PENYELESAIAN INVERS PROBLEM PADA REAKSI DIFUSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE OPTIMASI

Elly Musta'adah[1], Erna Apriliani[2]

[1]*Mahasiswa Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya*
[2]*Dosen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya*
elly_mustaadah@yahoo.co.id

Abstrak

Invers problem banyak muncul pada bidang teknologi dan ilmu pengetahuan. Pada dasarnya, invers problem menggunakan pengukuran nyata dari parameter yang diamati untuk menyimpulkan nilai dari suatu parameter model. *Invers problem* dalam hal ini, merekonstruksi dua koefisien *independent* (bebas) dalam sistem reaksi difusi dari pengukuran akhir, dengan dua persamaan. Model matematika reaksi difusi yang merupakan persamaan parabolik akan ditransformasikan menjadi masalah optimasi dengan menggunakan kerangka kontrol optimal. *Minimizer* untuk fungsi kontrol ditetapkan. Penelitian ini didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian eksistensi.

Kata kunci*: Invers Problem,* Kontrol Optimal, Reaksi Difusi

PENDAHULUAN

Pada bidang ilmu pengetahuan dan teknologi, invers problem banyak muncul, misalnya pada dinamika populasi, pencitraan optik medis, penginderaan jauh dan ilmu pertahanan (K.Sakhtivel dkk, 2010). Berbagai metode telah dipergunakan untuk menyelesaikan masalah invers problem.

Dalam masalah ekologi, sebagai contoh, sistem reaksi difusi. Penelitian telah dilakukan untuk sistem reaksi difusi dengan satu obyek saja. Pada penelitian ini akan disajikan dua obyek yang mengalami reaksi kimia. Misalkan, ada spesies yang berbeda berinteraksi satu sama lain dan berinteraksi dalam reaksi kimia.

Model matematika untuk sistem reaksi difusi di peroleh dari direct problem (masalah langsung). Akan tetapi terdapat beberapa parameter fisik dari persamaan tersebut yang tidak diketahui. Oleh karena itu perlu diketahui parameter fisik dari model matematika tersebut yang nantinya dapat menjadi sebuah produk.

Invers problem digunakan untuk menentukan koefisien yang tidak diketahui dari suatu model matematika. Dalam hal ini, akan digunakan metode optimasi. Yaitu dengan merubah masalah tertentu kedalam kontrol optimum dengan menggunakan teori optimasi.

Berdasarkan hal tersebut, maka yang ingin ditunjukkan adalah : "apakah metode optimasi sesuai untuk masalah invers problem pada sistem reaksi difusi?"

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan yang ingin dicapai adalah menunjukkan bahwa metode optimasi tersebut sesuai untuk masalah invers problem pada sistem reaksi difusi dengan menguji eksistensinya, dalam menentukan invers problem dari dua koefisien $a(x)$ dan $c(x)$ secara bersamaan untuk sistem reaksi difusi dua persamaan yang berhubungan dengan penyelesaian sistem pada waktu akhir.

PEMBAHASAN

Dalam masalah ekologi, ada dua spesies berbeda yang saling berinteraksi dalam reaksi kimia, dengan zat kimia yang berbeda dan menghasilkan zat yang baru. Pada model masalah seperti ini digunakan persamaan differensial. Sebagai contoh, sistem reaksi difusi bisa diturunkan pada model ruang dan waktu. Dalam hal ini, dimisalkan $u(x,t)$ dan $v(x,t)$ adalah fungsi kepadatan populasi dari dua spesies atau konsentrasi dari dua bahan kimia. Sistem reaksi difusi dengan kondisi batas Dirichlet nol ditulis sebagai berikut: (K.Sakhtivel dkk, 2010)

$u_t - u_{xx} + a(x)u + b(x)v = 0, \qquad (x,t) \in Q = I \times (0,T)$
$v_t - v_{xx} + c(x)v + d(x)u = 0, \qquad (x,t) \in Q \qquad (1)$
Dengan kondisi batas
$u(x,0) = f(x), v(x,0) = g(x), \qquad x \in I$
$u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T)$

Interval $I = (0,1)$ dan $T > 0$ adalah saat sembarang. Kondisi awal $f(x)$ dan $g(x)$, hanya tergantung pada x, $a(x)$ dan $c(x)$ merupakan paramater yang tidak diketahui dan koefisien $b(x)$, $d(x)$ diasumsikan *smooth* dan tidak tergantung pada waktu (t). Misal, diasumsikan ada kemungkinan untuk memberikan tambahan temperatur (suhu) untuk masalah invers panas: sebagai contoh, tambahan data $u(x,t)$, $v(x,t)$ pada saat akhir suhu diketahui.
$u(x,T) = m(x)$, $v(x,T) = n(x)$, $x \in I \qquad (2)$

Berdasarkan error estimasi a dan c, yang ingin dicari adalah untuk memperoleh stabilitas perkiraan (estimasi) untuk menentukan invers problem dari dua koefisien $a(x)$ dan $c(x)$ secara bersamaan dalam sistem reaksi difusi dua persamaan yang berhubungan dengan penyelesaian sistem pada waktu akhir.

Misalkan $(\tilde{u}, \tilde{v})$ merupakan persamaan estimasi untuk sistem reaksi difusi, dituliskan sebagai berikut
$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} + \tilde{a}(x)\tilde{u} + b(x)\tilde{v} = 0, \qquad (x,t) \in Q$
$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} + \tilde{c}(x)\tilde{v} + d(x)\tilde{u} = 0, \qquad (x,t) \in Q \qquad (3)$
Dengan kondisi batas
$\tilde{u}(x,0) = f(x), \tilde{v}(x,0) = g(x), \qquad x \in I$
$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(1,t) = \tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T)$

Misalkan didefinisikan $U = u - \tilde{u}$, $V = v - \tilde{v}$, $\mathcal{A} = a - \tilde{a}$, dan $\mathcal{C} = c - \tilde{c}$. Dengan melakukan pengurangan pada (3) dari (1)

$$u_t - u_{xx} + a(x)u + b(x)v - (\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} + \tilde{a}(x)\tilde{u} + b(x)\tilde{v}) = 0$$
$$U_t - U_{xx} + a(x)(u - \boldsymbol{\tilde{u}}) + b(x)(v - \boldsymbol{\tilde{v}}) + \left(\boldsymbol{a(x)} - \tilde{a}(x)\right)\tilde{u} = 0$$
$$U_t - U_{xx} + aU + bV + \mathcal{A}\tilde{u} = 0$$
$$v_t - v_{xx} + c(x)v + d(x)u - (\tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} + \tilde{c}(x)\tilde{v} + d(x)\tilde{u}) = 0$$
$$V_t - V_{xx} + c(x)(v - \boldsymbol{\tilde{v}}) + d(x)(u - \boldsymbol{\tilde{u}}) + \left(\boldsymbol{c(x)} - \tilde{c}(x)\right)\tilde{v} = 0$$
$$V_t - V_{xx} + cV + dU + \mathcal{C}\tilde{v} = 0$$

Sehingga dihasilkan
$U_t - U_{xx} + aU + bV = -\mathcal{A}\tilde{u}, \qquad (x,t) \in Q$
$V_t - V_{xx} + cV + dU = -\mathcal{C}\tilde{v}, \qquad (x,t) \in Q \qquad (4)$
Dengan syarat
$U(x,0) = u(x,0) - \tilde{u}(x,0) = f(x) - f(x) = 0,$
$V(x,0) = v(x,0) - \tilde{v}(x,0) = g(x) - g(x) = 0, \qquad x \in I$
$U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T)$

Permasalahan yang muncul selanjutnya adalah bagaimana meminimalkan selisih koefisien yang sebenarnya, a dengan koefisien yang diestimasi, $\tilde{a}$.

Untuk menentukan koefisien a dan c pada sistem reaksi difusi tersebut, digunakan kerangka kontrol optimal. Dengan merubah masalah reaksi difusi kedalam masalah kontrol optimal.

Transformasi Kontrol Optimal

Pada bagian ini, masalah reaksi difusi diubah kedalam masalah kontrol optimal. Dalam kontrol optimal, istilah optimal seringkali merujuk pada minimal, misal meminimalkan kesalahan, waktu, dan lain-lain. Dalam hal ini, yang akan diminimalkan adalah selisih koefisien dari persamaan sistem reaksi difusi.

Untuk $\alpha > 0$, diasumsikan koefisien a, b, c, d dan data awal f, g memenuhi $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x) \in C^{\alpha}(\bar{I})$, $m(x), n(x) \in L^2(I)$
dan $f(x)$, $g(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{I})$
Dengan $m(x)$, $n(x)$ memenuhi kondisi batas Dirichlet homogen. Didefinisikan suatu himpunan
$\mathcal{M} = \{a(x), c(x) : 0 < a_0 \le a \le a_1,\ 0 < c_0 \le c \le c_1,\ \nabla a, \nabla c \in L^2(I)\} \qquad (5)$
Dan persoalan kontrol optimum sebagai berikut:

akan ditentukan $(\bar{a}\,(x), \bar{c}\,(x)) \in \mathcal{M}$ yang memenuhi

$$\mathcal{J}(\bar{a}, \bar{c}) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(a, c) \tag{6}$$

Dengan

$$\mathcal{J}(a, c) = \frac{1}{2}\left(\int_I (|u(x,T;a) - m(x)|^2 + |v(x,T;c) - n(x)|^2) + N\,(|\nabla a|^2 + |\nabla c|^2)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_I (|u(x,T;a) - m(x)|^2 + |v(x,T;c) - n(x)|^2) + \frac{N}{2}\,(|\nabla a|^2 + |\nabla c|^2)\Big)\, dx \tag{7}$$

$u(x,T;a)$ dan $v(x,T;c)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (1) untuk koefisien tertentu $a\,(x), c\,(x) \in \mathcal{M}$ yang diberikan. Sedangkan konstanta a_0, $a_1$dan c_0, $c_1$diberikan dan N adalah parameter regularisasi.

Untuk menyatakan bahwa penyelesaian dari sistem kontrol tersebut ada, perlu dikaji eksistensi dari fungsi kontrol tersebut.

Eksistensi

Terlebih dahulu akan dikaji eksistensi untuk penyelesaian masalah kontrol optimal. Pada paper Sakhtivel dkk. (2010), terdapat teorema untuk menunjukkan eksistensi dari penyelesaian tersebut.

Teorema 2.2.1 Jika (u, v) merupakan penyelesaian untuk sistem (1) maka ada suatu nilai minimizer $(\bar{a}\,(x), \bar{c}\,(x)) \in \mathcal{M}$ sedemikian hingga $\mathcal{J}(\bar{a}, \bar{c}) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(a, c)$

Bukti. Dari definisi $\mathcal{J}(a, c)$, maka fungsi $\mathcal{J}(a, c)$ adalah nonnegatif (positif) pada batas bawah terbesar. Misal (u_n, v_n, a_n, c_n) menjadi barisan yang meminimalkan $\mathcal{J}$, sebagai contoh,

$\inf_{a,c \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(a, c) \le \mathcal{J}(a_n, c_n) \le \inf_{a,c \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(a, c) + \frac{1}{n}$, untuk $n = 1, 2, \ldots$

Jika n $\rightarrow \infty$

Misal $\mathcal{J}(a_n, c_n) \le C$, ini menunjukkan bahwa $\|\nabla a_n\|_{L^2(I)} + \|\nabla c_n\|_{L^2(I)} \le C$

Dengan C konstan tidak tergantung n.

Kemudian norm Sobolev $H^1(I) \subset C^{\alpha}(\bar{I})$ untuk $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, menunjukkan

$\|a_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(I)} + \|c_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(I)} \le C$

Demikian, dengan eksistensi penyelesaian klasik untuk persamaan parabola, mempunyai $\|u_n\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\bar{Q})} + \|v_n\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\bar{Q})} \le C,$

Untuk sebarang $Q_0 \Subset Q$, didapatkan

$\|u_n\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(Q_0)} + \|v_n\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(Q_0)} \le C$

Kemudian ada sub barisan dari (u_n, v_n, a_n, c_n), dinotasikan dengan (u_n, v_n, a_n, c_n), sehingga

$(a_n, c_n) \rightarrow (\bar{a}, \bar{c}) \in C^{\frac{1}{2}}(I)$ secara keseluruhan (uniformly) pada $C^{\alpha}(\bar{I})$

$(u_n, v_n) \rightarrow (\phi, \varphi) \in C^{\frac{1}{2}}(I)$ uniformly pada $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}) \cap C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q)$.

Karena itu mengganti (u, v, a, c) pada (1) dengan (u_n, v_n, a_n, c_n) sampai dengan batas atas, tampak bahwa $(\phi, \varphi, \bar{a}, \bar{c})$ memenuhi sistem (1). Sehingga diperoleh

$\mathcal{J}(\bar{a}, \bar{c}) \le \lim\ \inf_{n \to \infty} \mathcal{J}(a_n, c_n) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(a, c)$

Karena itu $\mathcal{J}(\bar{a}, \bar{c}) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(a, c)$

Jadi $(\bar{a}, \bar{c}) \coloneqq (a, c)$ adalah penyelesaian optimal dari permasalahan kontrol optimal (5), (6), dan (7).

Syarat Perlu (*Necessary Condition*)

Terdapat syarat perlu untuk kondisi optimal yang harus dipenuhi oleh masing-masing kontrol optimal (a, c). Misalkan (p, q) merupakan penyelesaian dari sistem adjoint yang berhubungan dengan persamaan (1) dari bentuk

$$\left.\begin{array}{ll} -p_t - p_{xx} + ap + dq = 0, & (x,t) \in Q \\ -q_t - q_{xx} + cq + bp = 0, & (x,t) \in Q \\ p(x,T) = u(x,T) - m(x), & x \in I \\ q(x,T) = v(x,T) - n(x), & x \in I \\ p(0,t) = p(1,t) = q(0,t) = q(1,t) = 0, & t \in (0,T) \end{array}\right\} \quad (8)$$

Dengan m, n nilai penyelesaian untuk sistem (1) pada waktu akhir $t = T$

Teorema 2.3.1 Misal (a, c) menjadi penyelesaian dari permasalahan kontrol optimal (6). maka terdapat satu himpunan fungsi $(u, v, p, q; a, c)$ yang memenuhi

$$\int_Q \big(pu(a-h) + qv(c-k)\big)\, dt\, dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h-a) + \nabla c \cdot \nabla(k-c)]\, dx \geq 0 \quad (9)$$

Untuk sebarang $h, k \in \mathcal{M}$

Bukti. Untuk sebarang $h, k \in \mathcal{M}$ dan $0 \leq \delta \leq 1$,
Dimisalkan $a_\delta = (1-\delta)a + \delta h \in \mathcal{M}$ dan $c_\delta = (1-\delta)c + \delta k \in \mathcal{M}$
Kemudian ada penyelesaian (u_δ, v_δ) dari sistem (1) dengan koefisien $a = a_\delta$ dan $c = c_\delta$ memenuhi

$$\mathcal{J}_\delta = \mathcal{J}(a_\delta, c_\delta) = \frac{1}{2}\int_1 [|u_\delta - m(x)|^2 + |v_\delta - n(x)|^2]\, dx + \frac{N}{2}\int_1 (|\nabla a_\delta|^2 + |\nabla c_\delta|^2)\, dx \quad (10)$$

Dengan $u_\delta = u(x, T; a_\delta)$ dan $v_\delta = v(x, T; c_\delta)$. Turunan Fréchet dari $\mathcal{J}_\delta$, diperoleh

$$\left.\frac{d\mathcal{J}_\delta}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \int_1 \left([u_\delta - m(x)] \left.\frac{du_\delta}{d\delta}\right|_{\delta=0} + [v_\delta - n(x)] \left.\frac{dv_\delta}{d\delta}\right|_{\delta=0} \right) dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h-a) + \nabla c \cdot \nabla(k-c)]\, dx$$

Dengan (a, c) adalah penyelesaian optimal, sehingga

$$\left.\frac{d\mathcal{J}_\delta}{d\delta}\right|_{\delta=0} \geq 0 \quad (11)$$

Jika dimisalkan $(\bar{u}_\delta, \bar{v}_\delta) = \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial \delta}, \frac{\partial v_\delta}{\partial \delta}\right)$, kemudian $(\bar{u}_\delta, \bar{v}_\delta)$ memenuhi sistem berikut dengan koefisien $(a_\delta, b, c_\delta, d)$.

$$(\bar{u}_\delta)_t - (\bar{u}_\delta)_{xx} + a_\delta \bar{u}_\delta + (h-a)u_\delta + b\bar{v}_\delta = 0, \quad (x,t) \in Q$$
$$(\bar{v}_\delta)_t - (\bar{v}_\delta)_{xx} + c_\delta \bar{v}_\delta + (k-c)v_\delta + d\bar{u}_\delta = 0, \quad (x,t) \in Q$$

Misal $\xi = \bar{u}_\delta|_{\delta=0}$ dan $\eta = \bar{v}_\delta|_{\delta=0}$, terlihat bahwa (ξ, η) memenuhi sistem berikut

$$\xi_t - \xi_{xx} + \xi a + b\eta = (a-h)u, \quad (x,t) \in Q$$
$$\eta_t - \eta_{xx} + c\eta + d\xi = (c-k)v, \quad (x,t) \in Q \quad (12)$$

Dengan $u_\delta|_{\delta=0} = u$ dan $v_\delta|_{\delta=0} = v$. Dari bentuk (11), akan ditunjukkan bahwa

$$\int_1 \big([u(x,T;a) - m(x)]\xi(x,T) + [v(x,T;c) - n(x)]\eta(x,T)\big)\, dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h-a) + \nabla c \cdot \nabla(k-c)]\, dx \geq 0$$

Dari persamaan bentuk (8) diperoleh

$$\int_1 \big(p(x,T)\xi(x,T) + q(x,T)\eta(x,T)\big)\, dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h-a) + \nabla c \cdot \nabla(k-c)]\, dx \geq 0 \quad (13)$$

Misalkan (p, q)adalah penyelesaian dari persamaan (8) dan dikalikan dengan ξ, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \xi\, (-p_t - p_{xx} + ap + dq) dt\, dx \\ &= -\int_1 \xi\, p|_0^T\, dx + \int_Q p\, (\xi_t - \xi_{xx} + a\xi + b\eta - b\eta)\, dt\, dx + \int_Q dq\xi\, dt\, dx \\ &= -\int_1 \xi(x,T)\, p(x,T) dx + \int_Q p\, (\xi_t - \xi_{xx} + a\xi + b\eta)\, dt\, dx + \int_Q (dq\xi - bp\eta) dt\, dx \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh bentuk persamaan berikut

$$\int_1 \xi(x,T)\, p(x,T) dx = \int_Q p\, (\xi_t - \xi_{xx} + a\xi + b\eta)\, dt\, dx + \int_Q (dq\xi - bp\eta) dt\, dx$$

Berdasarkan persamaan (12) maka persamaan diatas menjadi

$$\int_1 \xi(x,T)\, p(x,T) dx = \int_Q pu(a-h) dt\, dx + \int_Q (dq\xi - bp\eta) dt\, dx \quad (14)$$

Dan dengan cara yang sama, didapatkan bentuk persamaan (8b) sebagai berikut

$$\int_1 \eta(x,T)\, q(x,T) dx = \int_Q qv(c-k) dt\, dx + \int_Q (bp\eta - dq\xi) dt\, dx \quad (15)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (14) dan (15) ke persamaan (13), maka diperoleh

$$\int_Q \big(pu(a-h) + qv(c-k)\big)\, dt\, dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h-a) + \nabla c \cdot \nabla(k-c)]\, dx \geq 0$$

Setelah syarat perlu untuk kondisi optimal dikaji, maka perlu dikaji pula stabilitas hasil estimasi dari permasalahan kontrol optimal.

Kestabilan Hasil Estimasi

Pada bagian ini, akan dikaji stabilitas estimasi untuk invers problem dari mendapatkan kembali dua koefisien penghalus (smooth) $a(x)$ dan $c(x)$ pada sistem parabolik yang telah diberikan. Permasalahan kontrol optimal ditetapkan pada bagian sebelumnya akan digunakan untuk membuktikan stabilitas estimasi.

Dalam paper K. Sakhtivel, dkk.(2010), terdapat lemma yang digunakan untuk menentukan kestabilan hasil estimasi.

Lemma 2.4.1. Misal (U,V) menjadi penyelesaian pada persamaan (4), maka diperoleh estimasi berikut:

$$\max_{0\le t\le T}\int_1(|U|^2+|V|^2)dx \le exp\,(MT)\Big(\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2\int_Q|\tilde{u}|^2\,dt\,dx + \max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2\int_Q|\tilde{v}|^2\,dt\,dx\Big) \qquad (16)$$

Dengan nilai konstan

$M = (2+\max_{x\in I}|b|^2 + \max_{x\in I}|d|^2)$

Bukti. Persamaan (4) dikalikan dengan U dan mengintegralkan I untuk mendapatkan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{L^2(I)} + \int_I|U_x|^2\,dx + \int_I a|U|^2\,dx = -\int_I bUV\,dx - \int_I \mathcal{A}U\tilde{u}\,dx$$

Misal, koefisien $a = a_0$ dan menerapkan ketidaksamaan Cauchy, maka diperoleh

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{L^2(I)} + \int_I|U_x|^2\,dx + a_0\int_I|U|^2\,dx \le \int_I|U|^2\,dx + \frac{1}{2}\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2\int_I|\tilde{u}|^2dx + \frac{1}{2}\max_{x\in I}|b|^2\int_I|V|^2dx$$

Dengan cara yang sama dilakukan juga pada persamaan (4b).

Dengan menggabungkan dua estimasi tersebut, maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}\Big[\|U\|^2_{L^2(I)} + \|V\|^2_{L^2(I)}\Big] \le M\Big(\|U\|^2_{L^2(I)} + \|V\|^2_{L^2(I)}\Big) + \max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2\int_I|\tilde{u}|^2dx + \max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2\int_I|\tilde{v}|^2dx$$

ini mengikuti

$$\frac{d}{dt}\Big[exp(-Mt)\Big(\|U\|^2_{L^2(I)} + \|V\|^2_{L^2(I)}\Big)\Big] \le exp(-Mt)\Big(\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2\int_I|\tilde{u}|^2dx + \max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2\int_I|\tilde{v}|^2dx\Big)$$

Dengan mengintegralkan dari 0 sampai t, maka dihasilkan

$$\|U\|^2_{L^2(I)} + \|V\|^2_{L^2(I)} \le exp(Mt)\Big(\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2\int_I\int_0^1 exp(-Ms)|\tilde{u}|^2\,ds\,dx + \max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2\int_I\int_0^1 exp(-Ms)|\tilde{v}|^2ds\,dx$$

Dengan cara yang sama, berlaku untuk persamaa adjoint nya.

Lemma 2.4.2 Misal (u,v) menjadi penyelesaian dari persamaan (1). Maka diperoleh

$$\max_{0\le t\le T}\int_1(|u|^2+|v|^2)dx \le exp\,(MT)\Big(\|f\|^2_{L^2(I)} + \|g\|^2_{L^2(I)}\Big) \qquad (17)$$

Bukti. Dengan mengalikan persamaan (1) dengan u dan v dan mengintegralkan I, diperoleh

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|u\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}\Big] + \int_I(|u_x|^2+|v_x|^2)\,dx + \int_I(au^2+cv^2)\,dx \le \frac{1}{2}\Big(1+\max_{x\in I}|b|^2 + \max_{x\in I}|d|^2\Big)\Big(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}\Big)$$

Dengan memisalkan a dan c, diperoleh

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|u\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}\Big] \le \frac{M}{2}\Big(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}\Big)$$

Dengan $\frac{d}{dt}\Big[\Big(exp\,(-Mt)\|u\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}\Big)\Big] \le 0$

Terdapat teorema yang digunakan untuk membuktikan kestabilan hasil estimasi.

Teorema 2.4.1. Misal (u,v) dan (p,q) berturut-turut merupakan penyelesaian untuk sistem (1) dan (4). Misalkan ada sebuah titik $x_0 \in I$, sedemikian hingga, $a(x_0) = \tilde{a}(x_0)$ dan $c(x_0) = \tilde{c}(x_0)$. Kemudia ada saat tertentu pada waktu T_0 sedemikian hingga, untuk $T \geq T_0$ ada konstanta $C > 0$, tidak bergantung pada a_0 dan c_0, yang memenuhi estimasi berikut

$$\max_{x\in I}|a-\tilde{a}|^2 + \max_{x\in I}|c-\tilde{c}|^2 \leq \frac{C}{N} T\, exp\,(2MT) \int_1 (|m-\tilde{m}|^2 + |n-\tilde{n}|^2)dx \quad (18)$$

Dengan konstanta $M = \left(2 + \max_{x\in I}|b|^2 + \max_{x\in I}|d|^2\right)$.

Bukti. Misal $h = \tilde{a}$, $k = \tilde{c}$ pada persamaan (9) memiliki

$$\int_Q qv(c-\tilde{c})dt\,dx + \int_Q pu(a-\tilde{a})\,dt\,dx + N\int_1 [\nabla a\cdot\nabla(a-\tilde{a}) + \nabla c\cdot\nabla(c-\tilde{c})]\,dx \geq 0 \quad (19)$$

Misal $h = a$, $k = c$ ketika $a = \tilde{a}$, $c = \tilde{c}$, juga memperoleh

$$\int_Q \tilde{q}\tilde{v}(\tilde{c}-c)dt\,dx + \int_Q \tilde{p}\tilde{u}(\tilde{a}-a)\,dt\,dx + N\int_1 [\nabla\tilde{a}\cdot\nabla(a-\tilde{a}) + \nabla\tilde{c}\cdot\nabla(c-\tilde{c})]\,dx \geq 0 \quad (20)$$

Dengan (u,v), $(\tilde{u},\tilde{v})$ adalah penyelesaian untuk sistem (1) dengan koefisien (a,b,c,d), $(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d})$ secara berturut-turut dan (p,q), $(\tilde{p},\tilde{q})$ adalah penyelesaian yang sesuai sistem adjoint (6). adapun dari (19) dan (20), didapatkan

$$\begin{aligned} N\int_1 |\nabla(a-\tilde{a})|^2 dx + N\int_1 |\nabla(c-\tilde{c})|^2 dx &\leq \int_Q \mathcal{A}(pu-\tilde{p}\tilde{u})dt\,dx + \int_Q \mathcal{C}(qv-\tilde{q}\tilde{v})\,dt\,dx \\ &= \int_Q \mathcal{A}(pU-\mathcal{P}\tilde{u})dt\,dx + \int_Q \mathcal{C}(qV-\mathcal{Q}\tilde{v})\,dt\,dx \end{aligned} \quad (21)$$

Penerapan ketidaksamaan Cauchy pada tiap integral sisi kanan, diperoleh

$$\begin{aligned} N\int_1 (|\nabla\mathcal{A}|^2 + |\nabla\mathcal{C}|^2)\,dx \leq \frac{1}{2}\Big(&\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2 \int_Q (|p|^2 + |\tilde{u}|^2)dt\,dx + \\ &\max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2 \int_Q (|q|^2 + |\tilde{v}|^2)dt\,dx\Big) + \\ &\frac{1}{2}\int_Q (|U|^2 + |V|^2 + |\mathcal{P}|^2 + |\mathcal{Q}|^2)\,dt\,dx \end{aligned} \quad (22)$$

Dari Lemma 2.4.1 dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_Q (|U|^2 + |V|^2 + |\mathcal{P}|^2 + |\mathcal{Q}|^2)\,dt\,dx \leq CTexp(2MT)\Big(&\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2 \int_Q (|\tilde{p}|^2 + |\tilde{u}|^2)dt\,dx + \\ &\max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2 \int_Q (|\tilde{q}|^2 + |\tilde{v}|^2)dt\,dx + \\ &\int_I (|m-\tilde{m}|^2 + |n-\tilde{n}|^2)dx\Big) \end{aligned} \quad (23)$$

Tambahan, dari Lemma 2.4.2, ada suatu konstanta $\Gamma > 0$ sedemikian hingga

$$\int_Q (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2)\,dt\,dx \leq Texp(MT)\Gamma \text{ dan } \int_Q (|\tilde{p}|^2 + |\tilde{q}|^2)\,dt\,dx \leq Texp(2MT)\Gamma \quad (24)$$

Dengan memasukkan $\mathcal{A}(x_0) = 0$ kedalam perhitungan dan menerapkan pada ketidaksamaan Hölder, didapatkan

$$|\mathcal{A}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (\mathcal{A}(y))' dy\right| \leq \left(\int_1 |\nabla\mathcal{A}|^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga $\max_{x\in I}|\mathcal{A}| \leq \|\nabla\mathcal{A}\|_{L^2(I)}$, $\forall x \in I$ (25)

Mengkombinasikan estimasi terdahulu pada (22), didapatkan

$$\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2 + \max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2 \leq C_\Gamma\,(\max_{x\in I}|\mathcal{A}|^2 + \max_{x\in I}|\mathcal{C}|^2) + \frac{CT}{2N}\exp(2MT) + \int_1 (|m-\tilde{m}|^2 + |n-\tilde{n}|^2)dx\Big)$$

Dengan konstanta $C_\Gamma = \frac{T}{2N}\exp(4MT)\Gamma(1+CT)$

Memilih $T_0 > 0$ sedemikian hingga $C_{T_0} < 1$, pembuktian dapat diselesaikan.

Dari teorema 2.4.1 diketahui bahwa jika pengukuran akhir dari sistem (1) dan (3) sama, yaitu $u(x,T) = \tilde{u}(x,T)$ dan $v(x,T) = \tilde{v}(x,T)$, maka data a dan c bisa ditentukan secara khusus, bahwa $a = \tilde{a}$ dan $c = \tilde{c}$ pada I, untuk beberapa $T_0 > 0$ yang kecil. Dari (22) – (25), diperoleh

$$\int_1 (|\nabla\mathcal{A}|^2 + |\nabla\mathcal{C}|^2)\,dx \leq C_T\left(\int_1 (|\nabla\mathcal{A}|^2 + |\nabla\mathcal{C}|^2)\,dx\right)$$

Dengan memilih $T_0 > 0$ sedemikian hingga $C_{T_0} < 1$, bisa disimpulkan bahwa

$$\int_1 (|\nabla\mathcal{A}|^2 + |\nabla\mathcal{C}|^2)\,dx \leq 0$$

Dengan mengasumsikan $\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{C}(x_0) = 0$ dalam perhitungan, dapat disimpulkan bahwa $a(x) - \tilde{a}(x) \equiv 0$ dan $c(x) - \tilde{c}(x) \equiv 0$ untuk semua $x \in I$

KESIMPULAN

Metode optimasi dengan menggunakan kerangka kontrol optimal dapat digunakan untuk menyelesaikan invers problem pada sistem reaksi difusi dengan syarat batas ditentukan. Terdapat eksistensi dari penyelesaian dari permasalahan kontrol optimalnya. Dan kestabilan hasil estimasi dapat diperoleh dengan menggunakan pembuktian eksistensi dari penyelesaian kontrol optimal, sehingga dari hasil estimasi dan pengukuran sebenarnya dapat disimpulkan bahwa
$a(x) - \tilde{a}(x) \equiv 0$ dan $c(x) - \tilde{c}(x) \equiv 0$ untuk semua $x \in I$

Diharapkan ada penerapan lebih lanjut pada bidang teknologi maupun ilmu pengetahuan.

DAFTAR PUSTAKA

Chen. Qun, Liu. Jijun, (2005), "*Solving An Inverse Parabolic Problem By Optimization From Measurement Data*", Computational And Applied Mathematics, No. 193, 183 – 203.

Sakhtivel. K, Gnanavel. S, Barani Balan. N, & Balachandran. K, (2010), "*Inverse Problem For The Reaction Diffusion System by Optimization Method*", Apllied Mathematical Modelling, No. 35, 571 – 579.

Tarantola, Albert. (2005), "*Invers Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*", Society For Industrialand Aplied Mathematic, Philadelphia.

Yang. Liu, Deng. Zui-Chang, & Yu. Jian-Ning, (2007), "*An Inverse Problem of Identifying the Coefficient of Parabolic Equation*", Apllied Mathematical Modelling, No. 32, 1984 – 1995

Yang. Liu, Deng. Zui-Chang, Yu. Jian-Ning, dan Luo. & Guan-Wei, (2009), "Optimization Method For The Inverse Problem Of Reconstructing The Source Term In A Parabolic Equation", *Mathematics And Computers In Simulation*, No.80, 314 – 326.