ISBN : 978-979-16353-3-2

T-12

ALGORITMA GROEBNER WALK LAMBAT?

I Made Sulandra
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang
Jl. Surabaya 6 Malang, Jawa Timur, 65145
sulandraum@yahoo.co.id
sulandra@um.ac.id

Abstract. The Groebner Walk Algorithm was development, since the existing Buchberger Algorithm takes more time and computer memories to compute a Groebner base of a polynomial ideal with respect to a lexicographic order. To compute a Groebner base of a polynomial ideal with respect to a lexicographic order the Groebner Walk Algorithm takes some steps to compute some Groebner base with respect to some weight lexicographic order, before the lexicographic Groebner basis founded. Generally, the Groebner Walk algorithm is more efficient than the Buchberger algorithm.

This article shows the experimental result of the implementation of the Groebner Walk on Computer Algebra System Singular. In fact, the last step to compute a Groebner basis of a homogenous ideal with respect to the lexicographic order takes more time and computer memory. So, for some cases the Groebner Walk algorithm is still not efficient.

Algoritma Groebner Walk dikembangkan karena Algoritma Buch-berger memerlukan waktu dan memori yang sangat banyak untuk menghitung basis Groebner dari suatu ideal terhadap order leksikografis. Untuk menghitung basis Groebner terhadap order leksi-kografis, Algoritma Groebner Walk harus menghitung terlebih dahulu beberapa basis Groebner terhadap order yang lain secara bertahap. Secara umum, Algoritma Groebner Walk jauh lebih efisien dari Algoritma Buchberger.

Makalah ini menyajikan hasil eksperimen (pengimplemen-tasian) dari Algoritma Groebner Walk di Sistem Aljabar Komputer Singular. Ternyata, proses penghitungan basis Groebner pada langkah terakhir, yaitu penghitungan basis Groebner dari ideal homogen terhadap order leksikografis sangat memakan waktu dan memori yang sangat lama. Akibatnya, Algoritma Groebner Walk menjadi tidak efisien.

Kata Kunci: Basis Groebner, Algoritma Groebner Walk

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Algoritma Buchberger dikembangkan oleh Bruno Bucherger pada tahun 1960an. Algoritma Buchberger menghitung suatu basis Groebner dari ideal polinom terhadap suatu order-monom. Pemilihan order monom sangat dipengaruhi oleh permasalahan yang akan diselesaikan. Misalnya, order leksikografis sangat bermanfaat dalam penyelesaian suatu sistem persamaan polinom. Akan tetapi, penghitungan basis Groebner terhadap order leksikografis sangat memakan waktu dan memori komputer. Pada kasus-kasus tertentu, implementasi Algoritma Buchbeger pada suatu sistem aljabar komputer tidak dapat menghasilkan basis Groebner, karena keterbatasan memori (Buchberger, 1985, Faugere dkk, 1993, dan Tran, 2000). Apabila digunakan order yang lain, misalnya, order leksikografis derajat balikan, maka algoritma Buchberger sangat efisien untuk menghitung basis Groebner (Bayer & Stillmann, 1987), tetapi sistem persamaan polinomial yang diperoleh masih sulit untuk diselesaikan. Oleh karena itu, Faugere dkk (1993), Traverso (1996), dan Collart dkk (1997) mengembangkan algoritma yang mengkonversikan basis Groebner dari suatu order ke order leksikografis. Selanjutnya, algoritma yang dikembangkan oleh Collart dkk disebut Algoritma Groebner Walk. Akan tetapi Algoritma Groebner Walk masih tidak efisien (Amrhein dkk (1996, 1997), Amrhein dan Gloor (1998), dan Tran (2000)).

Tulisan ini menyajikan hasil eksperimen dari penghitungan beberapa basis Groebner dari beberapa ideal melalui pengimplementasian Algoritma Groebner Walk pada sistem aljabar komputer *Singular*, yaitu ketidakefisienan dari Algoritma Groebner Walk pada langkah terakhir sebelum basis Groebner terhadap order leksikigrafis diperoleh. Dalam hal ini akan ditunjukkan bahwa waktu dan memory yang digunakan pada langkat terakhir tersebut sangat besar. Selain itu juga akan ditunjukkan bahwa polimon-polinom tersebut terdiri dari banyak monom. Berdasarkan kenyataan tersebut diharapkan dapat dikembangkan algoritma atau langkah tambahan untuk meningkat efisiensi dari Algoritma Groebner Walk.

Pengkajian lanjut tentang Algoritma Groebner Walk dapat dilihat di Collart dkk (1997) dan Sulandra (2003). Sedangkan konsep-konsep dasar tentang ring polinom, order monom, dan basis Groebner dapat dilihat di Adams & Loustaunau (1994), Cox dkk (1997), dan Becker & Weispfenning (1998)

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Algoritma Groebner Walk

Dalam tulisan ini K menyatakan suatu lapangan (*field*), *N* menyatakan himpunan semua bilangan bulat tidak negatif, $K[x] = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ adalah ring polinom dengan n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ atas lapangan K, dan $M(x) = \{x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in N, i = 1,2,\cdots,n\}$ ada-lah himpunan semua monom di $K[x]$.

Misalkan $\succ$ suatu order monom yang didefinisikan pada $K[x]$ dan $I \subseteq K[x]$ adalah suatu ideal. Himpunan bagian $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_t\}$ dari *I* adalah suatu *basis Groebner* dari *I* terhadap order $\succ$, jika

$$\langle I_\succ \rangle := \langle in_\succ(f) : f \in I \rangle = \langle in_\succ(g_1), in_\succ(g_2), \cdots, in_\succ(g_t) \rangle =: \langle G_\succ \rangle$$

dengan $in_\succ(f)$ adalah *term utama* dari *f*. Berarti, $in_\succ(f) \succ m$ untuk setiap term *m* dari *f*. Basis Groebner *G* dikatakan *tereduksi*, jika koefisien utama $lc(g)$ dari setiap $g \in G$ adalah 1 dan untuk setiap $g \in G$ tidak terdapat $f \in G - \{g\}$ sehingga $in_\succ(f)$ membagi suatu monom dari *g.*

Definisi 1. Vektor $\omega := (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in Q^n_{\geq 0}$ disebut *vektor beban rasional* dan *derajat -beban-*ω dari monom $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \in M(x)$ didefiniskan dengan $\deg_\omega(x^\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i$ dan *derajat-beban-*ω $\deg_\omega(f)$ dari polinom $0 \neq f \in K[x]$ adalah derajat-beban-ω terbesar dari monom-monom dari *f*. Selanjutnya, didefinisikan $\deg_\omega(0) = -1.$ Polinom *f* dikatakan $\omega -$*homogen*, bila derajat-beban-ω dari semua monom dari f adalah sama.

Melalui pengaturan ulang susunan monom, maka setiap polinomial f dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari polinom-polinom $\omega -$homogen h_i, yaitu: $f = h_1 + h_2 + \cdots + h_r$ dengan $\deg_\omega(h_1) > \deg_\omega(h_2) > \cdots > \deg_\omega(h_t).$ Polinom h_1 disebut *komponen utama* $in_\omega(f)$ dari *f* terhadap ω. Jadi, *f* adalah $\omega -$homogen jika dan hanya jika $in_\omega(f) = f$. *Komponen utama* dari suatu himpunan bagian $G \subseteq K[x]$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

terhadap ω didefinisikan dengan $G_\omega := \{in_\omega(g) \mid g \in G\}$. Suatu ideal *I* dikatakan ω-*homogen*, jika ideal *I* memuat semua komponen $\omega - \text{homogen}$ dari setiap $f \in I$. **Lema 6.** Untuk setiap order monom $\succ$ di $K[x]$ terdapat vektor beban $\omega \in Z^n$ sehingga $\langle I_\succ \rangle = \langle I_\omega \rangle$ (Sturmfels, 1996).

Definisi 2. Order-monom $\succ$ di $K[x]$ dikatakan *memperhalus* vektor beban ω, apabila $\forall s,t \in M(x)$ berlaku:

$$s \succ t, \text{ jika } \deg_\omega(s) > \deg_\omega(t).$$

Order-beban $\succ_\omega$ didefinisikan dengan

$s \succ_\omega t$, jika $\deg_\omega(s) > \deg_\omega(t)$ atau $\deg_\omega(s) = \deg_\omega(t)$ dan $s \succ t$,

untuk setiap monom $s,t \in M(x)$.

Berdasarkan Definisi 2 diperoleh simpulan bahwa ω diperhalus oleh $\succ_\omega$, dan jika $\succ$ memperhalus ω, maka $in_\succ(in_\omega(f)) = in_\succ(f)$ dan $\langle I_\succ \rangle = \langle \langle I_\omega \rangle_\succ \rangle$.

Pada bagian akhir ini dibahas algoritma untuk menghitung basis Groebner tereduksi dari ideal *I* terhadap order $\succ_2$, apabila diberikan basis Groebner tereduksi dari *I* terhadap order $\succ_1$.

Lema 3. Jika *G* adalah basis Groebner tereduksi dari *I* terhadap order $\succ$ yang memper-halus ω, maka G_ω adalah suatu basis Groebner dari $\langle I_\omega \rangle$ terhadap $\succ$.

Lema 4. Misalkan order $\succ_1$ dan $\succ_2$ memperhalus ω dan $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_r\}$ merupakan basis Groebner tereduksi dari *I* terhadap $\succ_1$. Jika $M = \{m_1, m_2, \cdots, m_s\}$ adalah basis Groebner tereduksi dari $\langle I_\omega \rangle$ terhadap $\succ_2$, maka untuk setiap $i = 1,2,\cdots,s$ terdapat polinom $\omega - \text{homogen}$ $h_{i1}, h_{i2}, \cdots, h_{ir}$ yang memenuhi

$$m_i = \sum_{j=1}^{r} h_{ij} in_\omega(g_j) \text{ dengan } \deg_\omega(m_i) = \deg_\omega(h_{ij} in_\omega(g_j))$$

untuk semua $j = 1,2,\cdots,r$ dengan $h_{ij} \neq 0$.

Lema 5. Misalkan $I, \succ_1, \succ_2, \omega, G, M, h_{ij}$ seperti pada Lema 3.2. Jika $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ dengan $f_i = \sum_1^r h_{ij} g_j$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,s,$ maka *F* adalah suatu basis Groebner dari *I* terhadap $\succ_2$.

Dari Lema 3, Lema 4, dan Lema 5 diperoleh *metode konversi basis langsung dari G ke F* untuk menghitung basis Groebner *F,* apabila basis Groebner G diberikan, seperti disajikan pada diagram berikut.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{G := rGB(I, \succ_1)} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \boxed{F := GB(I, \succ_2)} \\
\boxed{G_\omega := GB(\langle I_\omega \rangle, \succ_1)} \arrow[r] & \boxed{M := rGB(\langle I_\omega \rangle, \succ_2)} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Diagram 1: Konversi Basis Langsung dari *G* ke *F*

Pada metode konversi langsung di atas, kedua order yang diberikan, $\succ_1$ dan $\succ_2$, secara bersa-maan memperhalus vektor beban ω. Apabila kedua order $\succ_1$ dan $\succ_2$ tidak memperhalus ω, maka metode konversi basis langsung harus diterapkan secara berulang-ulang, tetapi hingga banyaknya, untuk memperoleh basis Groebner tereduksi dari *I* terhadap $\succ_2$. Selanjutnya, algoritma yang didasari oleh cara ini disebut *Algoritma Groebner Walk*.

Lema 6. Untuk setiap order monom $\succ$ di $K[x]$ terdapat vektor beban $\omega \in Z^n$ sehingga $\langle I_\succ \rangle = \langle I_\omega \rangle$ (Sturmfels, 1996).

Lema 7. Jika *G* adalah basis Groebner tereduksi dari ideal *I* terhadap $\succ$, maka $\langle I_\succ \rangle = \langle I_\omega \rangle$ jika dan hanya jika $in_\succ(g) = in_\omega(g)$ untuk semua $g \in G.$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Definisi 9. *Kerucut Groebner* $Cone(I,\succ)$ dari ideal *I* terhadap $\succ$ adalah penutup topologi di R^n dari $\{\omega \in R^n_{\geq 0} : \langle I_{\succ}\rangle = \langle I_{\omega}\rangle\}$.

Dari Lema 8 diperoleh akibat berikut.

Akibat 10. Jika $\succ_1$ dan $\succ_2$ dua order monom dan *G* adalah basis Groebner tereduksi dari *I* terhadap $\succ_1$, maka $Cone(I,\succ_1) = Cone(I,\succ_2)$ jika dan hanya jika $in_{\succ_1}(g) = in_{\succ_2}(g)$ untuk semua $g \in G$.

Kerucut Groebner $Cone(I,\succ)$ ini merupakan suatu polihedral konveks di R^n dengan interior yang tidak kosong dan himpunan semua kerucut Groebner dari *I* adalah hingga dan disebut *fan Groebner* $GF(I)$ dari *I*. Jadi $GF(I) = \{Cone(I,\succ) : \succ \text{order monom di } K[x]\}$ dan berlaku

$$\bigcup_{Cone(I,\succ)\in GF(I)} Cone(I,\succ) = R^n_{\geq 0}$$ (Mora dan Robbiano, 1988).

Contoh 11. Fan Groebner dari ideal $I = \langle x^2 - y^3, xy + xz, x^2y + z^2x\rangle$ terdiri dari 9 kerucut Groebner berikut.

1. $C_1 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : x - 3y + z \geq 0, x \geq \frac{3}{2}y, y \geq z\}$
2. $C_2 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : x - 3y + z \leq 0, x \geq \frac{3}{2}y, y \geq z\}$
3. $C_3 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : \frac{3}{2}z \leq x \leq \frac{3}{2}y, y \geq z\}$
4. $C_4 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : z \leq x \leq \frac{3}{2}z, x \leq \frac{3}{2}y, y \geq z\}$
5. $C_5 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : x \leq z \leq y\}$
6. $C_6 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : x \leq y \leq z\}$
7. $C_7 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : y \leq x \leq \frac{3}{2}y, y \leq z\}$
8. $C_8 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : \frac{3}{2}y \leq x \leq y, y \leq z\}$
9. $C_9 = \{(x,y,z) \in R^3_{\geq 0} : 2y \leq x, y \leq z\}$

Dari setiap order monom $\succ$ di $K[x]$ dapat dibentuk suatu matriks rasional *A* yang berukuran $n \times n$ dengan vektor-vektor baris $\omega_i \in Q^n$ sehingga untuk sebarang dua monom $s = x^{\alpha}$ dan $t = x^{\beta}$ di $M(x)$ berlaku $s \succ t$ jika dan hanya jika $\omega_j \cdot \alpha > \omega_j \cdot \beta$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

untuk suatu $j \in \{1,2,\cdots,n\}$ dan $\omega_i \cdot \alpha = \omega_i \cdot \beta$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,j$ (Robbiano, 1985). Selanjutnya, order monom $\succ$ dikatakan *terdefinisi* oleh matriks *A.* Pada sistem aljabar komputer Singular hanya digunakan vektor-vektor beban $\omega \in Z_{\geq 0}$ (Greuel & Pfister, 2002). Oleh karena itu, dipilih matriks *A* dan *B* yang unsur-unsurnya merupakan bilangan bulat yang tidak negatif sehingga $\succ_1$ didefinisikan oleh *A* dan $\succ_2$ oleh *B*. Misalkan $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ dan $\tau = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$ berturut-turut adalah vektor baris pertama dari *A* dan *B*, maka order $\succ_1$ memperhalus σ dan $\succ_2$ memperhalus τ.

Dari dua vektor beban σ dan τ diperoleh suatu vektor beban antara ω seperti pada teorema berikut.

Teorema 12. Jika $\succ_2$ memperhalus τ, maka terdapat vektor beban $\omega \in \overline{\sigma\tau}$ dengan $\omega \neq \sigma$ sehingga $\overline{\sigma\omega} \subset Cone(I, \succ_{2_\sigma})$.

Karena oktan positif $R^n_{\geq 0}$ ter-"partisi" secara hingga oleh kerucut-kerucut Groebner dari ideal *I*, maka ruas garis $\overline{\sigma\tau}$ terletak pada suatu gabungan hingga dari kerucut-kerucut tersebut, yaitu

$$\overline{\sigma\tau} \subset \bigcup_{i=1}^{t} Cone(I, \succ_{2_{\omega_{i-1}}}) \text{ untuk suatu bilangan positif } t.$$

Selanjutnya akan ada diperoleh vektor-vektor beban $\omega_0 = \sigma, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_t = \tau$ sehingga

$$\overline{\omega_{i-1}\omega_i} \subset Cone(I, \succ_{2_{\omega_{i-1}}}) \text{ dan } \omega_i \in Cone(I, \succ_{2_{\omega_{i-1}}}) \cap Cone(I, \succ_{2_{\omega_{i-1}}})$$

untuk setiap $i = 1,2,\cdots,t$.

Dalam hal ini, Algoritma Groebner Walk memerlukan *t* langkah untuk menghasilkan basis Groebner tereduksi dari I terhadap $\succ_2$. Jadi, konversi basis langsung akan diterapkan sebanyak *t* kali. Pada konversi (langkah) ke-*i* harus dihitung basis Groebner tereduksi dari *I* terhadap order beban $\succ_{2\omega_i}$. Selanjutnya, Algoritma Groebner Walk dapat disajikan sebagai berikut.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

- Masukan:
  - dua order monom $\succ_1$ dan $\succ_2$
  - basis Gröbner tereduksi G dari I terhadap $\succ_1$
- Luaran:
  - Basis Gröbner tereduksi dari I terhadap $\succ_2$
- Inisialisasi:
  - σ : vektor beban yang diperhalus oleh $\succ_1$
  - τ : vektor beban yang diperhalus oleh $\succ_2$
  - $\omega = \sigma$
- **while** (1) **do**
  - $G_\omega := \mathrm{InitialForm}(G, \omega)$ (Aplikasi dari Lemma~\ref{3.1})
  - $M := \mathrm{ReduksiGB}(\langle G_\omega \rangle, \succ_{2_\omega})$ (Hitung basis Gröbner tereduksi dari ideal $\langle G_\omega \rangle$ terhadap $\succ_{2_\omega}$ dengan Algoritma Hilbert-driven)
  - $F := \mathrm{LiftGB}(G, G_\omega, M, \succ_{2_\sigma})$ (Aplikasi dari Teorema~\ref{3.3})
  - $G := \mathrm{Reduksi}(F, \succ_{2_\omega})$ (Mereduksi basis Gröbner F terhadap $\succ_{2_\omega}$
  - **If** $(\omega = \tau)$ **then**
    - **return** (G)
  - $\sigma = \omega$
  - $\omega = \mathrm{Vektorbebanantara}(G, \sigma, \tau)$ (Aplikasi dari Teorema~\ref{omega})

Catatan:

- Prosedur $\mathrm{InitialForm}(G, \omega)$ menghitung komponen utama $in_\omega(g)$ dari setiap polinom *g* di G terhadap vektor beban ω. Himpunan yang dihasilkan dari prosedur InitialForm adalah $G_\omega = \{in_\omega(g) \mid g \in G\}$ yang sekaligus merupakan suatu basis Groebner dari ideal $\langle I_\omega \rangle$ dengan $I = \langle G \rangle$ (Lema 3).
- Prosedur $\mathrm{ReduksiGB}(\langle G_\omega \rangle, \succ_{2_\omega})$ menghitung basis Groebner tereduksi dari ideal $\omega-$homogen $\langle G_\omega \rangle$ terhadap order beban $\succ_{2_\omega}$ melalui penerapan Algorima Hilbert-driven. Algoritma Hilbert-driven merupakan algoritma yang terefisien untuk menghitung basis Groebner dari ideal homogen (Traverso, 1997).
- Prosedur $\mathrm{LiftGB}(G, G_\omega, M, \succ_{2_\sigma})$ menghasilkan basis Groebner dari ideal $\langle G \rangle$ tanpa melalui penghitungan langsung, tetapi menerapkan Lema 4 dan 5.

- Prosedur $\text{Reduksi}(F, \succ_{2_\omega})$ menghasilkan basis Groebner tereduksi dari ideal $\langle F \rangle$ terhadap order beban $\succ_{2_\omega}$ dengan mereduksi setiap pelinom di *F,* yaitu mencari sisa pembagian dari setiap polinom $f \in F$ dengan $F - \{f\}$, karena masukan *F* sendiri sudah merupakan suatu basis Groebner.
- Prosedur $\text{Vektorbebanantara}(G, \sigma, \tau)$ menghasilkan vektor beban antara ω sehingga ruas garis $\overline{\sigma\omega}$ terletak pada satu kerucut Groebner dan ω terletak di penutup dua kerucut Groebner yang berdekatan (Teorema 12).

Contoh 13. Tentukan basis Groebner dari ideal $I = \langle x^2 - y^3, xy + xz, x^2 y + z^2 x \rangle \subset R[x, y, z]$ terhadap order leksikografis $\succ_{lex}$ dengan $x > y > z$.

Penyelesaian: Pertama-tama, hitung basis Groebner tereduksi dari ideal $I = \langle x^2 - y^3, xy + xz, x^2 y + z^2 x \rangle$ terhadap order *leksikografis derajat balikan* $\succ_{rlex}$ dengan $x > y > z$, yaitu $G = \{xy + xz, x^2 z - xz^2, y^3 - x^2, xz^3 + x^3, x^4 + x^3\}$. Pilih $\omega = \sigma = (1,1,1)$ dan $\tau = (1,0,0)$.

Pada langkah pertama diperoleh:

- $G_\omega = \{xy + xz, x^2 z - xz^2, y^3, xz^3, x^4\}$
- $M = \{xy + xz, y^3, x^2 z - xz^2, xz^3, x^4\}$
- $F = \{xy + xz, y^3 - x^2, x^2 z - xz^2, xz^3 + x^3, x^4 + x^3\}$
- $G = \{xy + xz, y^3 - x^2, x^2 z - xz^2, , xz^3 + x^3, x^4 + x^3\}$
- $\omega = (3,2,2)$

Pada langkah kedua diperoleh:

- $G_\omega = \{xy + xz, y^3 - x^2, x^2 z, xz^3 + x^3, x^4\}$
- $M = \{xy + xz, x^2 - y^3, y^3 z, y^4, xz^4\}$
- $F = \{xy + xz, -y^3 + x^2, y^3 z - xz^2, y^4 + xz^2, xz^4 + x^2 z^2\}$
- $G = \{xy + xz, x^2 - y^3, y^3 z - xz^2, y^4 + xz^2, xz^4 + xz^3\}$
- $\omega = (2,1,1)$

Pada langkah ketiga diperoleh:

 ISBN : 978-979-16353-3-2

- $G_\omega = \{xy + xz, x^2, y^3z - xz^2, y^4, xz^4\}$
- $M = \{xy + xz, y^4 + y^3z, xz^2 - y^3z, x^2, y^3z^3\}$
- $F = \{xy + xz, y^4 + y^3z, -y^3z + xz^2, x^2 - y^3, y^3z^3 + xz^3\}$
- $G = \{xy + xz, y^4 + y^3z, xz^2 - y^3z, x^2 - y^3, y^3z^3 + y^3z^2\}$
- $\omega = (1,0,0)$

Pada langkah keempat (terakhir) diperoleh:

- $G_\omega = \{xy + xz, y^4 + y^3z, xz^2, x^2, y^3z^3 + y^3z^2\}$
- $M = \{xy + xz, y^4 + y^3z, xz^2, xy + xz, x^2\}$
- $F = \{y^3z^3 + y^3z^2, y^4 + y^3z, xz^2 - y^3z, xy + xz,, x^2 - y^3\}$
- $G = \{y^3z^3 + y^3z^2, y^4 + y^3z, xz^2 - y^3z, xy + xz,, x^2 - y^3\}$

Jadi, basis Groebner tereduksi dari ideal *I* terhadap order leksikografis $\succ_{lex}$ dengan $x > y > z$ adalah

$$G = \{y^3z^3 + y^3z^2, y^4 + y^3z, xz^2 - y^3z, xy + xz,, x^2 - y^3\}.$$

Analisa

Pada bagian ini disajikan hasil penghitungan basis Groebner tereduksi dari beberapa ideal di $Q[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ terhadap order leksikografis dengan menggunakan prosedur berdasarkan pengmplementasian Algoritma Groebner Walk pada sistem aljabar komputer *Singular*. Perhitungan itu dilakukan pada komputer dengan Pentium IV 2,40 GHz Processor dan 1 Gegabytes RAM. Berdasarkan Tabel 1 dapat disimpulkan bahwa langkah terakhir dari Algoritma Groebner Walk sangat dominan dalam penggunaan waktu, yaitu lebih dari 94% waktu total perhitungan.

Contoh	memory	langkah	Penggunaan waktu (%)				Total
			InitialForm	ReduksiGB	LiftGB	Reduksi	(%)
Arnborg7	898	7	0.00	9,65	85,53	0,44	95,6
Trinks1	4630	2	0.00	92,27	7,53	0,03	2
Canny2	1339	5	0.00	93,41	055	0,27	9983
Bsp6	1507	4	0.00	71,01	23,67	1,18	94,2

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Bsp7	3276	8	0.00	30,67	37,18	30,90	3 95,8 6 98,7 5

Tabel 1. Penggunaan waktu (%) pada langkah terakhir dari Algoritma Groebner Walk

Pada kasus-kasus tertentu (seperti kasus di bawah ini), langkah terakhir dari Algoritma Groebner Walk memerlukan sangat banyak memory dan mengakibatkan tidak menghasilkan basis Groebner yang diinginkan, karena himpunan pembangun G_ω dari ideal $\omega-$homogen memuat banyak polinom yang diperoleh terdiri dari banyak monom dan Algoritma Hilbert-driven yang diterapkan untuk menghitung basis Groebnernya memakan sangat banyak memory seperti yang disajikan pada Tabel 2.

Contoh	**N**	***Banyak polinom di G***	**Banyak polinom di** G_ω
Wang6	4	16 polinom: 1 polinom terdiri dari 8 monom dan yang lain masing-masing terdiri dari 25 monom	1 monom dan 15 polinom: 1 polinom terdiri dari 8 monom dan yang lain masing-masing terdiri dari 25 monom
Cassou mod1	4	16 polinom yang masing-masing terdiri dari 23 monom	1 monom dan 15 polinom yang masing-masing terdiri dari 23 monom
Cylic6	6	70 polinom: 15 polinom terdiri dari 24 monom, 16 polinom(25 monom), 17 polinom (26 monom), 20 polinom terdiri dari 27 monom, dan yang lainnya terdiri dari 6 dan 9 monom	1 monom dan 69 polinom; 15 polinom terdiri dari 24 monom, 16 polinom(25 monom), 17 polinom (26 monom), 20 polinom terdiri dari 27 monom, dan 1 polinom (9 monom)
Dessin1	8	38 polinom: 4 polinom terdiri dari 29	Sama dengan *G*

		monom, 2 polinom (36 monom), 3 polinom (37 monom), 5 polinom (43 monom), 8 polinom (46 monom), 8 polinom (47 monom) dan yang lainnya berturut-turut terdiri dari 2, 4, 5, 9, 11, 17, 19, dan 39 monom	
Dessin2	10	51 polinom: 2 polinom terdiri dari 11 monom, 2 polinom (8 monom), 2 polinom (27 monom), 3 polinom (31 monom), 3 polinom (33 monom), 4 polinom (36 monom), 4 polinom (38 monom), 4 polinom (40 monom), 3 polinom (41 monom), 6 polinom (42 monom), 9 polinom (43 monom), dan yang lainnya masing-masing terdiri dari 2, 3, 4, 6, 13, 17, 16, 20, atau 24 monom	1 monom dan 50 polinom seperti pada G

Tabel 2. Banyak polinom pada himpunan pembangun dari ideal $(1,0,0,...,0)-$homogen

Simpulan dan Saran

Berdasarkan kenyataan pada Tabel 1 dan Tabel 2 maka dapat disimpulkan bahwa Algoritma Groebner Walk masih belum efisien dan perlu dikembangkan alternatif lain, misalnya memperbaiki lintasan (ruas garis) yang diambil. Dengan kata lain, ruas garis yang dipilih tidak harus tunggal, tetapi merupakan penyambungan dari beberapa ruas garis sehingga polinom-polinom pembangunnya tidak terdiri dari banyak polinom yang mempunyai banyak monom.

Daftar Rujukan

Adams, W. dan Loustaunau, P. 1994. *An Introduction to Groebner Bases*, Graduate Studies in Mathematics **3**. Providence: AMS,

Amrhein, B., Gloor, O., and Küchlin, W. 1996. Walking Faster di *Proceeding of DISCO'96*, Karlsruhe, Germany. Berlin: Springer-Verlag.

Amrhein, B., Gloor, O., and Küchlin W. 1997. *On the Walk* (preprint).

Amrhein, B. & Gloor, O. 1998. The Fractal Walk di Buchberger, B. and Winkler, F., eds, *Proceedings of the International Conference '33 Years of Groebner Bases*, Linz. London: Cambridge University Press.

Bayer, D. and Stillman, M. 1987. A Theorem on Refining Division Orders by the Reverse Lexicographic Order. *Duke Journal Math*. **55**. 321-328.

Becker, T. and Weispfenning, V. 1998. *Groebner Basis. A Computationd Approach to Commutative Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Cox, D., Little, J., and O'Shea, D. 1997. *Ideals, Varities and Algorithms*. New York: Springer-Verlag.

Collart. S., Kalkbrener. M., and Mall, D. 1997. Converting Bases with the Groebner Walk. *Journal Symbolic Computation* **24**. 465-469.

Faugere, J.C., Gianni, P., Lazard, D., and Mora, T. 1993. Efficient Computation of Zero-dimensional Groebner Bases by Change of Ordering. *Journal Symbolic computation* **16.** 329-344.

Greuel, G.-M., Pfister, G., and Schoenemman, H. 1997. *Singular Reference Manual* in Reports on Computer Algebra number **12** Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, http://www.mathematik.uni-kl.de/~zca/Singular.

Greuel, G.-M. and Pfister, G. 2002. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Berlin: Springer-Verlag.

Mora, T. and Robbiano, L. 1988. The Groebner Fan of an Ideal. *Journal Symbolic computation* **6**, 183-208.

Robbiano, L. 1985. Term Orderings on the Polynomial Ring, in *Proceedings of EUROCAL'85, Lecture Notes in Computer Science* **204**. Berlin: Springer-Verlag, 513-156.

Sturmfels, B. 1994. *Groebner Bases and Polytopes*. Lectures presented at the Holiday Symposium at New Mexico State University.

Sulandra, I Made. 2003. Ueber Groebnerwalkalgorithmen. Disertasi (tidak dipublikasikan). Jerman. Universitaet des Saarlandes.

Tran, Quoc-Nam . 2000., A Fast Algorithm for Groebner Basis Conversion and its Applications, *Journal Symbolic Computation* **30**. 451-467.

Traverso, C. 1996. Hilbert Functions and the Buchberger Algorithm, *Journal Symbolic Computation* 2, 355-376.

Lampiran:

wang6: Ideal $I = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ terhadap order lex dan *q>c>p>d* dengan

$$g_1 = 2cdpq\text{-}4cd + 2pq + 4pqc\text{-}4d^2q\text{-}2d^2pq + p^2d^2\text{-}2c^2q + c^2q^2 + 2cdq\text{-}2cdq^2 + d^2q^2\text{-}2cdp\text{-}8p + c^2 + 4d^2\text{-}2q + 10p^2 + 2,$$

$$g_2 = 2dpq + 4dp^2 + dq\text{-}7dp + cp\text{-}3pqc + 4c,$$
$$g_3 = \text{-}2p^2 + 8p\text{-}2\text{-}2pq\text{-}2q,$$
$$g_4 = 4\text{-}4p\text{-}4q^2 + 3c^2q^2\text{-}6c^2q + 3c^2 + 9p^2d^2 + 6d^2pq\text{-}3d^2q^2\text{-}24pd^2 + 12d^2 + 4p^2 + 12cdp + 12cdq + 12cdpq\text{-}12cd;$$

cyclic6: Ideal $I = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 \rangle$ terhadap order lex dengan $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6$ dan

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6,$$
$$g_2 = x_1x_2 + x_1x_6 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6,$$
$$g_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_6 + x_1x_5x_6 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6,$$
$$g_4 = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6,$$
$$g_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_6 + x_1x_2x_3x_5x_6 + x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6,$$

$$g_6 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 - 1;$$

cassoumod1: Ideal *I* terhadap order lex dengan $a > b > c > d$ dan

$$I = \langle 15a^4bc^2 + 6a^4b^3 + 21a^4b^2c\text{-}144a^2b\text{-}8a^2b^2d\text{-}28a^2bcd\text{-}648a^2c + 36c^2d + 9a^4c^3\text{-}120,$$
$$30b^3a^4c\text{-}32cd^2b\text{-}720ca^2b\text{-}24b3a^2d\text{-}432b^2a^2 + 576db\text{-}576cd + 16ba^2c^2d + 16c^2d^2 + 16d^2b^2 + 9b^4a^4 + 5184 + 39c^2a^4b^2 + 18c3a^4b\text{-}432c^2a^2 + 24c^3a^2d\text{-}16b^2a^2cd\text{-}240b,$$
$$216ca^2b\text{-}162c^2a^2\text{-}81b^2a^2 + 5184 + 1008db\text{-}1008cd + 15b^2a^2cd\text{-}15b3a^2d\text{-}80cd^2b + 40c^2d^2 + 40d^2b^2,$$
$$261 + 4ca^2b\text{-}3c^2a^2\text{-}4b^2a^2 + 22db\text{-}22cd \rangle$$

dessin1: Ideal *I* terhadap order lex dengan $a > b > u > v > w > x > y > z$ dan

$$I = \langle 6zab + 10vax + 8yau \text{-} 162a^2u + 16uw + 14xb + 48aw,$$
$$15zau \text{-} 162a^2v \text{-} 312ab + 24aw + 27xu + 24yb + 18vay + 30vw + 84xa,$$
$$\text{-}240a + 420z \text{-} 64v + 112y,$$
$$180za \text{-} 284va \text{-} 162a^2 + 60vy + 50ya + 70w + 55zu + 260x \text{-} 112b,$$
$$66za + 336y + 90x + 78vz \text{-} 1056a \text{-} 90u,$$
$$136z \text{-} 136,$$
$$4vaw + 2yab + 6bw \text{-} 162a^2b + 3xua,$$
$$28vaz + 192w + 128ya + 36xb + 36zb \text{-} 300au + 40yu \text{-} 648a^2 + 44vx \rangle$$

dessin2: Ideal *I* terhadap order lex dengan $a > b > c > d > u > v > w > x > y > z$ dan

$$I = \langle 16aw + 18bv + 20cu, \text{-}80d + 180y + 855z,\ 7av + 8bu, 210z \text{-} 210,$$
$$40ay + 44bx + 48cw + 52dv + 280u, 27ax + 30bw + 33cv + 36du,$$
$$55az + 60by + 65cx + 70dw + 80u + 375v, 78bz + 84cy + 90dx \text{-} 170a + 102v + 480w,$$
$$136dz \text{-} 114c + 152x + 720y,\ 105cz + 112dy \text{-} 144b + 126w + 595x \rangle$$