

Selanjutnya teorema berikut ini memberikan syarat perlu dan syarat cukup eksistensi penyelesaian yang stabil dari persamaan aljabar Riccati (1) dengan batasan yang diberikan pada matriks *R*.

Teorema 2
Misal H tidak memiliki nilai eigen imajiner dan $R \ge 0$ atau $R \le 0$. Maka $H \in dom(Ric)$ jika dan hanya jika (A, R) dapat distabilkan.

Bukti:
$(\Rightarrow)$ Sistem (A, R) dikatakan dapat distabilkan jika terdapat matriks X sedemikian sehingga sistem *(A+RX)* stabil. Karena $H \in dom(Ric)$ maka $X = Ric(H)$ adalah penyelesaian yang menstabilkan sistem. Akibatnya sistem $(A + RX)$ stabil asimtotik.

$(\Leftarrow)$ Akan ditunjukkan $H \in dom(Ric)$ yakni $X\_(H)$ dan $\operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ saling komplementer. Hal ini ekuivalen dengan menunjukkan X_1 nonsingular $(Ker\ X_1 = 0)$.

Klaim $Ker\ X_1 = 0$ adalah $H\_$ invarian. Andaikan X_1 singular $(Ker\ X_1 \ne 0)$, maka untuk $H\_|_{\ker X_1}$ (pemetaan Ric dengan $dom(Ric) = Ker\ X_1$ petanya ialah $Ric(H\_)$) mempunyai λ

dan X sedemikian sehingga

$$H\_x = \lambda x \tag{8}$$

dengan Re $\lambda < 0, \quad 0 \neq x \in Ker\, X_1$.

Persamaan $H\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H\_$ akan menghasilkan $X_2 x = 0$, sehingga diperoleh $X_1 x = 0$ dan $X_2 x = 0$ yang berakibat $x = 0$. Hal ini kontradiksi dengan persamaan (8). Dengan demikian $(Ker\ X_1 = 0)$. Jadi, X_1 nonsingular.

Teorema 3
Misal (A, B) terstabilkan dan $(C, A,)$ terdeteksi, maka persamaan Riccati

$$A^* X + XA - XBB^* X + C^* C = 0 \tag{1}$$

memiliki solusi semidefinit positif tunggal. Lebih lanjut, solusi tersebut menstabilkan sistem.

Bukti :
Berdasarkan teorema 2 telah dibuktikan bahwa jika (A, B) dapat distabilkan, maka $H \in dom(Ric)$, akibatnya $X = Ric(H) \geq 0$. Ini menunjukkan persamaan aljabar Riccati (1) memiliki solusi semidefinit positif tunggal X. Selanjutnya, kita akan tunjukkan $X \geq 0$ menstabilkan sistem.
Asumsikan $X \geq 0$ memenuhi persamaan aljabar Riccati tapi tidak menstabilkan sistem. Persamaan Riccati yang dimaksud dapat ditulis sebagai

$$(A - BB^* X)^* X + X(A - BB^* X) + XBB^* X + C^* C = 0\,. \tag{9}$$

Misal λ nilai eigen tak stabil dari matriks $A - BB^* X$ dan x vektor eigen yang bersesuaian yakni

$$(A - BB^* X)x = \lambda x.$$

Kalikan persamaan (9) dengan x^* di sisi kiri dan x di sisi kanan, diperoleh

$$(\bar{\lambda} + \lambda)x^* Xx + x^*(XBB^* X + C^* C)x = 0. \tag{10}$$

Karena $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ dan $X \geq 0$, maka diperoleh $B^* Xx = 0$ dan $Cx = 0$. Sehingga diperoleh $Ax = \lambda x, \quad Cx = 0$, yang berarti (C, A) tidak terdeteksi. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui, sehingga haruslah $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ artinya $X \geq 0$ adalah solusi yang menstabilkan.

APLIKASI PERSAMAAN ALJABAR RICCATI

Aplikasi Persamaan Aljabar Riccati pada Desain Pengontrol Robust H_∞

Bagian ini akan memaparkan peranan persamaan aljabar Riccati dalam mendesain pengontrol robust H_∞ pada suatu sistem yang mempunyai fungsi transfer

$$\mathrm{G} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & 1 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{array}\right]. \tag{11}$$

Tanpa mengurangi keumuman desain, diambil $\gamma = 1$, dan diasumsikan sistem di atas memenuhi asumsi-asumsi berikut :
1. (A, B_1) terkendali dan (C_1, A) terobservasi,

2. (A, B_2) dapat distabilkan, dan (C_2, A) dapat dideteksi,
3. $D_{12}^*[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$,
4. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Selanjutnya dibentuk matriks Hamiltonian

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^* \\ -C_1^*C_1 & -A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad J_\infty = \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2 \\ -B_1B_1^* & -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari H_∞ adalah -1 dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan 1 dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Maka, $X\_(H) = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sehingga didapat $X_\infty = X_2X_1^{-1} = \frac{1}{2}$, dengan X_∞ adalah solusi dari persamaan aljabar Riccati

$$A^*X_\infty + X_\infty A + X_\infty\left(B_1B_1^* - B_2B_2^*\right)X_\infty - C_1^*C_1 = 0. \qquad (12)$$

Dengan cara yang sama didapat $Y_\infty = \frac{1}{2}$, dimana Y_∞ adalah solusi dari persamaan aljabar Riccati

$$AY_\infty + Y_\infty A + Y_\infty\left(C_1^*C_1 - C_2^*C_2\right)Y_\infty - B_1B_1^* = 0 \ . \qquad (13)$$

Sehingga H_∞, J_∞,dan (X_∞, Y_∞) memenuhi

(i) $H_\infty \in$ dom (Ric) dan $X_\infty = \operatorname{Ric}(H_\infty) = \frac{1}{2} > 0$,

(ii) $J_\infty \in$ dom (Ric) dan $Y_\infty = \operatorname{Ric}(J_\infty) = \frac{1}{2} > 0$,

(iii) $\rho(X_\infty Y_\infty) = \frac{1}{4} < \gamma^2$.

Maka pengontrol robust dari sistem di atas adalah

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array}\right]$$

dengan $F_\infty = -B_2^*X_\infty = -\frac{1}{2}$, $L_\infty = -Y_\infty C_2^* = -\frac{1}{2}$, $Z_\infty = \left(I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty\right)^{-1} = \frac{4}{3}$,

dan $\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2}B_1B_1^*X_\infty + B_2F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 = -\frac{5}{3}$.

Sehingga didapat

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} -5/3 & 2/3 \\ \hline -1/2 & 0 \end{array}\right] = -\frac{1}{3s+5}. \qquad (14)$$

Aplikasi Persamaan Aljabar Riccati pada Desain Pengontrol Robust H_2

Berikut akan disajikan peranan persamaan aljabar Riccati dalam mendesain pengontrol robust H_2 pada suatu sistem yang mempunyai fungsi transfer

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & 1 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{array}\right]. \tag{15}$$

Tanpa mengurangi keumuman desain, diambil $\gamma = 1$, dan diasumsikan sistem di atas memenuhi asumsi-asumsi berikut :

(i) (A, B_2) dapat distabilkan, dan (C_2, A) dapat dideteksi,

(ii) $R_1 = D_{12}^* D_{12} = 1 > 0$ dan $R_2 = D_{21}^* D_{21} = 1 > 0,$

(iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh untuk semua ω,

(iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ mempunyai rank baris penuh untuk semua ω.

Selanjutnya dibentuk matriks Hamiltonian

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 & -B_2 R_1^{-1} B_2^* \\ -C_1^* \left(I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^* \right) C_1 & -\left(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 \right)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \left(A - B_1 R_1^{-1} D_{21}^* C_2 \right)^* & -C_2 R_2^{-1} C_2^* \\ -B_1^* \left(I - D_{21} R_1^{-1} D_{21}^* \right) B_1 & -\left(A - B_1 R_2^{-1} D_{21}^* C_2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Didapat $X_{21} = -0,9732$ $X_{22} = -0,2298,$ $X_2 = X_{22} X_{21}^{-1} = 0,2361$, dengan X_2 adalah penyelesaian stabil dari persamaan aljabar Riccati

$$\left(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 \right)^* X_2 + X_2 A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 - X_2 B_2 R_1^{-1} B_2^* X_2 - C_1^* \left(I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^* \right) C_1 = 0$$

dan $Y_{21} = -0,9239$ $Y_{22} = -0,3827,$ $Y_2 = Y_{22} Y_{21}^{-1} = 0,4142$, dengan Y_2 adalah penyelesaian stabil dari persamaan aljabar Riccati

$$\left(A - B_1 R_2^{-1} D_{21}^* C_2 \right) Y_2 + Y_2 \left(A - B_1 R_1^{-1} D_{21}^* C_2 \right)^* - Y_2 C_2 R_2^{-1} C_2^* Y_2 - B_1^* \left(I - D_{21} R_1^{-1} D_{21}^* \right) B_1 = 0.$$

Maka, $F_2 = -R_1^{-1} \left(B_2^* X_2 + D_{12} C_1 \right) = -1,2361,$ $L_2 = -\left(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^* \right) R_2^{-1} = -0,4142,$

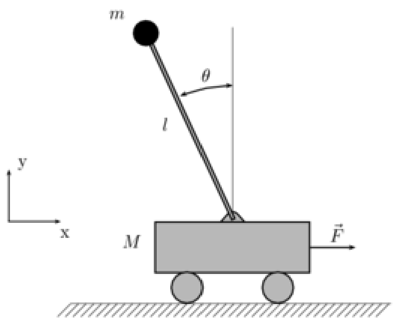
dan $\hat{A}_2 = A + B_2 F_2 + L_2 C_2 = -2,6503$.

Sehingga diperoleh pengontrol sub optimum H_2

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array}\right] = \frac{-0,5120}{s+2,6503}. \tag{16}$$

Aplikasi Persamaan Aljabar Riccati pada LQR

Pada bagian ini akan didesain pengontrol tipe *feedback* pada masalah *linear quadratic regulator* (LQR) untuk menstabilkan posisi pendulum sehingga pendulum tetap dalam posisi terbalik dengan cara menggerakkan kereta dari satu posisi ke posisi yang lain sehingga state dari sistem tetap berada di sekitar titik equilibrium 0 (titik asal).



Gambar 1. sistem *inverted pendulum*

Model matematika dari sistem pendulum terbalik terlinearisasi disajikan dengan sistem persamaan

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} & \frac{\beta_2}{1-\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\varepsilon} & -\frac{\beta_2}{1-\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\beta 1}{1-\varepsilon} u(t). \tag{17}$$

Dalam keadaan *stedy state*, akan dicari kontrol $u(t)$ yang meminimalkan indeks performansi

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[x(t)^T Qx(t) + ru^2(t) \right] dt \tag{18}$$

dengan $Q > 0$ dan $r > 0$ merupakan bobot untuk *x* dan *u*. Input kontrol $u(t)$ dihitung dengan rumus

$$u(t) = -\frac{1}{r} b^T Sx(t) \tag{19}$$

atau $$u(t) = -Kx(t)$$

dengan *S* adalah penyelesaian dari persamaan aljabar Riccati

$$-SA - A^T S + \frac{1}{r} Sbb^T S - Q = 0 \tag{20}$$

dan $S > 0$.

Dengan mengambil matriks $Q = I_4$ dan $r = 1$ maka dengan menyelesaikan persamaan aljabar Riccati (20) didapatkan kontrol $u(t) = -Kx(t)$ dengan

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -11.5958 & -7.8354 & -11.3729 \end{bmatrix} \tag{21}$$

dan

$$S = \begin{bmatrix} 5.2602 & 11.3729 & 10.0191 & 11.3750 \\ 11.3729 & 66.0528 & 48.4488 & 64.1712 \\ 10.0191 & 48.4488 & 37.2699 & 47.8938 \\ 11.3750 & 64.1712 & 47.8938 & 63.3141 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

KESIMPULAN

Dalam malakah ini telah dikaji konstruksi solusi persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem. Beberapa sifat penting yang terkait dengan solusi yang menstabilkan tersebut juga telah dipaparkan melalui beberapa teorema. Makalah ini juga telah menyajikan beberapa kontribusi persamaan aljabar Riccati dalam menyelesaikan masalah pendesainan pengontrol yang robust maupun optimal. Namun demikian permasalahan dalam kajian ini masih cukup sederhana. Sehingga pengembangan permasalahan seperti penentuan solusi yang menstabilkan pada suatu sistem singular beserta penerapannya pada permasalahan kendali dapat menjadi bahan kajian lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Earl, M.G., D'Andrea, R., 2005, Design and Implementation of a Minimum Time Translation for an Inverted Pendulum, *Proceeding of the Asian Conference of Industrial Automation and Robotic*, Bangkok.

Lewis, F. L., Syrmos, V. L., 1995, *Optimal Control*, John Wiley and Sons, pp 170 – 174.

Musthofa, M.W, 2009, Desain Linear Quadratic Regulator pada Sistem Inverted Pendulum, *Prosiding Seminar Nasional Matematika UNY*, Yogyakarta.

Olsder, G. J., 1994, *Mathematical Systems Theory,* 1994, Delftse Ultgevers Maatschappij, Netherland, pp 13 – 16.

Zhou, K., J.C. Doyle. 1998, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall International, New Jersey.

Zhou, K., J.C. Doyle., K Glover., 1998, *Robust Optimal Control*, Prentice Hall International, New Jersey.

Zhou, K., P. Khargonekar. 1988, An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization, *Systems and Control Letters*, 11, 85-91.