ISBN : 978-979-16353-3-2

T-13

Optimalisasi dan Pemodelan Inventory dengan Dua Gudang Penyimpanan untuk Barang yang Mengalami Penyusutan dengan Backlog Shortage dan Waktu Tunggu (Lead Time) Fuzzy

Dwi Ertiningsih, Widodo
Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Gadjah Mada University
dwi_ertiningsih@ugm.ac.id, widodo_math@ugm.ac.id

ABSTRAK

Adanya kebijakan optimalisasi inventory yang diambil sebuah perusahaan atau retailer untuk barang yang mengalami penyusutan dengan ketidakpastian waktu tunggu (*lead time*) sampai barang selesai diproduksi atau pesanan datang, adanya *backlog shortage* sebagian atau penuh, dan tingkat permintaan bergantung harga dikembangkan dalam sistem dua gudang yang masing-masing sebagai gudang penjualan (*display*) atau tempat transaksi barang dan gudang tempat penyimpanan jika barang yang diproduksi atau dibeli tidak cukup ditempatkan di gudang penjualan. Tujuan perusahaan atau retailer mempunyai dua gudang penyimpanan adalah untuk mengoptimalkan keuntungan rata-rata jika memproduksi atau membeli barang dalam jumlah besar. Perusahaan atau retailer mempunyai satu gudang dengan kapasitas terbatas yang letaknya di lokasi strategis sebagai tempat penjualan, yang disebut sebagai gudang milik (*own warehouse*, OW) dan gudang yang lain dengan kapasitas cukup luas disesuaikan dengan kebutuhan yang lokasinya berbeda dengan tempat penjualan atau transaksi, yang disebut sebagai gudang sewa (*rented warehouse*, RW). Biaya penyimpanan barang di RW menurun dengan bertambahnya jarak dari RW ke OW. Hal ini disebabkan oleh biaya sewa gudang dan upah tenaga kerja yang lebih murah dibandingkan di lokasi OW. Barang dikirim dari RW ke OW dalam jumlah yang telah ditentukan (*fixed*) berdasarkan pola tertentu.

Dalam penelitian ini dikembangkan dua model inventory yaitu model inventory dengan *backlog shortage* sebagian dan model inventory dengan *backlog shortage* penuh. Untuk memperoleh penyelesaian akan digunakan metode pendekatan interval terdekat untuk fungsi single objektif yang memaksimalkan keuntungan rata-rata dalam fuzzy (*defuzzified*) dan ditransformasikan dalam fungsi multi objektif crisp yang selanjutnya akan diselesaikan dengan metode kriteria global (*global criterion method*) untuk memperoleh solusi optimal Pareto.

Kata kunci : Dua Gudang Penyimpanan, Backlog Shortage, Waktu Tunggu Fuzzy.

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

ISBN : 978-979-16353-3-2

Dari sudut pandang keuangan, persediaan barang menyatakan modal yang berhubungan dengan aset lain termasuk modal terbatas perusahaan. Masalah inventory klasik telah diformulasikan dengan mempertimbangkan faktor-faktor dalam kondisi real, seperti penyusutan barang persediaan dan tingkat penjualan. Meskipun masalah pengambilan keputusan multi objektif (*multi-objective decision making problems*, MODMP) telah diaplikasikan dalam beberapa area yang berbeda tetapi masih sedikit penelitian tentang MODMP dalam bidang kontrol optimal persediaan barang dengan dua gudang penyimpanan. Model inventory klasik suatu perusahaan atau retailer selama ini dikembangkan dengan tempat penyimpanan tunggal (OW). Tetapi kenyataan dalam manajemen inventory, ketika pembelian atau produksi barang dalam jumlah besar maka tidak dapat disimpan di tempat penyimpanan yang ada (OW) dikarenakan terbatasnya kapasitas sehingga kelebihan barang di OW disimpan di RW yang lokasinya berbeda dengan OW. RW mempunyai kapasitas cukup luas yang disesuaikan dengan kebutuhan. Dalam prakteknya, retailer membeli barang dalam jumlah besar pada suatu waktu jika memperoleh harga discount untuk sejumlah pembelian atau biaya pengambilan barang (*acquisition*) hanya untuk mengisi kapasitas di OW pada suatu waktu lebih tinggi dibandingkan biaya penyimpanan di RW sehingga untuk memaksimalkan keuntungan rata-rata diperlukan tempat penyimpanan kelebihan barang yang dibeli setelah diisikan di OW.

1.2. Perumusan Masalah

Dalam penelitian ini diformulasikan model inventory dalam sistem dua gudang penyimpanan dengan *backlog shortage* untuk barang yang mengalami penyusutan dan ketidakpastian waktu tunggu (*lead time*) dan suatu kebijakan inventory dikembangkan untuk memaksimalkan keuntungan rata-rata. Permintaan konsumen diasumsikan bergantung harga penjualan. Retailer mempunyai dua gudang, yaitu OW dengan kapasitas terbatas dan RW dengan kapasitas cukup luas yang disesuaikan dengan kebutuhan. OW ditempatkan di pusat penjualan dan RW lokasinya berbeda dengan OW. Barang yang dipesan, pertama kali diisikan di OW berdasarkan kapasitas maksimal dan kelebihan barang disimpan di RW. Permintaan barang hanya dilayani di OW dan

 ISBN : 978-979-16353-3-2

selama penjualan OW diisi sesuai dengan kapasitas maksimal dari RW dalam jumlah tertentu mengikuti pola yang ditentukan pada suatu interval waktu sampai persediaan barang di RW kosong. Karena lokasi RW berbeda dengan OW maka biaya penyimpanan di RW dan biaya transportasi dari RW ke OW bergantung pada jarak RW dan OW. *Backlog shortage* sebagian dan *backlog shortage* penuh di OW diijinkan. Terdapat selang waktu antara waktu pemesanan dan penerimaan pesanan sebagai ketidakpastian (*imprecise*). Ketidakpastian waktu tunggu (*lead time*) tersebut direpresentasikan dengan bilangan fuzzy kemudian ditransformasikan dengan interval aritmatika sehingga fungsi single objektif yang memaksimalkan keuntungan rata-rata diubah dalam fungsi multi objektif. Secara analitik akan ditunjukkan bahwa model dengan *backlog shortage* sebagian (model 1) atau *backlog shortage* penuh (model 2) mempunyai penyelesaian optimal pareto.

1.3. Tujuan Penelitian

a. Mengenalkan waktu tunggu (*lead time*) dalam fuzzy untuk model-model inventory dua gudang untuk memperoleh keuntungan rata-rata optimal dari perusahaan baru dan atau barang-barang inovasi baru akibat adanya persaingan pasar (globalisasi).
b. Membuat pemodelan dan analisis sistem kontrol inventory dengan dua gudang penyimpanan untuk barang yang mengalami penyusutan dengan *backlog shortage* dan waktu tunggu (*lead time*) fuzzy.

1.4. Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan rekomendasi kepada perusahaan atau retailer dalam menentukan keputusan yang tepat (yaitu : penentuan total persediaan barang awal, jumlah barang yang dipindahkan dari RW ke OW setiap pengiriman, banyaknya waktu pengiriman yang diperlukan untuk memindahkan barang dari RW ke OW, jarak dari RW ke OW, waktu terjadinya kekosongan barang, waktu pemesanan barang untuk mengantisipasi kekosongan barang, dan waktu pengiriman barang) agar pendapatannya maksimal dalam sistem kontrol inventory dengan dua gudang penyimpanan untuk barang yang mengalami penyusutan dengan *backlog shortage* dan waktu tunggu (*lead time*) fuzzy.

2. METODE PENELITIAN

a. Mempelajari secara mendalam sumber-sumber pustaka terkait dengan program non linear multi objektif (fuzzy dan non fuzzy) dan metode pendekatan interval terdekat baik dari jurnal, buku teks maupun hasil-hasil penelitian terdahulu
b. Membuat pemodelan tentang sistem kontrol inventory dengan dua gudang penyimpanan untuk barang yang mengalami penyusutan dengan *backlog shortage* dan waktu tunggu (*lead time*) fuzzy dengan penyederhanaan dan asumsi-asumsi tertentu
c. Mencari penyelesaian dari sistem kontrol inventory dengan dua gudang penyimpanan untuk barang yang mengalami penyusutan dengan *backlog shortage* dan waktu tunggu (*lead time*) fuzzy yang telah dibentuk
d. Menganalisis dan membuktikan penyelesaian secara mendalam dari sistem kontrol inventory dengan dua gudang penyimpanan untuk barang yang mengalami penyusutan dengan *backlog shortage* dan waktu tunggu (*lead time*) fuzzy.
e. Membuat algoritma penyelesaian

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Formulasi Masalah Multi Objektif

Secara umum, maslah optimisasi dengan beberapa parameter bernilai interval diberikan sebagai berikut :

Memaksimalkan : $Z(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}$

Dengan kendala :

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j^{\beta_{ij}} \leq B_i \ , \quad i = 1,2,...,k$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,...,n) \tag{4}$$

dengan $C_i = [c_{Li}, c_{Ri}]$, $A_{ij} = [a_{Lij}, a_{Rij}]$, dan $\mathrm{B}_i = [b_{Li}, b_{Ri}]$ adalah bilangan-bilangan interval dimana c_{Li}, a_{Lij}, b_{Li} adalah limit-limit kiri dan c_{Ri}, a_{Rij}, b_{Ri} adalah limit-limit kanan sedangkan α_{ij}, β_{ij} , $i = 1,2,...,k$; $j = 1,2,...,n,$ adalah konstanta-konstanta real. Jelas bahwa formulasi masalah (4) merupakan suatu masalah multi objektif nonlinear. Karena fungsi tujuan $Z(x)$ dan kendala-kendala memuat beberapa parameter yang dinyatakan dalam interval-interval, sehingga himpunan penyelesaian (4) didefinisikan berdasarkan hubungan antar interval.

Dari persamaan (4), limit kiri $z_L(x)$, limit kanan $z_R(x)$, dan center $z_C(x)$ dari fungsi tujuan $Z(x)$ diberikan sebagai berikut :

$$z_L(x) = \sum_{i=1}^{k} C_{Li} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \tag{5}$$

$$z_R(x) = \sum_{i=1}^{k} C_{Ri} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \tag{6}$$

$$z_C(x) = \frac{1}{2}\left[z_L(x) + z_R(x)\right] \tag{7}$$

Menggunakan analisis interval, $Z(x)$ ekuivalen dengan $[Z_L, Z_R]$ dimana Z_L dan Z_R dapat diinterpretasikan sebagai keuntungan pesimistis dan optimistis. Menurut Ishibuchi dan Tanaka (1990), masalah memaksimalkan (4) dikonversi dalam masalah multi objektif (dua tujuan), yaitu : memaksimalkan keuntungan terendah dan center dari interval fungsi tujuan. Dua tujuan tersebut dapat dinyatakan sebagai memaksimalkan kasus terburuk dan kasus rata-rata. Oleh sebab itu, masalah (4) ditransformasikan sebagai berikut :

Memaksimalkan : $\{z_L, z_C\}$

Dengan kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{Lij} x_j^{\beta_{ij}} \leq B_{Ri}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{Rij} x_j^{\beta_{ij}} \leq B_{Li}\ , \quad i = 1,2,...,k \qquad (8)$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,...,n)$$

dengan a_{Lij} dan a_{Rij} adalah sumber minimum dan maksimum yang dibutuhkan oleh satu unit barang ke-*j* dan (b_{Li}, b_{Ri}) adalah nilai-nilai pesimistis dan optimistis dari total sumber yang tersedia. Kendala-kendala di atas dirumuskan mengikuti interval matematika.

3.2. Asumsi dan Notasi

Asumsi dan notasi yang digunakan untuk mengembangkan model inventory dua gudang

3.2.1. Asumsi

i. Single item dan tidak ada perbaikan/ penggantian untuk unit yang mengalami penyusutan
ii. Biaya penyimpanan barang diterapkan hanya pada unit-unit yang bagus
iii. Waktu tak berhingga
iv. *Shortage* diijinkan dan kekecewaan konsumen akibat kekosongan barang di *backlog* sebagian (dalam model 1) atau di *backlog* penuh (dalam model 2). Hal ini berarti bahwa ketika shortage di backlog sebagian dalam suatu antrian, jumlah konsumen meningkat dalam antrian, yaitu backlog menjadi kehilangan penjualan. Selanjutnya kehilangan penjualan diasumsikan sebagai fungsi linear dari tingkat backlog pada model 1 dan untuk model 2 shortage di backlog penuh.
v. Waktu transportasi dari RW ke OW diabaikan
vi. Biaya transportasi bergantung pada jarak dari RW ke OW
vii. Kapasitas dari OW terbatas sementara kapasitas di RW cukup luas yang disesuaikan dengan kebutuhan
viii. Biaya penyimpanan di OW tetap sementara biaya penyimpanan di RW bergantung jarak lokasi RW dari tempat penjualan yaitu biaya menurun

 ISBN : 978-979-16353-3-2

terhadap bertambahnya jarak dari OW.

3.2.2. Notasi

p : biaya pembelian/ produksi per unit barang

s : harga penjualan per unit barang dengan $s = mp \;\; (m > 1)$

$D(s)$: tingkat permintaan per bulan yang bergantung pada harga penjualan dengan $D(s) = \alpha s^{-\beta}$, $\alpha, \beta > 0$, dimana α adalah skala parameter dan β adalah bentuk parameter dari kurva permintaan. Karena $\frac{d}{ds}D(s) = -\alpha\beta s^{-\beta-1} < 0$ untuk $s > 0$, maka tingkat permintaan $D(s)$ turun dengan naiknya *s*.

x : jarak dari RW ke OW

t' : waktu pemesanan/ produksi

L : waktu tunggu untuk menerima pesanan

T : waktu perputaran barang dengan $T = t' + L$

H : biaya penyimpanan per unit barang di OW

$F(x)$:biaya penyimpanan per unit barang di RW dengan $F(x) = \lambda x^{-\mu}$, $\lambda, x, \mu > 0$

c_s : biaya shortage per unit barang per bulan

c_g : biaya opportunity akibat kehilangan penjualan per unit barang per bulan

$c_t(x)$:biaya transportasi dari RW ke OW per unit barang dengan $c_t(x) = \omega x^{\psi}$, $\omega, \psi > 0$

Q_d : total jumlah penyusutan di RW dan OW

Q_b : jumlah permintaan akibat kekosongan barang yang akan dipenuhi ketika Barang pesanan datang dengan $Q_b = [Q_{bl}, Q_{br}]$ dimana Q_{bl} , Q_{br} masing-masing adalah batas bawah dan batas atas dari bilangan interval Q_b

Q_{ls} : jumlah kehilangan penjualan

Q : jumlah barang yang dikirim dari RW ke OW pada setiap pengiriman

Q_j : tingkat persediaan di RW setelah pengiriman ke-*j*, $j = 1,2,...,n$

n : banyaknya pengiriman yang diperlukan dari RW ke OW

t_1 : interval waktu antara dua pengiriman dari RW ke OW

$q_0(t)$: tingkat persediaan di OW di setiap *t*, $t \in [(0, nt_1) \cup (nt_1, t_2)]$

$q_r(t)$: tingkat persediaan di RW di setiap *t*, $t \in (j-1)t_1, jt_1)$, $j = 1,2,...,n$

$q_b(t)$: tingkat backlog di setiap *t*, $t \in [t_2, T]$

δ : kehilangan penjualan akibat kekurangan barang yang di backlog, $0 < \delta \le 1$

c_d : biaya penyusutan per unit barang

S : total tingkat persediaan barang awal di RW dan OW pada awal putaran

W : kapasitas penyimpanan di OW (tetap) dan $W < S$

θ_1, θ_2 : tingkat penyusutan di RW dan OW, $0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1$

$A(L)$:biaya pemesanan per putaran dengan $A(L) = a - bL^\gamma$, $a, b, \gamma > 0$ dimana $A(L)$ turun dengan naiknya nilai *L*, yaitu : $\frac{dA}{dl} = -\gamma bL^{\gamma-1} < 0$

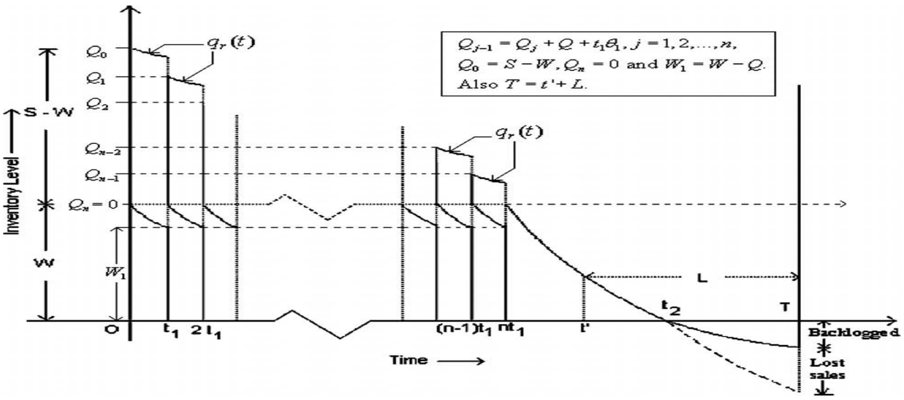
$\overline{\prod}_{iL}, \overline{\prod}_{iR}$: Limit kiri dan limit kanan dari rata-rata interval fungsi keuntungan, $i = 1,2$

3.3. Deskripsi Model

Retailer memperoleh barang dari supplier dan pertama kali menyimpannya di OW sedangkan kelebihan unit disimpan di RW. Permintaan konsumen dilayani di OW dan kekosongan barang di OW diisi maksimal dengan transfer unit dari RW ke OW pada suatu interval waktu tertentu t_1. Awalnya sejumlah *S* unit dibeli dimana *W* unit disimpan di OW dan $(S - W)$ unit disimpan di RW. Persediaan di OW menurun akibat permintaan konsumen dan penyusutan barang. Setelah waktu t_1, *Q* unit dari RW dipindahkan ke OW sedemikian hingga tingkat persediaan di OW kembali menjadi W yang mengisi penuh kekosongan tempat di OW. Proses tersebut berlanjut sampai *n* pengiriman. Berdasarkan asumsi awal, setelah pengiriman ke-*n* tidak ada unit barang

 ISBN : 978-979-16353-3-2

yang tersisa di RW $(Q_n = 0)$. Sisa W unit di OW digunakan dan berkurang akibat dari permintaan konsumen dan penyusutan barang. Pada saat $t = t_2$, persediaan di OW mencapai nol dan kehabisan persediaan barang mulai dihitung dan sampai $t = T$ saat sejumlah barang yang dipesan tiba. Dalam kasus ini tingkat persediaan berdasarkan perumusan di atas diberikan pada gambar berikut :



Gambar 2. Model inventory dua gudang.

MODEL 1 (Model untuk *Backlog Shortage* Sebagian)

Jika total shortage yang dihitung di *backlog* sebagian, maka kehilangan penjualan terjadi. Oleh karena itu terdapat biaya tambahan (*opportunity cost*) karena kehilangan penjualan.

Gudang Sewa (RW/ Rented Warehouse)

Unit-unit yang dikirim dari RW ke OW berdasarkan pola tertentu, tingkat inventory di RW berkurang secara diskrit pada suatu interval waktu tertentu, yaitu pada suatu titik waktu tetap. Tetapi selama interval waktu tersebut, persediaan di RW berkurang secara kontinu yang hanya diakibatkan oleh penyusutan unit barang. Oleh karena itu, tingkat inventory $q_r(t)$ di RW pada setiap t selama $(j-1)t_1 \le t < jt_1$, $j = 1,2,\ldots,n$ memenuhi persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}q_r(t) = -\theta_1 q_r(t)\ ,\ \ (j-1)t_1 \le t < jt_1\ ,\ \ j = 1,2,\ldots,n \qquad (9)$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Selanjutnya di setiap interval waktu $(j-1)t_1 \le t < jt_1$, $j = 1,2,...,n$, $q_r(t)$ adalah fungsi turun secara kontinu dari tingkat $Q_{j-1}[= q_r(\overline{j-1}t_1)]$ tetapi diskontinu dari kiri di jt_1 karena dari deskripsi model jelas bahwa :

$$\lim_{t \to jt_1} q_r(t) = Q + Q_j \neq Q_j = q_r(jt_1).$$

Berdasarkan hal tersebut, penyelesaian dari persamaan diferensial (9) diberikan sebagai berikut :

$$q_r(t) = (Q + Q_j)e^{\theta_1(jt_1 - t)}, \quad j = 1,2,...,n \tag{10}$$

Karena $Q_{j-1} = q_r(\overline{j-1}t_1)$, maka dari persamaan (10) diperoleh : $Q_{j-1} = (Q + Q_j)e^{\theta_1 t_1}$

Jadi, $\forall j = 1,2,...,(n-1)$ berlaku : $Q_j = \left(Q \sum_{s=1}^{n-j} e^{s\theta_1 t_1} \right)$

Q_j merupakan deret geometri berhingga dengan suku awal $a = e^{\theta_1 t_1}$ dan rasio $r = e^{\theta_1 t_1}$ sehingga diperoleh :

$$Q_j = Qe^{\theta_1 t_1} \frac{\left(e^{(n-j)\theta_1 t_1} - 1\right)}{e^{\theta_1 t_1} - 1}, \qquad Q_n = 0 \tag{11}$$

Pada awal putaran, $Q_0 = S - W = Qe^{\theta_1 t_1} \dfrac{\left(e^{n\theta_1 t_1} - 1\right)}{e^{\theta_1 t_1} - 1}$ (12)

Karena fungsi $q_r(t)$ adalah fungsi kontinu sepotong-sepotong pada interval $[0, nt_1]$, maka total inventory di RW pada interval waktu tersebut adalah :

$$G_1 = \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)t_1}^{jt_1} q_r(t)dt = \left(\frac{Q}{\theta_1}\right)(e^{\theta_1 t_1} - 1) + \left(e^{\theta_1 t_1} \frac{\left(e^{n\theta_1 t_1} - 1\right)}{e^{\theta_1 t_1} - 1} - n \right) \tag{13}$$

Gudang Milik (OW/ Own Warehouse)

Berkurangnya persediaan barang di OW selama interval $[0, t_2]$ akibat dari permintaan konsumen dan penyusutan barang. Selanjutnya tingakt inventory menjadi nol dan shortage mulai dihitung selama $[t_2, T]$ yang di backlog sebagian. Persamaan diferensial yang menyatakan tingkat inventory $q_o(t)$ selama interval $[0, t_2]$ dan

 ISBN : 978-979-16353-3-2

backlog shortage $q_b(t)$ selama $[t_2, T]$ di OW diberikan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}q_o(t) = -D(s) - \theta_2 q_0(t) \;,\; (j-1)t_1 \le t < jt_1 \,,\; j = 1,2,\ldots,n \qquad (14)$$

dengan syarat $q_o(t) = W$ di $t = (j-1)t_1$ dan

$$\frac{d}{dt}q_o(t) = -D(s) - \theta_2 q_0(t) \;,\; nt_1 \le t \le t_2 \qquad (15)$$

dengan syarat $q_o(t_2) = 0$.

Sedangkan, $\frac{d}{dt}q_b(t) = -D(s) - \delta q_b(t) \;,\; t_2 \le t \le T$ (16)

dengan syarat $q_b(t_2) = 0$.

Penyelesaian dari persaman diferensial (14)-(16) adalah sebagai berikut :

$$q_o(t) = -\frac{D}{\theta_2} + \left(W + \frac{D}{\theta_2}\right)e^{-\theta_2(t-\overline{j-1}\,t_1)} \text{ untuk } (j-1)t_1 \le t < jt_1 \,,\; j = 1,2,\ldots,n \qquad (17a)$$

$$q_o(t) = \frac{D}{\theta_2}\left(e^{\theta_2(t_2-t)} - 1\right) \qquad , nt_1 \le t \le t_2 \qquad (17b)$$

$$q_b(t) = -\frac{D}{\delta}\left(1 - e^{-\delta(t-t_2)}\right) \qquad , t_2 \le t < T \qquad (18)$$

Fungsi $q_o(t)$ diskontinu dari kiri di jt_1. Dari gambar jelas bahwa $\forall j = 1,2,\ldots,n$

$$\lim_{t \to jt_1} q_o(t) = W - Q \ne W = q_o(jt_1) \qquad (19)$$

Ambil limit kiri dari $q_o(t)$ pada persamaan (17a), maka diperoleh :

$$Q = \left(W + \frac{D}{\theta_2}\right)\left(1 - e^{-\theta_2 t_1}\right) \qquad (20)$$

Fungsi $q_o(t)$ juga kontinu sepotong-potong pada $[0, nt_1]$ sehingga total inventory pada gudang OW selama $[0, nt_1]$ diberikan sebagai berikut :

$$G_2 = \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)t_1}^{jt_1} q_o(t)dt = \frac{n}{\theta_2}\left[\left(W + \frac{D}{\theta_2}\right)\left(1 - e^{-\theta_2 t_1}\right) - Dt_1\right] \qquad (21)$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Dari persamaan (17) dan (19) diperoleh :

$$W = \frac{D}{\theta_2}\left(e^{\theta_2 (t_2 - nt_1)} - 1\right) \tag{22}$$

Total inventory di gudang OW pada interval $[nt_1.t_2]$ adalah

$$G_3 = \int_{nt_1}^{t_2} q_o(t)dt = \frac{D}{\theta_2{}^2}\left[\left(e^{\theta_2 (t_2 - nt_1)}\right) - \theta_2(t_2 - nt_1) - 1\right] \quad \text{`(23)}$$

Menggunakan persamaan (18) sejumlah barang yang dibacklog selama periode $t_2 \le t \le T$ adalah :

$$Q_b = \int_{t_2}^{T} q_b(t)dt \quad = \frac{D}{\delta^2}\left(\left(1 - e^{-\delta(T-t_2)}\right) - \delta(T - t_2)\right) \tag{24}$$

Oleh karena itu, jumlah kehilangan penjualan selama $[t_2, T]$ adalah :

$$Q_d = \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)t_1}^{jt_1} \theta_1 q_r(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)t_1}^{jt_1} \theta_2 q_o(t)dt + \int_{nt_1}^{t_2} \theta_2 q_o(t)dt \quad = G_1\theta_1 + (G_2 + G_3)\theta_2 \tag{26}$$

Fungsi tujuan $\prod_1(t_1, t', x; n)$ memuat elemen-elemen sebagai berikut :

i. Biaya pemesanan = $A(L) = a - bL^\gamma$

ii. Biaya penyimpanan = $G_1F(x) + (G_2 + G_3)H$

iii. Biaya shortage = $Q_b\, c_s$

iv. Biaya opportunity akibat dari kehilangan penjualan = $Q_{ls}\, c_g$

v. Biaya transportasi = $nQ\, c_t(x)$

vi. Biaya penyusutan barang = $Q_d\, c_d$

vii. Biaya pembelian = $p\left[S + \frac{D}{\delta}\left(1 - e^{-\delta(T-t_2)}\right)\right]$

viii. Pendapatan penjualan = $mp\left[Dt_2 + \frac{D}{\delta}\left(1 - e^{-\delta(T-t_2)}\right)\right]$

Jadi, total keuntungan dapat dirumuskan sebagai berikut :

$\prod_1(t_1, t', x; n)$ = Pendapatan penjualan – (biaya pembelian + biaya penyimpanan + biaya pemesanan + biaya shortage + biaya opportunity + biaya transportasi + biaya penyusutan)

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$= mp\left[Dt_2 + \frac{D}{\delta}\left(1 - e^{-\delta(T-t_2)}\right)\right] - p\left[S + \frac{D}{\delta}\left(1 - e^{-\delta(T-t_2)}\right)\right] -$$

$$G_1F(x) - (G_2 + G_3)H - A(L) - Q_b c_s - Q_{ls} c_g - nQc_t(x) - Q_d c_d \quad (27)$$

Oleh karena itu, rata-rata keuntungan pada interval waktu $[0,T]$ adalah :

$$\overline{\prod}_1(t_1, t', x; n) = \frac{1}{T}\prod_1(t_1, t', x; n) \quad (28)$$

Diasumsikan bahwa waktu tunggu $(\widetilde{L})$ sebagai bilangan fuzzy trapezoida yang diaproksimasi oleh suatu bilangan interval crisp. Untuk $\widetilde{L} = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ dengan metode interval terdekat diperoleh limit kiri dan limit kanan dari interval terdekat ke $(\widetilde{L})$ adalah : $L_L = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ dan $L_R = \frac{1}{2}(l_3 + l_4)$

Selanjutnya dengan menggunakan interval aritmatika, fungsi tujuan pada persamaan (28) menjadi :

$$\overline{\prod}_1(t_1, t', x; n) = \left[\overline{\prod}_{1L}(t_1, t', x; n), \overline{\prod}_{1R}(t_1, t', x; n)\right]$$

dengan :

$$\overline{\prod}_{1L}(t_1, t', x; n) = \frac{1}{L_R + t'}\prod_{1L}(t_1, t', x; n) \text{ dan } \overline{\prod}_{1R}(t_1, t', x; n) = \frac{1}{L_L + t'}\prod_{1R}(t_1, t', x; n)$$

Dengan menggunakan persamaan (8), model di atas dapat ditransformasikan dalam masalah program multi objektif nonlinear bilangan bulat sebagai berikut :

$$\max \left\{\overline{\prod}_{1L}(t_1, t', x; n), \overline{\prod}_{1C}(t_1, t', x; n)\right\} \quad (29)$$

dengan $\overline{\prod}_{1C}(t_1, t', x; n) = \frac{1}{2}\left(\overline{\prod}_{1L}(t_1, t', x; n) + \overline{\prod}_{1R}(t_1, t', x; n)\right)$ adalah center dari fungsi keuntungan.

MODEL 2 (Model untuk *Backlog Shortage* Penuh)

Jika total shortage yang dihitung di *backlog* penuh pada waktu sejumlah barang tiba di OW, maka tidak ada biaya tambahan selain biaya shortage. Dalam hal ini, fungsi keuntungan $\prod_2(t_1, t', x; n)$ memuat elemen-elemen sebagai berikut

ix. Biaya pemesanan = $A(L) = a - bL^{\gamma}$

x. Biaya penyimpanan = $G_1F(x) + (G_2 + G_3)H$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

xi. Biaya shortage = $\frac{Dc_s}{2}(T-t_2)^2$

xii. Biaya transportasi = $nQc_t(x)$

xiii. Biaya penyusutan barang = $Q_d\, c_d$

xiv. Biaya pembelian = $p\left[S + D(T-t_2)\right]$

xv. Pendapatan penjualan = $DmpT$

Jadi, rata-rata keuntungan dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\overline{\prod}_2(t_1,t',x;n) = Dmp - \frac{1}{T}\left\{ p\left[S + \frac{D}{\delta}\left(1-e^{-\delta(T-t_2)}\right)\right] + G_1F(x) + \left(G_2+G_3\right)H + A(L) + nQc_t(x) + Q_d\, c_d + \frac{Dc_s}{2}(T-t_2)^2 \right\} \tag{30}$$

Dari pembahasan sebelumnya, waktu tunggu sebagai suatu bilangan interval dan menggunakan interval aritmatika model di atas dapat ditransformasikan dalam masalah program multi objektif nonlinear bilangan bulat sebagai berikut :

$$\max\ \left\{\overline{\prod}_{2L}(t_1,t',x;n), \overline{\prod}_{2C}(t_1,t',x;n)\right\} \tag{31}$$

dengan $\overline{\prod}_{2C}(t_1,t',x;n) = \frac{1}{2}\left(\overline{\prod}_{2L}(t_1,t',x;n) + \overline{\prod}_{2R}(t_1,t',x;n)\right)$ adalah center dari fungsi keuntungan.

Teorema

Jika kehilangan shortage yang di backlog menuju nol, yaitu $\delta \to 0^+$, maka model-1 dapat direduksi menjadi model-2, yaitu : $\overline{\prod}_1(t_1,t',x;n) \to \overline{\prod}_2(t_1,t',x;n)$

3.4. Metode Penyelesaian

Model 1 dan model 2 yang direpresentasikan oleh persamaan (29) dan (30) adalah model multi objektif yang diselesaikan dengan metode kriteria global. Dengan metode kriteria global, masalah program multi objektif nonlinear bilangan bulat dikonversi dalam masalah single objektif. Berikut algoritma penyelesaian yang digunakan untuk menyelesaikan masalah program multi objektif integer nonlinear :

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Tahap 1 : Untuk n bilangan bulat, selesaikan masalah program milti objektif (29) (atau (31)) sebagai masalah single objektif menggunakan satu fungsi objektif pada suatu waktu dengan mengabaikan fungsi objektif yang lain.

Tahap 2 : Dari hasil tahap 1, tentukan vektor objektif ideal misalkan $\left(\overline{\pi}_{1L}^{0}, \overline{\pi}_{1C}^{0}\right)$ atau $\left(\overline{\pi}_{21L}^{0}, \overline{\pi}_{2C}^{0}\right)$. Vektor objektif ideal digunakan sebagai titik referensi sehingga masalah (29) atau (31) menjadi :

$$\min\ (GC_i) = \min \left\{ \sum_{j=L,C} \left(\frac{\overline{\prod}_{ij}(t_1, t', x, n) - \overline{\prod}_{ij}{}^{0}}{\overline{\prod}_{ij}{}^{0}} \right)^{p} \right\}^{1/p}, \qquad (32)$$

dengan i =1 atau 2, $1 \le p < \infty$.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan prosedur penyelesaian dari suatu masalah inventory dua gudang dengan harga penjualan bergantung tingkat permintaan dan penyusutan barang. Shortage diperbolehkan dan di backlog sebagian/ penuh. Dalam kasus real, biaya pemesanan menurun terhadap bertambahnya waktu tunggu/ lead time. Lead time ditentukan sebagai ketidakpastian dalam fuzzy yang dinyatakan dengan fungsi keanggotaan linear selanjutnya diaproksimasi ke suatu bilangan interval. Kemudian masalah tersebut dikonversi dalam masalah inventory multi objektif dimana fungsi-fungsi objektif-nya direpresentasikan oleh limit kiri dan center dari fungsi-fungsi interval. Untuk memperoleh penyelesaian dari masalah inventory multi objektif tersebut digunakan metode kriteria global. Untuk penelitian selanjutnya masalah inventory dapat diformulasikan dan diselesaikan dalam fuzzy-probabilistik dengan distribusi probabilitas untuk harga penjualan dan biaya-biaya inventory.

5. DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, M.S. and Shetty,C.M., 1993, “Nonlinear Programming, Theory Algorithms”, John Wiley & Sons, Singapore.

Chiang, J., Yao, J.-S., Lee, H.-M., 2005, “Fuzzy inventory with backorder defuzzification by signed distance method”, Journal of Information Science and Engineering 21, 673–694.

Debdulal Panda, Samarjit Kar, 2005, “Multi-item Stochastic and Fuzzy-Stochastic Inventory Models Under Imprecise Goal and Chance Constraints”, AMO - Advanced Modeling and Optimization, Volume 7, Number 1.

Dey, J.K., Kar, S., Maiti, M., 2005, “An interactive method for inventory control with fuzzy lead-time and dynamic demand”, European Journal of Operational Research 167, 381–397.

K.Maity, M. Maiti, 2007, “A numerical approach to a multi-objective optimal control problem for deteriorating multi-item under fuzzy inflation and discounting”, Computers and Mathematics with Applications.

K. Maity, M. Maiti, 2005, “Production inventory system for deteriorating multi-item with inventory-dependent dynamic demands under inflation and discounting”, Tamsui Oxford Journal of Management Science 21, 1-18.

Lee, C.C., Ma, C.Y., 2000, “Optimal Inventory policy for deteriorating items with two-warehouse and time dependent demands”, Production Planning & Control 11 (7), 689–696.

S.K. Goyal, B.C. Giri, 2001, “Recent trends modeling of deteriorating inventory”, European Journal of Operation Research 134, 1-16.

S. Papachristos, K. Skouri, 2003, “An inventory model of deteriorating items, quantity discount, pricing and time-dependent partial backlogging”, International Journal of Production Economics 83, 247-256.