ISBN : 978-979-16353-3-2

T-9

MODEL EPIDEMI BERDASARKAN UMUR DAN KRITERIA THRESHOLD

Dwi Lestari
FKIP, Universitas Ahmad Dahlan
(weestar91@yahoo.com)

Atmini Dhoruri
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
(atmini_uny@yahoo.co.id)

Abstrak Paper ini akan membahas tentang pembentukan model epidemi berdasarkan umur dan juga kriteria threshold-nya. Model ini didasari oleh model populasi dengan distribusi umur. Di beberapa penyakit, umur individu merupakan faktor penting untuk mengetahui sifat mudah terserang penyakit (*vulnerability*) dan penularannya (*infectiousness*). Variabel bebas yang muncul yakni umur (*a*) dan waktu (*t*) sehingga menghasilkan persamaan diferensial parsial. Kriteria threshold model dilihat dari nilai parameter γ. Nilai γ dari harapan populasi rentan (*susceptibles*) terinfeksi menjadi populasi terjangkit (*infective*) atau biasa disebut basic reproduction number memberi pengaruh pada kehebatan epidemi. Jika γ<1, maka tidak terjadi epidemi, sedangkan jika γ>1 maka terjadi epidemi. Selain itu, nilai γ yang berubah-ubah membuat nilai *F* bervariasi dimana *F* merupakan proporsi populasi rentan yang bertahan hidup terhadap terjadinya epidemi. Untuk setiap γ terdapat dua nilai untuk *F*, tetapi karena $S(\infty) \leq S_0$ maka hanya $F = \dfrac{S(\infty)}{S_0} \leq 1$ yang memenuhi.

Kata kunci: model epidemi, distribusi umur, kriteria threshold

Model Epidemi Berdasarkan Umur dan Kriteria Threshold

A. Latar Belakang Masalah

Di beberapa penyakit, kronologis umur dari individu merupakan faktor penting untuk memperkirakan sifat mudah terserang penyakit (*vulnerability*) dan penularannya (*infectiousness*). Sebagai contoh, data dari Bernoulli (1760) pada kejadian epidemi cacar (smallpox) dengan umur merupakan ilustrasi hidup, artinya sifat mudah terserang penyakit dan kematian turun secara nyata berdasarkan umur. Bermacam-macam model berdasarkan umur pernah dibahas pada buku oleh Hoppensteadt (1975). Dietz (1982) menyusun model untuk kebutaan dan menggunakannya untuk membandingkan bermacam-macam strategi kontrol.

Umur boleh juga diartikan sebagai waktu dari masuk ke dalam kelas populasi khusus seperti kelas rentan (*susceptibles*), kelas terjangkit (*infective*), atau kelas sembuh (*removed*). Kedua interpretasi dari umur sering sama. Contoh yang relevan adalah pada model penyerapan obat dalam darah yang menggunakan model epidemi.

Pemodelan epidemi berdasarkan umur berkaitan dengan model populasi berdasarkan distribusi umur. Pada masing-masing model tersebut terdapat kriteria threshold yang dilihat dari basic reproduction number. Pada model epidemi, basic reproduction number merupakan nilai harapan populasi rentan terinfeksi menjadi populasi terjangkit. Model pertumbuhan populasi berdasar umur, untuk nilai threshold kurang dari satu artinya populasi menurun sedangkan nilai lebih dari satu artinya populasi meningkat. Model epidemi berdasarkan kelompok umur memiliki kriteria threshold kurang dari satu artinya tidak terjadi epidemi dan lebih dari satu artinya terjadi epidemi.

Paper ini akan membahas pembentukan model epidemi berdasarkan umur kemudian dicari basic reproduction number dari model.

B. Asumsi Model

Pembentukan model epidemi berdasarkan umur memerlukan beberapa asumsi sebagai berikut.

1. Populasi yang sedang dibicarakan merupakan populasi ‘virgin’.

   Pada awalnya, di dalam populasi tersebut tidak ada satu individu yang terkena penyakit yang sedang dibicarakan. Misalnya dengan alasan tertentu, penyakit yang sedang dibicarakan diderita oleh paling sedikit satu individu (host)

2. Populasi tertutup.

   Maksudnya, tidak ada migrasi (emigrasi atau imigrasi) serta tidak ada kelahiran dan kematian.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

3. Individu yang sudah sembuh akan kebal terhadap penyakit atau tidak bisa kembali rentan.
4. Penyakit tidak fatal (tidak menyebabkan kematian).
5. masa inkubasinya singkat

Berdasarkan asumsi tersebut akan dibentuk model epidemi berdasarkan umur.

C. Model Epidemi Berdasarkan Umur dan Kriteria Threshold.

Diberikan populasi yang dibagi dalam kelas-kelas berikut:

S(t) : populasi rentan pada saat t (*susceptible*)

I(t) : populasi terjangkit atau terinfeksi dan menularkan pada saat t(*infective*)

R(t) : populasi sembuh atau terbebas dari penyakit (*removed*)

Dalam hal ini, hanya akan dibahas mengenai S(t) dan I(t). Gejala munculnya epidemi ditandai dari banyaknya S(t) berkurang sampai awal penyakit muncul, artinya $S(t) \leq S_0$. Laju perpindahan kelas susceptibles diberikan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\left[\int_0^{\tau} r(a')I(a',t)da'\right]S, \qquad S(0) = S_0 \qquad \text{....(1)}$$

yakni, perpindahan menghasilkan kelas terjangkit yang dibobot dengan fungsi r(a) yang merupakan ukuran penyebaran atau laju penularan. Karena penyebaran hanya terjadi untuk waktu yang mendekati τ, ini merupakan integral batas atas.

Persamaan populasi terjangkit I(a,t) diperoleh dengan menggunakan pendekatan kesetimbangan (*conservation*). Pada waktu Δ, ada peningkatan umur secara berturut-turut dan umur kelas terjangkit dari (t,a) ke (t+Δ, a+Δ). Kondisi kesetimbangan menggambarkan bahwa perubahan banyaknya populasi terjangkit pada waktu Δ harus setimbang dengan banyaknya kesembuhan, sehingga pada waktu Δ

$$I(a+\Delta, t+\Delta) - I(a,t) = -\lambda(a)I(a,t)\Delta$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

dengan $\lambda(a)$ faktor perpindahan berdasarkan umur. Setelah itu, diambil $\Delta \to 0$, pada ekspansi deret Taylor menghasilkan persamaan diferensial parsial sebagai berikut.

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{I(a+\Delta, t+\Delta) - I(a,t)}{\Delta} = -\lambda(a) I(a,t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a} = -\lambda(a) I \qquad \text{....(2)}$$

Pada waktu t = 0, diberikan kelas distribusi umur dari kelas terjangkit $I_0(a)$. Pada waktu a = 0 ada perpindahan dari S ke I. Karena semua kelas terjangkit yang baru berasal dari kelas S, laju kedatangan I(0,t) sama dengan $-\frac{dS}{dt}$, ditulis

$$I(0,t) = -\frac{dS}{dt}$$

syarat batas (2), yakni

$$I(a,0) = I_0(a), \qquad I(0,t) = -\frac{dS}{dt} \qquad , t > 0 \qquad \text{....(3)}$$

Persamaan (1) – (3) merupakan model sistem persamaan Integro-diferensial dengan $I_0(a)$ dan S_0 diberikan. Fungsi r(a) dan $\lambda(a)$ diketahui.

Secara kualitatif, untuk penyakit dan prosedur kontrol sering dapat dimanipulasi.

Infeksi tidak akan disebarkan jika basic reproduction number yakni jumlah infeksi sekunder yang terjadi karena infeksi primer pada populasi yang seluruhnya rentan (Murray, 1993) di bawah satu, sebaliknya jika basic reproduction number lebih dari satu, maka infeksi akan disebarkan, artinya terjadi epidemi.

Nilai harapan populasi rentan terinfeksi menjadi populasi terjangkit atau basic reproduction number, dirumuskan sebagai berikut.

$$\gamma = S_0 \int_0^{\tau} r(a) \exp\left[-\int_0^{a} \lambda(a')\,da' \right] da \qquad \text{....(4)\#}$$

dimana r(a) merupakan kemampuan populasi terjangkit menyebarkan infeksi dengan peluang populasi terjangkit bertahan sampai umur *a*. Nilai ambang batas (threshold)

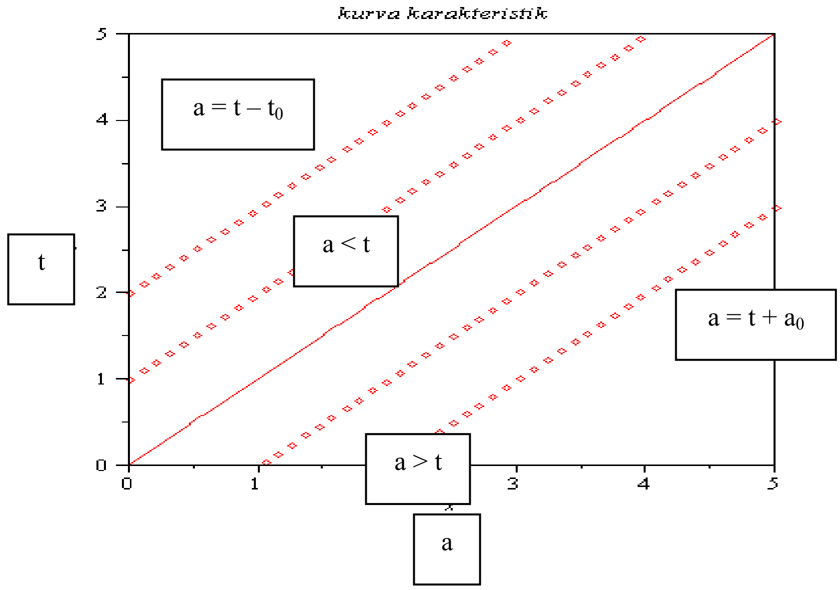
$\gamma = 1$. Jika $\gamma > 1$ maka terjadi epidemi, dan jika $\gamma < 1$ maka tidak terjadi epidemi. Di samping itu, epidemi juga diukur dari rasio $\frac{S(\infty)}{S_0}$, yang nilainya tergantung γ. Jelas dari (1), karena $\frac{dS}{dt} \le 0$, maka S(t) $\rightarrow$ S(∞) di mana $0 \le S(\infty) \le S_0$.

Untuk menyelesaikan (1) – (3) digunakan kurva karakteristik yang berupa garis lurus

$$\frac{dt}{da} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = t + a_0 ,\ a > t$$

$$a = t - t_0,\ a < t \qquad \text{....(5)}$$

dimana a_0 dan t_0 berturut-turut umur individu pada saat t = 0 pada populasi awal yang diberikan dan waktu kedatangan populasi terjangkit.



Gambar 1. Kurva karakteristik dari persamaan populasi terjangkit (2) pada t = 0, I(a,0) = I_0(a) yang diberikan dan pada a = 0, $I(0,t) = -\frac{dS}{dt}$, t > 0

Bentuk karakteristik dari (2) adalah

$$\frac{dI}{da} = -\lambda(a) I \qquad \text{pada} \qquad \frac{dt}{da} = 1 \qquad \text{......(6)}$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Integralkan persamaan (6) pada interval [0, a] untuk a < t dan [a_0, a] untuk a > t , diperoleh

$$\int \frac{dI}{I} = \int -\lambda(a)da$$

$$I(a,t) = K\exp\left[-\int \lambda(a)da\right] \qquad \text{, K = konstanta}$$

$$I(a,t) = \begin{cases} I_0(a_0)\exp\left[-\int_{a_0}^{a} \lambda(a')da'\right] & ,a > t \\ I(0,a_0)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right] & a < t \end{cases} \qquad \text{......(7)}$$

Sehingga dari (5)

$$I(a,t) = \begin{cases} I_0(a-t)\exp\left[-\int_{a-t}^{a} \lambda(a')da'\right] & ,a > t \\ I(0,a-t)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right] & a < t \end{cases} \qquad \text{.....(8)}$$

Dari (1), solusi dari S(t) adalah

$$\int \frac{dS}{S} = \int -\int_0^{\tau} r(a')I(a',t)da'dt \qquad \text{, S(0) = S}_0$$

$$S(t) = S_0\exp\left[-\int_0^t\left(\int_0^{\tau} r(a)I(a,t')da\right)dt'\right] \qquad \text{.....(9)}$$

Gunakan (8) untuk I(a,t) pada interval a < t dan a > t sehingga

$$\int_0^{\tau} r(a)I(a,t')da = \int_0^t r(a)I(0,t'-a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]da$$

$$+\int_t^{\tau} r(a)I_0(a-t')\exp\left[-\int_{a-t'}^{a} \lambda(a')da'\right]da \qquad \text{....(10)}$$

Karena waktu penularan adalah τ maka suku terakhir dari (10) dapat dihilangkan jika $t > \tau$. Hal ini dikarenakan r(a) = 0 jika $a > \tau$. Perhatikan S(t) pada (9), dengan menggunakan (3) dan (10) diperoleh,

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\int_0^\tau r(a)I(a,t')da = \int_0^t r(a)\left(-\frac{dS(t'-a)}{dt'}\right)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]da$$

$$+\int_t^\tau r(a)I_0(a-t')\exp\left[-\int_{a-t'}^a \lambda(a')da'\right]da$$

$$\int_0^t\int_0^\tau r(a)I(a,t')dad' = -\int_0^t\int_0^{t'} r(a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right].\frac{dS(t'-a)}{dt'}dadt'$$

$$+\int_0^t\int_{t'}^\tau r(a)I_0(a-t')\exp\left[-\int_{a-t'}^a \lambda(a')da'\right]dadt'$$

.....(11)

Selanjutnya,

$$\int_0^t\int_0^\tau r(a)I(a,t')dadt' = -\int_0^t r(a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]\left(S(t-a)-S_0\right)da + m(t)$$ .....(12)

dimana

$$m(t) = \int_0^t\int_{t'}^\tau r(a)I_0(a-t')\exp\left[-\int_{a-t'}^a \lambda(a')da'\right]dadt'$$ ......(13)

Substitusikan (12) ke (9), diperoleh

$$S(t) = S_0\exp\left\{-m(t)+\int_0^t r(a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]\left(S(t-a)-S_0\right)da\right\}$$ .....(14)

Misalkan $t \to \infty$, dan r(a) = 0 untuk $a > \tau$. Dengan menggunakan γ yang didefinisikan pada (4), diperoleh

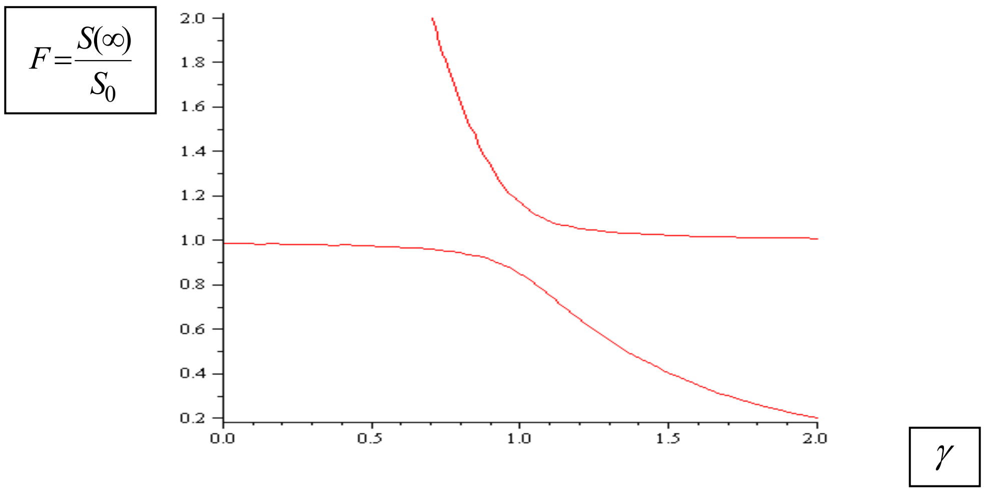
$$\frac{S(t)}{S_0} = \exp\left\{-m(t)+\frac{1}{S_0}\cdot S_0\int_0^t r(a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]\left(S(t-a)-S_0\right)da\right\}$$

$$\frac{S(t)}{S_0} = \exp\left\{-m(t)+S_0\int_0^t r(a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]\left(\frac{S(t-a)}{S_0}-\frac{S_0}{S_0}\right)da\right\}$$

$$F = \exp\left[-m(\infty)+\gamma(F-1)\right],\quad F = \frac{S(\infty)}{S_0}$$ ......(15)

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Hal yang menarik adalah kehebatan epidemi yang diukur oleh F, yakni proporsi populasi rentan yang bertahan hidup atau selamat dari epidemi. Nilai F berubah-ubah oleh γ. Untuk r(a), I_0(a) dan $\lambda(a)$ yang diberikan serta (13) merupakan m(t) yang kemudian disebut $m(\infty)$. Jika $0 < m(\infty) = \varepsilon << 1$, gambar 2 menunjukkan nilai F berubah-ubah oleh γ. Untuk setiap nilai γ terdapat dua nilai akar F. Akan tetapi, karena $S(\infty) \le S_0$, maka hanya akar $F = \dfrac{S(\infty)}{S_0} \le 1$ yang relevan. Kehebatan epidemi kecil untuk ε kecil selama $\gamma < 1$. Akan tetapi, epidemi akan meningkat drastis, yakni $\dfrac{S(\infty)}{S_0} < 1$ untuk $\gamma > 1$. Sebagai contoh, jika $0 < \varepsilon << 1$ dan $\gamma \approx 1.85$, $\dfrac{S(\infty)}{S_0} \approx 0.25$.



Gambar 2. Nilai F yang berubah-ubah oleh γ. (Untuk $\varepsilon = 0.0125$)

Andaikan satu individu terjangkit masuk dalam populasi rentan berukuran S_0, nilai m(t) dapat diperkirakan dengan fungsi Dirac delta, yakni misalkan $I_0(a) = \delta(a)$, maka

$$\int_0^{\tau} I_0(a)\,da = 1 \qquad \text{....(16)}$$

Pada kasus ini, dari (13)

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \int_0^t \int_{t'}^{\tau} r(a) I_0(a-t') \exp\left[-\int_{a-t'}^{a} \lambda(a')da'\right] da dt' \\
&= \int_0^t \int_{t'}^{\tau} r(a) \delta(a-t') \exp\left[-\int_{a-t'}^{a} \lambda(a')da'\right] da dt' \\
&= \int_0^{\infty} r(t') \exp\left[-\int_0^{t'} \lambda(a')da'\right] dt' \\
&= \frac{\gamma}{S_0}
\end{aligned} \qquad \text{...(17)}
$$

sehingga (15) menjadi

$$
\begin{aligned}
F &= \exp\left[-m(\infty) + \gamma(F-1)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{\gamma}{S_0} + \gamma(F-1)\right] \\
&= \exp\left[\gamma(F-1-\frac{1}{S_0})\right], \quad F = \frac{S(\infty)}{S_0}
\end{aligned} \qquad \text{....(18)}
$$

Karena $\frac{1}{S_0} << 1$, solusi dari F dengan suku-suku γ diberikan oleh gambar 2. Sehingga, nilai $\gamma > 1$ tidak perlu besar supaya terjadi epidemi. Oleh karena itu, perkiraan nilai parameter γ pada (4) merupakan nilai kritis dari model epidemi berdasarkan umur.

D. Kesimpulan dan Saran

Model epidemi berdasarkan umur terbentuk dari alasan bahwa populasi bisa bervariasi berdasarkan umur. Kronologis umur dari individu merupakan faktor penting untuk memperkirakan sifat mudah terserang penyakit (*vulnerability*) dan penularannya (*infectiousness*). Variabel bebas yang muncul dalam model ini meliputi umur (a) dan waktu (t) sehingga muncul persamaan diferensial parsial.

Model epidemi berdasarkan umur diberikan oleh (1) – (3) yang merupakan model sistem persamaan Integro-diferensial dengan I_0(a) dan S_0 diberikan. Fungsi r(a)

 ISBN : 978-979-16353-3-2

dan $\lambda(a)$ diketahui. Dengan menyelesaikan (1) – (3) diperoleh S(t) dan I(a,t). Kriteria threshold model ini yakni basic reproduction number γ. Epidemi terjadi jika $\gamma > 1$, sedangkan epidemi tidak akan terjadi jika $\gamma < 1$. Selain itu, hal yang menarik adalah kehebatan epidemi yang diukur oleh F, yakni proporsi populasi rentan yang bertahan hidup atau selamat dari epidemi. Nilai F berubah-ubah oleh γ dan hanya $F = \dfrac{S(\infty)}{S_0} \leq 1$ yang relevan. Saran untuk kajian selanjutnya yakni pada model penyerapan obat dalam darah yang menggunakan model epidemi berdasarkan umur..

E. Daftar Pustaka

Asmar, Nakhle.H. (2005). *Partial Diferential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problem.2^nd^ed.* Pearson Education Inc-USA.

Brauer F and Castillo Chaves. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.

Capasso, Vincenzo. (1993). *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.

Diekmann O and J.A.P Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious diseases: model building, analysis and interpretation,* JohnWiley and Sons. ltd

Kapur, J.N. (1985). *Mathematical Model in Biology and Medicine*. EWP. New Delhi.

Murray, J.D. (1993). *Mathematical Biology*. Biomathematics 19. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.

Roberts, M.G. and J.A.P Heesterbeek. *Mathematical Models in Epidemiology*. (Encyclopedia of Life Systems/EOLSS)

Ross, Shepley L. (1984). *Differential equations*. 3rd ed. JohnWiley and Sons. Inc

Keterangan: #

Langkah mendefinisikan basic reproduction number γ pada (4), yakni

Misalkan, solusi (2) berbentuk

$$I(a,t) = e^{kt} I_0(a) \qquad \text{.....(*)}$$

Merupakan distribusi umur pada kelas terjangkit yang berubah oleh waktu tergantung nilai k > 0 atau k< 0. Substitusikan (*) ke (2), diperoleh

$$ke^{kt} I_0(a) + \frac{dI}{da} e^{kt} = -\lambda(a) e^{kt} I_0(a)$$

$$kI_0(a) + \frac{dI}{da} = -\lambda(a) I_0(a)$$

$$\frac{dI}{da} = -[\lambda(a) + k]I_0(a)$$

$$I_0(a) = I_0(0)\exp\left[-ka - \int_0^a \lambda(a)da\right] \qquad ....(**)$$

dengan substitusi (**) ke (*) dan hasilnya disubstitusikan pada syarat batas yakni (3), diperoleh

$$e^{kt}I_0(0) = S_0\int_0^\tau r(a)e^{kt}I_0(0)\exp\left[-ka - \int_0^a \lambda(a')da'\right]da$$

$$1 = S_0\int_0^\tau r(a)\exp\left[-ka - \int_0^a \lambda(a')da'\right]da = \phi(k)$$

Selanjutnya, didefinisikan

$$\phi(k) = S_0\int_0^\tau r(a)\exp\left[-ka - \int_0^a \lambda(a')da'\right]da \qquad ....(***)$$

Perhatikan bahwa (***) menentukan dengan tunggal nilai k, misal k_0 karena $\phi(k)$ monoton turun. Tanda k ditentukan dari nilai $\phi(0)$, jika $\phi(0) > 1$ maka $k_0 > 0$ dan. Jika $\phi(0) < 1$ maka $k_0 < 0$. Dengan demikian, didefinisikan

$$\gamma = S_0\int_0^\tau r(a)\exp\left[-\int_0^a \lambda(a')da'\right]da$$

sebagai basic reproduction number, yakni pada (4).