ISBN : 978-979-16353-3-2

T-11

Analisa Kestabilan Ekuilibrium
Model Matematika Berbentuk Sistim Persamaan Diferensial Tundaan dengan Waktu Tundaan Diskrit

Rubono Setiawan*

** Mahasiswa S - 2 Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada ,*

Yogyakarta, Indonesia

Email : rubono_4869@ yahoo.co.id

Abstrak

Didalam paper ini membahas kestabilan titik ekuilibrium model matematika yang berbentuk sistim persamaan diferensial tundaan (PDT) dengan waktu tundaan diskrit τ . Lebih khusus lagi akan dijelaskan metode untuk menganalisa perubahan sifat kestabilan titik ekuilibrium karena pengaruh waktu tundaan. Apabila waktu tundaannya ada (τ tidak sama dengan nol) dan ditemukan nilai kritis tundaan τ^* sedemikian sehingga akar karateristik sistim tersebut di titik ekuilibrium berada pada garis imaginer, dan juga dipenuhi kondisi transversal maka untuk waktu tundaan yang membesar, titik ekuilibrium masih stabil ketika τ kurang dari τ^* tetapi menjadi tidak stabil ketika τ membesar melebihi τ^*.Sehingga titik ekuilibrium tersebut dikatakan mengalami bifurkasi ketika τ sama dengan τ^*. Kemudian juga diberikan contoh analisa titik ekuilibrium pada model matematika epidemi (penyebaran penyakit) S I R dengan waktu tundaan diskrit.

Kata kunci : Waktu tundaan, Sistim persamaan diferensial tundaan, Nilai kritis tundaan, Persamaan karaterisitik , Nilai Eigen, Kondisi Transversal.

1. Pendahuluan

Latar Belakang :

Didalam paper ini dibahas model matematika berbentuk sistim persamaan diferensial tundaan (PDT) dengan waktu tundaan diskrit. Model matematika dengan waktu tundaan telah banyak digunakan dalam beberapa cabang model matematika biologi. Seperti pada model matematika epidemi dan dapat menggambarkan beberapa

 ISBN : 978-979-16353-3-2

aspek dari dinamikanya seperti infeksi dan penyebaran penyakitnya, waktu inkubasi , terapi obat dan juga respon kekebalan.

Salah satu analisa yang menarik yang dibahas di paper ini adalah bahwa adanya waktu tundaan kemungkinan akan dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium, apabila model tersebut memenuhi kondisi – kondisi tertentu. Sehingga didalam paper ini ditekankan pada pembahasan kondisi – kondisi yang dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium model matematika dengan waktu tundaan diskrit.

Perumusan Masalah

Didalam paper ini membahas analisa kestabilan titik ekuilibrium dari model matematika yang berbentuk sistim PDT yang dijelaskan pada bagian 2. Kemudian diberikan contoh analisa pada model matematika epidemi yaitu model SIR dengan waktu tundaan diskrit pada bagian 3. Selanjutnya paper ini diakhiri dengan kesimpulan dan daftar pustaka.

Tujuan

Tujuan dari penulisan paper ini adalah menganalisa kondisi – kondisi yang dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium akibat adanya waktu tundaan (diskrit).

Manfaat

Dengan mengetahui kondisi – kondisi yang dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik ekuilibrium tersebut maka kita dapat menentukan apakah adanya waktu tundaan didalam suatu model dapat menyebabkan perubahan kestabilan atau tidak. Kemudian apabila telah diketahui bahwa waktu tundaan dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan titik ekuilibrium maka dapat diketahui rentang nilai waktu tundaan supaya titik ekuilibrium tetap stabil.

2. Pembahasan : Analisa Kestabilan Ekuilibrium Model Sistim PDT

 ISBN : 978-979-16353-3-2

2.1. Persamaan Karateristik dan Eksistensi Titik Kritis Tundaan

Dalam menganalisa kestabilan dari titik ekuilibrium suatu model persamaan diferensial (PD), hal pertama yang biasa dilakukan adalah pelinieran sistim di sekitar titik ekuilibrium untuk selanjutnya mendapatkan persamaan karateristik dari sistim linearnya. Dengan menggunakan akar karateristik yang didapat dan dengan ditambah kriteria – kriteria tertentu akan dapat ditentukan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium.

Misal diberikan model berbentuk sistim PDT sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), x(t-\tau)\right) \quad (2.1)$$

maka persamaan karateristik dari sistim (2.1) di suatu titik ekuilibrium adalah :

$$\Delta(\lambda,\tau) \equiv P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (2.2)$$

dengan τ adalah lama waktu tundaan (diskrit) yang ditambahkan pada model persamaan diferensial yang bersangkutan, dengan $P(\lambda)$ dan $Q(\lambda)$ berupa polinomial dalam λ, sehingga persamaan (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$\Delta(\lambda,\tau) = \sum_{j=0}^{N} a_j \lambda_j + e^{-\lambda\tau} \sum_{j=0}^{M} b_j \lambda_j \quad (2.3)$$

Dalam keadaan ketika waktu tundaan tidak ada atau $\tau = 0$, PDT pada model akan menjadi PD biasa. Sifat titik ekuilibrium dapat dilihat nilai eigen / akar karateristik yang didapat dari persamaan karateristik sistim linearisasinya dengan syarat semua nilai eigen yang didapat mempunyai bagian real yang tidak nol . Sehingga titik ekuilibrium tersebut merupakan titik ekuilibrium hiperbolik Kemudian kriteria untuk melihat sifat kestabilan dari titik ekuilibrium hiperbolik yang banyak digunakan adalah dengan melihat bagian real dari nilai eigen tersebut. Titik ekuilibrium hiperbolik dikatakan stabil jika nilai eigen mempunyai bagian real yang negatif dan dikatakan tidak stabil jika mempunyai bagian real yang positif (Lihat : Perko [5]).

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Kemudian pertanyaan yang muncul adalah bagaimana menentukan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium ketika waktu tundaannya ada atau $\tau \neq 0$. Karena dalam prakteknya ketika $\tau \neq 0$ maka akan memunculkan nilai eigen dengan bagian real yang sama dengan nol (nilai eigen komplek murni). Sehingga titik ekuilibrium tersebut merupakan titik ekuilibrium non - hiperbolik. Sehingga kriteria kestabilan untuk titik ekuilibrium hiperbolik diatas tidak dapat digunakan untuk kasus ini.

Selanjutnya akar dijelaskan metode untuk menganalisa sifat titik ekuilibrium ketika ketika waktu tundaannya ada atau $\tau \neq 0$. Misalkan akar karateristik dari persamaan (2.2) adalah $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, dalam paper ini diasumsikan $\omega > 0$ maka persamaan (2.2) akan menjadi :

$$P_1(i\omega) + P_2(i\omega)e^{-i\omega\tau} = 0$$

(2.4)

bila bagian real dan imaginer dari persamaan diatas dipecah dan suku eksponensial ditulis dalam bentuk trigonometri maka akan didapat persamaan :

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)) = 0$$

(2.5)

dengan :

$$R_1(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} a_{2j}\omega^{2j} \;;\; Q_1(\omega) = \sum_j (-1)^j a_{2j+1}\omega^{2j+1} \quad \text{dan}$$

$$R_2(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} b_{2j}\omega^{2j} \;;\; R_2(\omega) = \sum_j (-1)^j b_{2j+1}\omega^{2j+1}$$

Kemudian agar persamaan (2.5) berlaku, maka jumlah bagian real dan bagian imaginer dari persamaan (2.5) haruslah sama dengan nol, sehingga akan didapat persamaan :

$$R_1(\omega) + R_2(\omega)\cos(\omega\tau) + Q_2(\omega)\sin(\omega\tau) = 0$$
$$Q_1(\omega) - R_2(\omega)\sin(\omega\tau) + Q_2(\omega)\cos(\omega\tau) = 0$$

(2.6)

kemudian persamaan (2.6) dapat ditulis kembali menjadi :

$-R_1(\omega) = R_2(\omega)\cos(\omega\tau) + Q_2(\omega)\sin(\omega\tau)$, dan

$(2.7.i)$

$Q_1(\omega) = R_2(\omega)\sin(\omega\tau) - Q_2(\omega)\cos(\omega\tau)$

$(2.7.ii)$

Dengan mengkuadratkan kedua persamaan yaitu $(2.7.i)$ dan $(2.7.ii)$, kemudian menjumlahkan hasilnya maka akan didapat :

$R_1(\omega)^2 + Q_1(\omega)^2 = R_2(\omega)^2 + Q_2(\omega)^2$

(2.8)

Dari persamaan (2.8) dapat dilihat dua hal , yang pertama bahwa bentuk trigonometri menghilang dan waktu tundaan τ juga tidak muncul. Kemudian yang kedua, persamaan (2.8) merupakan persamaan dari polinomial yang genap. Kemudian bila didefinisikan variabel baru $\mu = \omega^2 \in \mathbb{R}$, maka persamaan (2.8) akan menjadi :

$S(\mu) = 0$

(2.9)

dengan *S* adalah polinomial, dengan μ adalah akar dari persamaan (2.9). Jika akar real dari (2.9) bernilai negatif, maka tidak akan terdapat solusi $\omega^* \in \mathbb{R}$ yang secara simultan memenuhi $(2.7.i)$ dan $(2.7.ii)$. Sebaliknya, jika terdapat akar real positif μ^* untuk *S* , maka akan terdapat suatu nilai τ yang berkaitan dengan suatu $\omega^* = \pm\sqrt{\mu^*}$ yang merupakan solusi persamaan $(2.7.i)$ dan $(2.7.ii)$.

Untuk melihat hal tersebut , misalkan ditemukan ω^* sedemikian sehingga memenuhi $R_1(\omega^*)^2 + Q_1(\omega^*)^2 = R_2(\omega^*)^2 + Q_2(\omega^*)^2$. Misalkan $C = \sqrt{R_2(\omega^*)^2 + Q_2(\omega^*)^2}$. Sehingga dari persamaan sebelumnya , kita dapat mengatakan bahwa titik $(-R_1(\omega^*), Q_1(\omega^*))$ berada didalam suatu lingkaran dengan jari – jari *C*. Sekarang perhatikan kembali persamaan $(2.7.i)$ dan $(2.7.ii)$, kedua persamaa tersebut dapat ditulis kembali dalam bentuk :

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$-R_1(\omega^*) = C\left(\frac{R_2(\omega^*)}{C}\cos(\omega^*\tau) + \frac{Q_2(\omega^*)}{C}\sin(\omega^*\tau)\right)$$, dan

$(2.10.i)$

$$Q_1(\omega^*) = C\left(\frac{R_2(\omega^*)}{C}\sin(\omega^*\tau) - \frac{Q_2(\omega^*)}{C}\cos(\omega^*\tau)\right)$$

$(2.10.ii)$

misalkan $\frac{R_2(\omega^*)}{C} = \cos\alpha$ dan $\frac{Q_2(\omega^*)}{C} = \sin\alpha$, sehingga

$$-R_1(\omega^*) = C\cos(\omega^*\tau - \alpha)$$

$(2.11.i)$

$$Q_1(\omega^*) = C\sin(\omega^*\tau - \alpha)$$

$(2.11.ii)$

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa terdapat suatu nilai positif $\tau = \tau^*$ yang memenuhi kedua persamaan $(2.11.i)$dan $(2.11.ii)$ diatas.

(2.12)

Dengan hasil yang didapat pada (2.12) dapat diketahui persamaan (2.9) mempunyai akar real positif lebih dari satu, tetapi dalam penggunaannya kita memilih salah satu nilai akar dengan waktu tundaan τ^* yang terkecil.

2.2. Kondisi Transversal

Setelah menemukan nilai kritis tundaan τ^* dan akar karateristik yang terdapat pada garis imaginer $\lambda = i\omega^*$. Kemudian akan diselidiki kondisi yang dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium ketika waktu tundaan berubah. Untuk itu perlu membuktikan bahwa akar karateristik akan *bergerak* menuju bidang imaginer yang positif ketika waktu tundaan τ membesar melebihi waktu tundaan τ^* . Kemudian kriteria untuk kondisi tersebut adalah :

$$\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda = i\omega^*, \tau = \tau^*} > 0$$

(2.13)

atau ekuivalen mengatakan

$$\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=i\omega^*,\tau=\tau^*} \neq 0$$

(2.14)

Dalam beberapa literatur seperti pada [4] dan $[6]$ kondisi (2.13) sering ditulis dengan bentuk :

$$sign\left\{\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=i\omega^*,\tau=\tau^*}\right\} > 0$$

catatan : ''*sign*'' = tanda (positf / negatif)

Kondisi (2.13) disebut juga kondisi transversal (lihat : $[6]$) atau kondisi *nondegenerate* ([3]). Apabila kondisi Transversal diatas dipenuhi maka dapat dilihat bahwa untuk $\tau < \tau^*$ maka semua solusi λ dari (2.2) mempunyai bagian real yang negatif.

Lemma 2.2.1 [3]

Jika $\lambda = i\omega^*$ *dan* $\tau = \tau^*$ *memenuhi persamaan karateristik* (2.2) *maka* $\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=i\omega^*,\tau=\tau^*} > 0$ *jika dan hanya jika*

$$R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q_2'(\omega^*).$$

Secara teknis kondisi transversal diatas dapat di-cek dengan menurunkan persamaan (2.8) terhadap ω dan kemudian dibuktikan bahwa persamaan tersebut tidak dipenuhi untuk $\tau = \tau^*$.

Jadi jika terdapat akar karateristik real positif dari persamaan(2.9) maka akan ditemukan titik kritis tundaan τ^* sedemikian sehingga salah satu nilai eigen dari sistim (2.1) akan melewati garis imaginer dan menghilangkan sifat stabil dari titik ekuilibrium atau dengan kata lain mengubah sifat kestabilan dari titik ekuilibrium yang sebelumnya stabil menjadi tidak stabil. Sehingga kita mempunyai lemma berikut :

Lemma 2.2.2 [3]

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Diberikan sistim PDT (2.1) *dengan waktu tundaan diskrit* τ *dan titik ekuilibrium yang stabil* $\hat{E}_+$, *untuk* $\tau = 0$.*Kemudian misalkan :*

$$\Delta(\lambda,\tau)=\sum_{j=0}^{N} a_j\lambda_j + e^{-\lambda\tau}\sum_{j=0}^{M} b_j\lambda_j$$

adalah persamaan karaterisitik dari sistim (2.1) *di titik ekuilibrium* $\hat{E}_+$.

Maka terdapat nilai kritis tundaan τ^* *> 0 untuk* $\hat{E}_+$ *dimana* $\hat{E}_+$ *akan mengalami kondisi nondegenerate untuk perubahan sifat kestabilan jika dan hanya jika persamaan*

i. $S(\mu)=0$ *(yang didefinisikan pada persamaan* (2.9) *mempunyai akar real positif ,* $\mu^* = (\omega^*)^2$ *sedemikian sehingga ,*

ii. $S^{'}(\mu^*)\neq 0$

dengan μ^* *merupakan akar real positif dari persamaan :*

$$\left[\sum_j (-1)^j a_{2j}\mu^j\right]^2 + \mu\left[\sum_j (-1)^{j+1} a_{2j+1}\mu^j\right]^2 = \left[\sum_j (-1)^j b_{2j}\mu^j\right]^2 + \mu\left[\sum_j (-1)^j b_{2j+1}\mu^j\right]^2$$

Dengan demikian dari semua pembahasan diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa jika titik kritis tundaan τ^* ditemukan dan dipenuhinya kondisi transversal maka titik ekuilibrium masih stabil ketika τ kurang dari τ^*, karena pada kasus ini semua nilai eigennya mempunyai bagian real yang negatif. Tetapi ketika τ membesar melebihi τ^*, maka bagian real nilai eigen dari titik ekuilibrium akan bernilai positif sehingga titik ekuilibrium tersebut menjadi tidak stabil. Lebih lanjut , titik ekuilibrium tersebut dikatakan mengalami bifurkasi ketika τ sama dengan τ^*.

3 . Contoh Model Epidemi SIR dengan waktu tundaan Diskrit

Didalam bagian ini akan diberikan contoh pada model epidemi S I R dengan waktu tundaan diskrit , dimana adanya waktu tundaan dapat menyebabkan perubahan kestabilan pada titik ekuilibriumnya.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Contoh berikut diambil dari model yang ada pada paper yang ditulis oleh Zhang, dkk ([8]) , yaitu model S I R dengan waktu tundaan dan laju penyebaran penyebaran penyakit nonlinear. Didalam model tersebut waktu tundaan adalah waktu inkubasi penyakit. Penjelasan di paper ini hanya pada bagian analisa kestabilan untuk titik ekuilibrium penyakit ketika waktu tundaannya ada. Modelnya adalah sebagai berikut :

$$\dot{S}(t) = r\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)S(t) - \beta \frac{S(t)}{1+\alpha S(t)} I(t-\tau)$$
$$\dot{I}(t) = \beta \frac{S(t)}{1+\alpha S(t)} I(t-\tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t)$$
$$\dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu_2 R(t)$$
$$(3.1)$$

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

dimana $r, s, K, \beta, \alpha, \tau, \gamma, \mu_1, \mu_2$ merupakan konstanta positif dengan,

r = Laju kelahiran murni ,

K = *Carrying Capacity* ,

β = Laju kontak antara kelas rentan (*S*) dengan kelas sakit (*I*),

α = Parameter yang mengukur efek jenuh insidensi,

τ = Waktu tundaan (dalam model ini adalah waktu inkubasi penyakit).

μ_1 = Laju kematian murni kelas sakit (*I*),

μ_2 = Laju kematian murni kelas sembuh (*R*),

γ = Laju kesembuhan alamiah kelas sakit (*I*),

Titik ekuilibrium penyakit untuk model tersebut adalah $\hat{E}_+ = (S^*, I^*, R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma)}, \quad I^* = \frac{rS^*(R_0 - 1)}{K(\mu_1 + \gamma)}, \quad R^* = \frac{\gamma}{\mu_2} I^*$$

dan dipenuhi untuk $R_0 > 1$ dengan $R_0 = K[\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma)]/(\mu_1 + \gamma)$. R_0 adalah angka reproduksi dasar. Untuk analisa selanjutnya sistim (3.1) dapat direduksi menjadi sistim dengan dua dimensi yaitu :

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\dot{S}(t) = r\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)S(t) - \beta \frac{S(t)}{1+\alpha S(t)} I(t-\tau)$$
$$\dot{I}(t) = \beta \frac{S(t)}{1+\alpha S(t)} I(t-\tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t)$$

(3.2)

Kemudian dilakukan linearisasi dari (3.2) di sebarang titik ekuilibrium $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I})$ dengan menggunakan deret Taylor untuk 2 variabel disekitar titik ekuilibrium dan didapat sistim linearisasi sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = \left[r - \frac{2\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{\left(1+\alpha\hat{S}\right)^2}\right]x(t) - \beta \frac{\hat{S}}{1+\alpha\hat{S}} y(t-\tau)$$
$$\overset{*}{y}(t) = \left(\beta \frac{\hat{I}}{\left(1+\alpha\hat{S}\right)^2}\right)x(t) + \left(\beta \frac{\hat{S}}{1+\alpha\hat{S}}\right)y(t-\tau) - (\mu_1 + \gamma)y(t)$$

(3.3)

dengan $S(t) = \hat{S} + x(t)$, $I(t) = \hat{I} + y(t)$.

Kemudian didapat persamaan karateristik sebagai berikut :

$$\det\begin{bmatrix} r - \frac{2\hat{S}}{K} - \beta\frac{\hat{I}}{\left(1+\alpha\hat{S}\right)^2} - \lambda & -\beta\frac{\hat{S}}{1+\alpha\hat{S}}e^{-\lambda\tau} \\ \beta\frac{\hat{I}}{\left(1+\alpha\hat{S}\right)^2} & \left(\beta\frac{\hat{S}}{1+\alpha\hat{S}}\right)e^{-\lambda\tau} - (\mu_1+\gamma) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

(3.4)

dengan λ adalah akar karateristik / nilai eigen dari sistim linearisasi (3.3)

Sehingga persamaan karateristik di titik ekuilibrium penyakit $\hat{E}_+ = (S^*, I^*)$ adalah :

$$\det\begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2}{R_0}\right) - \beta\frac{\hat{I}}{\left(1+\alpha\hat{S}\right)^2} - \lambda & -(\mu_1+\gamma)e^{-\lambda\tau} \\ \frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) & (\mu_1+\gamma)e^{-\lambda\tau} - (\mu_1+\gamma) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

(3.5)

dari persamaan (3.5) akan didapat :

$$\Delta(\lambda,\tau) = P(\lambda,\tau) + Q(\lambda,\tau)e^{-\lambda\tau} = 0$$

(3.6)

 ISBN : 978-979-16353-3-2

dengan :

$$P(\lambda,\tau)=\lambda^2+\lambda\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+(\mu_1+\gamma)+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]$$
$$+(\mu_1+\gamma)\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]$$

(3.7)

$$Q(\lambda,\tau)=-\lambda(\mu_1+\gamma)+r(\mu_1+\gamma)\left(1-\frac{2}{R_0}\right)$$

(3.8)

Untuk analisa titik ekuilibrium $\hat{E}_+=(S^*,I^*)$ ketika $\tau=0$ dapat dibaca dan dipahami dengan mudah di paper yang ditulis oleh Zhang, dkk ($[8]$). Karena bila $\tau=0$ akan memunculkan titik ekuililibrium hiperbolik. Kemudian kita akan fokus pada analisa titik ekuilibrium ketika waktu tundaan ada. Ketika waktu tundaan ada ($\tau\neq 0$) maka akan memunculkan titik ekuilibrium non-hiperbolik yaitu titik ekuilibrium dimana nilai eigen dari sistim linearisasi di titik tersebut mempunyai bagian real nol (nilai eigen komplek murni).

Misal $\tau\neq 0$ dan jika $\lambda=i\omega$ dengan $\omega>0$, dan λ memenuhi persamaan (3.6) maka persamaan (3.6) ekuivalen dengan :

$$\Delta(\lambda,\tau)=-\omega^2+i\omega\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+(\mu_1+\gamma)-\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]+(\mu_1+\gamma)\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+(\mu_1+\gamma)-\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]$$
$$+\left[-i\omega(\mu_1+\gamma)+r(\mu_1+\gamma)\left(1-\frac{2}{R_0}\right)\right][\cos(\omega\tau)-i.\sin(\omega\tau)]=0$$

(3.9)

kemudian dengan memisahkan bagian real dan imaginer dari persamaan (3.9) akan didapat dua persamaan berikut :

$$-\omega^2+(\mu_1+\gamma)\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+(\mu_1+\gamma)-\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]$$
$$=-r(\mu_1+\gamma)\left(1-\frac{2}{R_0}\right)\cos(\omega\tau)+\omega(\mu_1+\gamma)\sin(\omega\tau)$$

(3.10)

$$\omega\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+(\mu_1+\gamma)-\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]=\omega(\mu_1+\gamma)\cos(\omega\tau)+r(\mu_1+\gamma)\left(1-\frac{2}{R_0}\right)\sin(\omega\tau)$$

(3.11)

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada kedua persamaan diatas dan kemudian menjumlahkan kedua persamaan tersebut maka akan didapat :

$$\Delta(\lambda,\tau)=\omega^4+\omega^2\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]^2$$
$$+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)(\mu+\gamma)^2\left[-2r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]=0$$

(3.12)

Didefinisikan $p^{'}=\left[-r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]^2$,

$$q^{'}=\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)(\mu+\gamma)^2\left[-2r\left(1-\frac{2}{R_0}\right)+\frac{r}{1+\alpha S^*}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right]$$

dan $R_c=2+1/(1+2\alpha S^*)$. Dapat dilihat bahwa nilai $p^{'}$ selalu positif, kemudian jika $q^{'}\geq 0$ sedemikian sehingga $1<R_0\leq R_c$, maka tidak ada bilangan real positif ω yang memenuhi (3.12). Sehingga tidak nilai λ dari (3.6) yang berada pada sumbu imaginer untuk setiap $\tau>0$. Untuk kasus ini adanya waktu tundaan tidak menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari $\hat{E}_+=(S^*,I^*)$ (lihat : [8]).

Sebaliknya jika $q^{'}<0$ sedemikian sehingga $R_0>R_c$ maka terdapat bilangan positif $\omega *$ yang memenuhi persamaan (3.12).Sehingga persamaan (3.12) mempunyai akar imaginer murni $\pm i\omega *$. Kemudian dengan mensubtitusikan nilai $\omega *$ kedalam persamaan (3.10) dan (3.11) serta diselesaikan untuk τ , maka akan didapat nilai kritis tundaan $\tau_n *$ sebagai berikut :

$$\tau_n*=\frac{1}{\omega *}\arccos\left\{\frac{(\omega *)^2U-V(\mu+\gamma_1)r(r-2/R_0)}{\omega *(\mu_1+\gamma)+[r(1-2/R_0)]^2(\mu_1+\gamma)}\right\}+\frac{2n\pi}{\omega *},n=0,1,2,3,\cdots$$

(3.13)

dengan $U=[(r/(1+\alpha S^*))(1-1/R_0)+(\mu_1+\gamma)]$ dan $V=[-r(1-2/R_0)+(r/(1+\alpha S^*))(1-1/R_0)]$

Kemudian akan dicek kondisi transversalnya sebagai berikut :

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$sign\left\{\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\omega^*} > 0$, sehingga

$$sign\left\{\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\omega^*} = sign\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega^*}$$

$$= sign\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda^2-(\mu_1+\gamma)[-r(1-2/R_0)+(r/(1+\alpha S^*)(1-1/R_0))]}{-\lambda^2 P(\lambda,\tau)}\right)\Big|_{\lambda=i\omega^*} + \mathrm{Re}\left(\frac{-r(1-2/R_0)(\mu_1+\gamma)}{\lambda^2 Q(\lambda,\tau)}\right)\Big|_{\lambda=i\omega^*}\right\}$$

$$= sign\left\{\frac{(\omega^*)^4-(\mu_1+\gamma)^2[-r(1-2/R_0)+(r/(1+\alpha S^*))(1-1/R_0)]^2+[r(1-2/R_0)(\mu_1+\gamma)]^2}{(\mu_1+\gamma)^2+[r(1-2/R_0)(\mu_1+\gamma)]^2}\right\}$$

$$= sign\left\{\frac{(\omega^*)^4-(\mu_1+\gamma)^2(r/(1+\alpha S^*))(1-1/R_0)[-2r(1-2/R_0)+(r/(1+\alpha S^*))(1-1/R_0)]}{(\mu_1+\gamma)^2+[r(1-2/R_0)(\mu_1+\gamma)]^2}\right\}$$

dengan kondisi $R_0 > R_c$ sedemikian sehingga $-2r(1-2/R_0)+\frac{r}{1+\alpha S^*}(1-1/R_0)<0$ maka nilai $\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\tau}\Big|_{\lambda=i\omega^*}$ > 0, yang berarti bagian real dari akar karateristik akan bergerak menuju bagian positif dari bidang komplek, seiring dengan berubahnya waktu tundaan. Sehingga karena terdapat nilai kritis tundaan τ^*dan dipenuhinya kondisi transversal maka $\hat{E}_+$ masih stabil ketika $\tau \in [0,\tau^*)$ dan menjadi tidak stabil ketika $\tau > \tau^*$. Sehingga sistim (3.2) mengalami bifurkasi di $\hat{E}_+$ ketika $\tau = \tau_n^*$, n = 0,1,2,3....

4. Kesimpulan

Dari hasil diatas dapat disimpulkan bahwa pada model matematika yang dilengkapi dengan waktu tundaan, apabila waktu tundaannya ada ($\tau \neq 0$) dan jika ditemukan nilai kritis tundaan τ^* sedemikian sehingga akar karateristik sistim (2.1) di titik ekuilibrium akan berada pada garis imaginer dan juga jika dipenuhinya kondisi transversal maka untuk waktu tundaan yang membesar , titik ekuilibrium masih stabil ketika $\tau < \tau^*$ tetapi menjadi tidak stabil ketika $\tau > \tau^*$. Sehingga dikatakan mengalami bifurkasi di $\tau = \tau^*$.

5. Daftar Pustaka

[1] Arino, O; Hbid,ML and Ait Dads,E, [editors], **Delay Differential Equations and Applications** . Proceedings of The NATO Advanced Study Institute on Delay Differential Equations and Applications, Marrakech, Morocco, 9- 21 September 2002, Springer-Verlag, Netherlands and NATO Public Diplomacy Division, 2006.

[2] Brauer, F and Castillo-Chavez, C., **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology**, Text in Applied Mathematics Vol 40, Springer – Verlag , New – York, USA, 2001.

[3] Forde, JE, **Delay Differential Models in Mathematical Biology** , Disertation of Doctor of Philosophy (Mathematics) in the University of Michigan, 2005.

[4] Kuang,Y, **Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics**, vol.191 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Boston, Mass, USA, 1993.

[5] Perko, S., **Differential Equations and Dynamical Systems 3rd** ed , Texts in Applied Mathematics Vol 7, Springer – Verlag , New – York , USA,1991.

[6] Toaha, S and Malik Abu Hasan, **" Stability of Predator – Prey Model with Time Delay and Constant Rate of Harvesting** ", Journal of Mathematics, Punjap University, Vol. 40, pp.37 – 48, ISSN 1016 – 2526, 2008.

[7] T.K. Kar, "**Selective harvesting in a prey-predator fishery with time delay** ", Mathematical and Computer Modelling, **38** , 449-458, 2003.

[8] Zhang, Jin-Zhu ;Jin, Z ;Liu,Quan-Xing ;and Zhang, Zhi-Yu, "**Analysis of a Delayed SIR Model with Nonlinear Incidence**", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2008, Article ID 636153, Hindawi Publishing Corporation, 2008.