Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA GRAF $(S_n, 3)$

Amri Zulfi[1,2], Muzayyin Ahmad[1,3], Nurul Huda[1,4], Supriadi[1,5], Kiki A. Sugeng[6]

[1]Program Magister Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok
[2]Dosen Pemdidikan Matematika UMSU, Medan.
[3]Guru SMA N 9 Tanjung Jabung Timur, Jambi.
[4]Dosen Prodi Matematika FMIPA, Unlam, Banjarmasin.
[5]Guru SMK N 3 Kota Jambi, Jambi.
[6]Dosen Program Magister Matematika FMIPA Universitas Indonesia
e-mail:zulfi_ghifarri@yahoo.com, huda_unlam@yahoo.com,muzayyin_ahmad31@yahoo.co.id, spd_s@yahoo.co.id, kiki@ui.ac.id

Abstrak

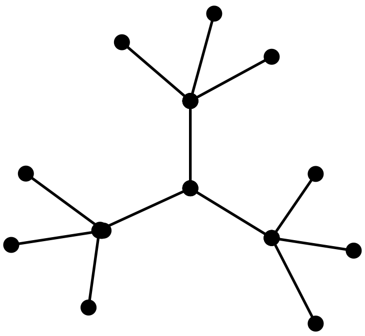
Graf G = (*V*,*E*) adalah sepasang himpunan terurut dimana *V* adalah himpunan simpul tak kosong dan *E* adalah himpunan busur. Pelabelan pada graf G adalah penetapan nilai simpul dan busur dengan aturan tertentu. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* $\in$ *E* dengan simpul *u*,*v* $\in$ *V* berlaku α' (*uv*) = $|\alpha(u) - \alpha(v)|$. Pelabelan skolem graceful adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif μ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* $\in$ *E* dengan simpul *u*,*v* $\in$ *V* berlaku μ' (*uv*) = $|\mu(u) - \mu(v)|$. Pelabelan $\hat{\rho}$ adalah modifikasi lain dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* $\in$ *E* dengan simpul *u*,*v* $\in$ *V* berlaku γ' (*uv*) = $|\gamma(u) - \gamma(v)|$. Graf $(S_n, 3)$ dibentuk dari 3 graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul dan diberikan busur-busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan sebuah simpul tersebut. Pada makalah ini diberikan konstruksi pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf $(S_n, 3)$.

Kata kunci: pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful, pelabelan $\hat{\rho}$, graf bintang, graf $(S_n, 3)$

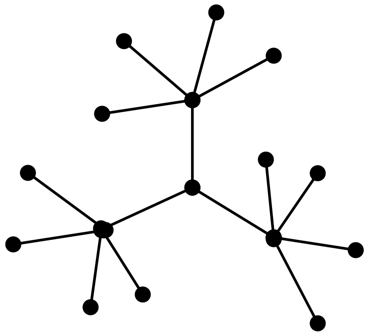
PENDAHULUAN

Graf G adalah sepasang himpunan (*V*,*E*) dimana *V* adalah suatu himpunan tak kosong dan *E* adalah suatu himpunan (mungkin kosong yang berisi pasangan-pasangan (tak terurut) dari anggota-anggota *V*= $\{v_1, v_2, v_3, \dots\dots\}$ dan anggota-anggota *E* = $\{e_1, e_2, e_3, \dots\dots\}$ masing-masing disebut simpul dan busur dari graf G. Banyaknya anggota *V* dinyatakan dengan $|V|$ dan banyaknya anggota *E* dinyatakan dengan $|E|$. Graf yang digunakan dalam makalah ini adalah graf sederhana tak berarah yang tidak memuat loop maupun multibusur.

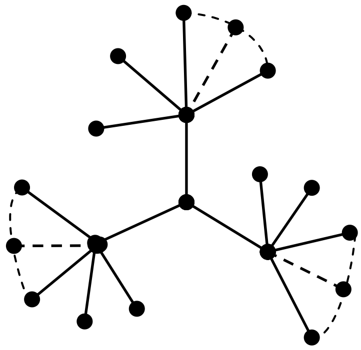
Pemilihan graf $(S_n, 3)$ di latar belakangi dari graf bintang dan suatu pertanyaan, yakni mengapa gabungan 2 graf bintang S_n tidak mempunyai pelabelan Graceful dibuktikan [2,3], bagaimana jika ada sebuah simpul yang saling dihubungkan dengan simpul pusat dari 2 graf bintang S_n tersebut, sehingga setelah dihubungkan membentuk graf caterpillar telah dibuktikan [2], kemudian dengan menggunakan ide dengan cara yang sama terhadap tiga graf bintang S_n, akhirnya ditemukan graf dengan bentuk $(S_n, 3)$ yang disebut dengan graf $(S_n, 3)$.



Gambar 1.1a. Graf $(S_3, 3)$



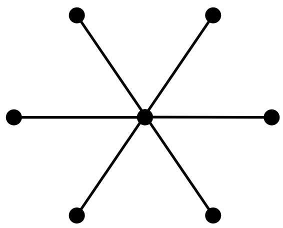
Gambar 1.1b. Graf $(S_4, 3)$



Gambar 1.1c. Graf $(S_n, 3)$

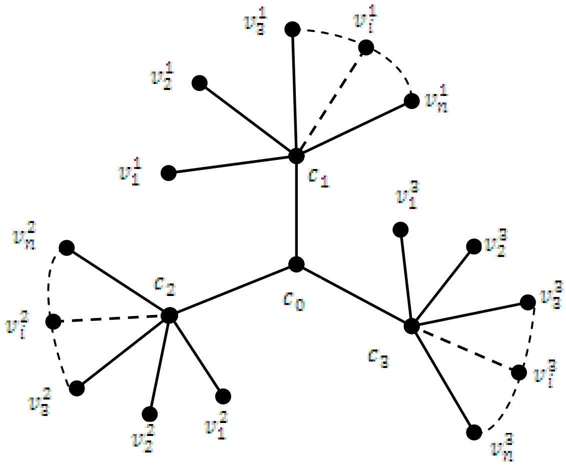
Pelabelan graceful pada graf G(*V*,*E*) adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* $\in$ *E* dengan simpul *u*,*v* $\in$ *V* berlaku α' (*uv*) = $|\alpha(u) - \alpha(v)|$. **Pelabelan skolem graceful** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif μ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* $\in$ *E* dengan simpul *u*,*v* $\in$ *V* berlaku μ' (*uv*) = $|\mu(u) - \mu(v)|$. **Pelabelan $\hat{\rho}$** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots.|E|+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* $\in$ *E* dengan simpul *u*,*v* $\in$ *V* berlaku γ' (*uv*) = $|\gamma(u) - \gamma(v)|$.[1,2,3]. Beberapa graf yang telah dibuktikan memiliki pelabelan graceful, skolem graceful dan atau Pelabelan $\hat{\rho}$ diantaranya adalah sebagai berikut : graf bintang S_n, graf sapu $B_{4,k}$, graf cumi-cumi $Sq_{4,n}$, graf carterpilar, graf cycle, graf super star. Selain itu sevenhot juga membuktikan gabungan dari beberapa graf yakni, graf $2S_n$, graf $S_n \cup S_{n+1}$, graf $S_n \cup B_{4,k}$, graf $S_n \cup Sq_{4,m}$ [3]

Graf bintang S_n adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat kemudian menambahkan sejumlah simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf bintang memiliki *n*+1 simpul dan *n* busur [1]



Gambar 1.3 Graf bintang S_6

Graf (S_n, 3) (baru) adalah suatu graf yang dibangun dari 3 graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul *c* disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan sebuah simpul *c* tersebut.



Gambar 1.2 Graf (S_n, 3)

1. Pelabelan Graceful Dan Pelabelan Skolem Graceful Pada Graf (S_n, 3)

Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan skolem graceful pada graf (S_n, 3).

Teorema 2.1 Graf (S_n, 3) memiliki pelabelan graceful

Bukti. Misalkan notasi simpul graf (S_n, 3) diberikan pada Gambar 1.2

Pada Gambar 1.2 diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n 3)$ = $\{c_0, c_1, c_2, c_3, v_1^1, v_2^1, .., v_n^1, v_1^2, v_2^2, ..., v_n^2, v_1^3, v_2^3, ..., v_n^3\}$, himpunan busur $E(S_n, 3)$ = $\{c_0\ c_1, c_0\ c_2, c_0\ c_3, c_1\ v_1^1, c_1\ v_2^1, .., c_1\ v_n^1, c_2\ v_1^2, c_2\ v_2^2, ..., c_2\ v_n^2, c_3\ v_1^3, c_3\ v_2^3, ..., c_3\ v_n^3\}$ maka jelas bahwa $|V|$ = 3*n* + 4 dan $|E|$ = 3*n* + 3. Didefinisikan pelabelan dengan menngunakan notasi α (alpha) untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_0) = 2n + 3 \qquad (2.1)$$

$$\alpha(c_1) = 0 \qquad (2.2)$$

$$\alpha(c_2) = 1 \qquad (2.3)$$

$$\alpha(c_3) = n + 2 \qquad (2.4)$$

$$\alpha(v_i^1) = 3n + 4 - i \qquad i = 1,2....,n \qquad (2.5)$$

$$\alpha(v_i^2) = 2n + 3 - i \qquad i = 1,2....,n \qquad (2.6)$$

$$\alpha(v_i^3) = n + 2 - i \qquad i = 1,2....,n \qquad (2.7)$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan *(2.1)*-*(2.7)*, melabelkan anggota V$(S_n, 3)$ adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, ..., |E|\},\ u, v \in V$.

Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada $(S_n, 3)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\alpha'(c_0c_1) = |\alpha(c_0) - \alpha(c_1)| = |(2n+3) - (0)| = |2n+3| \quad (2.8)$$

$$\alpha'(c_0c_2) = |\alpha(c_0) - \alpha(c_2)| = |(2n+3) - (1)| = |2n+2| \quad (2.9)$$

$$\alpha'(c_0c_3) = |\alpha(c_0) - \alpha(c_3)| = |(2n+3) - (n+2)| = |n+1| \quad (2.10)$$

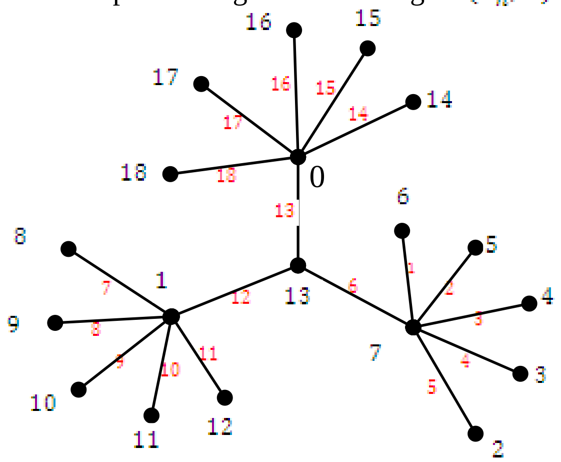
$$\alpha'(c_1v_i^1) = |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)| = |(0) - (3n+4-i)| = |3n+4-i| \quad i=1,2\ldots,n \quad (2.11)$$

$$\alpha'(c_2v_i^2) = |\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)| = |(1) - (2n+3-i)| = |2n+2-i| \quad i=1,2\ldots,n \quad (2.12)$$

$$\alpha'(c_3v_i^3) = |\alpha(c_3) - \alpha(v_i^3)| = |(n+2) - (n+2-i)| = |i| \quad i=1,2\ldots,n. \quad (2.13)$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan *(2.1)-(2.7)* setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan *(2.8)–(2.13)* yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka α merupakan pelabelan graceful untuk graf $(S_n, 3)$. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf $(S_n, 3)$.



Gambar 2.1 Pelabelan Graceful Graf $(S_5, 3)$

Untuk semua kelas graf graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf skolem graceful dengan mendefinisikan $\mu(v) = x(v) + 1$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.2 Graf $(S_n, 3)$memiliki pelabelan Skolem graceful

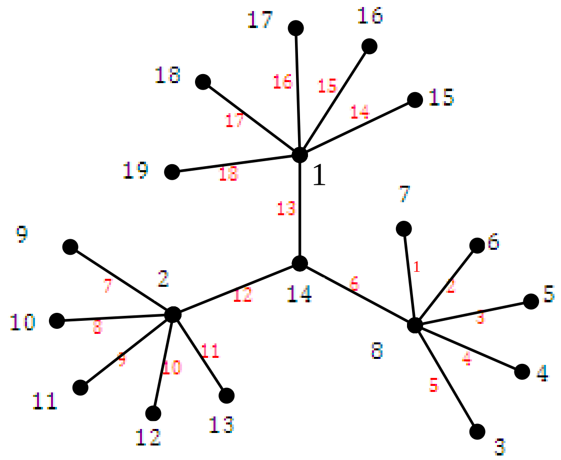
Bukti. Misalkan notasi vertek graf $(S_n, 3)$diberikan seperti pada Gambar 1.2

Didefinisikan pelabelan μ untuk simpul dengan menambahkan 1 pada setiap label simpulnya yang menggunakan pelabelan pada Teorema 2.1. Jadi $\mu(x) = \lambda(x) + 1$ untuk setiap $x \in V(S_n, 3)$dengan λ adalah pelabelan pada bukti Teorema 2.1.

Pelabelan yang didefinisikan oleh μ akan melabelkan anggota $V(S_n, 3)$ dengan pelabelan $\mu(V(S_n, 3))$adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{1, 2, \dots, |V|\}$, $u, v \in V$. Sehingga setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan $\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$ pada $(S_n, 3)$ yang menghasilkan sama seperti persamaan *(2.8)–(2.13).*

Berdasarkan pelabelan μ yang terdefinisikan dari bukti teorema 2.1 setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |V|\}$. Kemudian pelabelan μ' seperti persamaan *(2.8)–(2.13)*yang diinduksi oleh pelabelan simpul μ seperti bukti Teorema (2.1), memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Maka μ merupakan pelabelan skolem graceful untuk graf $(S_n, 3)$.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan skolem graceful untuk graf $(S_n, 3)$.



Gambar 2.2 Pelabelan Skolem Graceful Graf $(S_n, 3)$

Untuk semua kelas graf graceful dan graf skolem graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf $\hat{\rho}$ dengan mendefinisikan $\gamma(v) = \mu(v)$ atau $\gamma(v) = \alpha(v)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.3 Graf $(S_n, 3)$memiliki pelabelan $\hat{\rho}$

Bukti. Misal graf $(S_n, 3)$ditunjukkan seperti pada Gambar 1.2

Menggunakan cara yang sama pada pembuktian graceful pada Teorema 2.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\gamma = \alpha$ seperti persamaan *(2.1)–(2.8)* dan pelabelan busur γ' (*uv*) $= |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dimana *uv* ∈ *E* dengan *u,v* ∈ *V* diperoleh pelabelan simpul dari $(S_n, 3)$ ke subhimpunan bilangan

$\{0,1,2,\ldots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari $(S_n, 3)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Jadi graf $(S_n, 3)$memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Pada makalah ini telah diberikan kontruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $(S_n, 3)$.

Saran

Saat ini sedang diteliti lebih lanjut apakah untuk pelabelan graf (S_n, r) memiliki pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Choudum, S. A., & Kishore, S. P. (1996). All 5-star are Skolem graceful. *Indian J. Pure and Appl. Math,27* , 1101-1105.

[2] Galian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics,17,#ds6*

[3] Sevenhot, Sugeng.K.A., Silaban, D.R., (2010). Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Gabungan Dua Graf. *Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung,* hal *MS 183- MS 191*