ISBN : 978-979-16353-3-2

T-8

FORMULA HERON: TINJAUAN DI GEOMETRI EUKLID DAN GEOMETRI SFERIK[1]

Sangadji[2]

Abstrak

Formula Heron mempunyai dua versi. Versi pertama adalah Formula Heron dalam geometri Euklid atau geometri bidang datar yang terkenal dengan nama Rumus s, dan versi kedua adalah formula Heron dalam geometri sferik atau geometri pada luasan bola. Makalah ini membahas dan membuktikan Formula Heron dalam dua versi. Bukti formula Heron versi kedua lebih signifikan dan sulit dari bukti formula Heron versi pertama.

Kata kunci: Formula Heron, luas segitiga sferik, segitiga sferik, geometri Euklid, geometri sferik.

Pendahuluan

Formula Heron adalah formula yang signifikan, baik dalam geometri Euklid maupun geometri sferik. Esensi dari formula Heron adalah menyatakan luas segitiga dengan panjang ketiga sisinya. Untuk bukti Formula Heron versi pertama, sudah banyak dikenal dan tidak sulit. Sedangkan bukti Formula Heron versi kedua memerlukan dua lemma, yaitu formula luas segitiga sferik dan formula cosinus dan sinus dalam segitiga siku-siku sferik, dan juga formula cosinus untuk sisi-sisi sferik.

Dalam bukunya (lihat Daftar Pustaka no.1), pengarangnya menyatakan bahwa petunjuk untuk membuktikan Formula Heron versi geometri sferik adalah dengan memberikan soal-soal 10.20, 10.21, 10.22, 10.23, 10.24, and 10.25.

Dalam makalah ini, saya membuktikan Formula Heron versi geometri sferik dengan cara saya sendiri, tanpa menggunakan petunjuk di atas.

Formula Heron dalam Geometri Euklid

Teorema (Formula Heron Euklid)

Misalkan a, b, c adalah panjang sisi-sisi ΔABC yang terletak berturut-turut di

[1] Disajikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di UNY 5 Desember 2009.

[2] PPIN BATAN dan FST UBINUS

 ISBN : 978-979-16353-3-2

depan titik-titik sudut $A, B, C.$ Maka luasnya adalah

$$|\Delta ABC| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{, di mana } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bukti

$|\Delta ABC| = \dfrac{bc\sin A}{2}$. Dengan formula cosinus, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Sehingga

$$|\Delta ABC| = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{bc\sqrt{1-\cos^2 A}}{2} = \frac{bc}{2}\frac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2bc}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}}{4}$$

didapat

$$= \frac{\sqrt{(b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4}$$

$$= \left[\frac{a+b+c}{2}\frac{b+c-a}{2}\frac{a+b-c}{2}\frac{a+c-b}{2}\right]^{1/2}$$

$$= \left[s(s-a)(s-b)(s-c\right]^{1/2}$$

Formula Heron dalam Geometri Sferik

Yang dimaksud dengan *luna* adalah bagian dari luasan bola antara dua *bidang setengah lingkaran besar* yang membuat sudut θ satu sama lain. Jadi luas dari luna

dengan sudut θ dan jari-jari (lingkaran besar/bola) $\int$ adalah

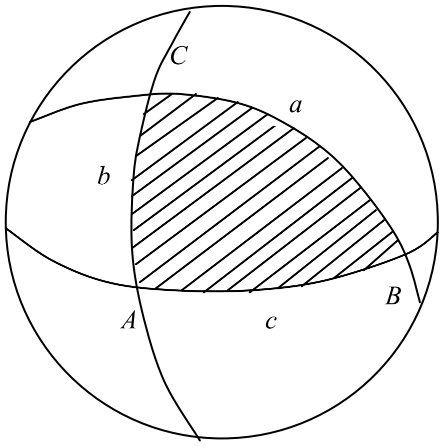
$$L = \frac{\theta}{2\pi}4\pi\int^2 = 2\theta\int^2$$

Lemma 1

Misalkan $\Delta\,ABC$ adalah segitiga pada luasan bola dengan jari-jari $\int$. Maka luas ΔABC adalah

$$\left|\Delta\,ABC\right| = \int^2\left(A+B+C-\pi\right)$$

Bukti



$\Delta\, ABC$ dalam hal ini punya sifat bahwa ketiga sisinya terletak pada lingkaran-lingkaran besar.

Tiga buah luna yang bersesuaian dengan sudut-sudut *A*, *B*, *C* dan juga ketiga luna antipodalnya, luas mereka akan menutupi luasan bola satu kali dan juga luas ∆ABC dan antipodalnya masing-masing dua kali. Jadi didapat:

$2\left(2\int^{2}\right)\!\left(A+B+C\right) = 4\pi\int^{2} + 4\left|\Delta\, ABC\right|,$ yang memberikan $\left|\Delta\, ABC\right| = \int^{2}\left(A+B+C-\pi\right)$

Lemma 2

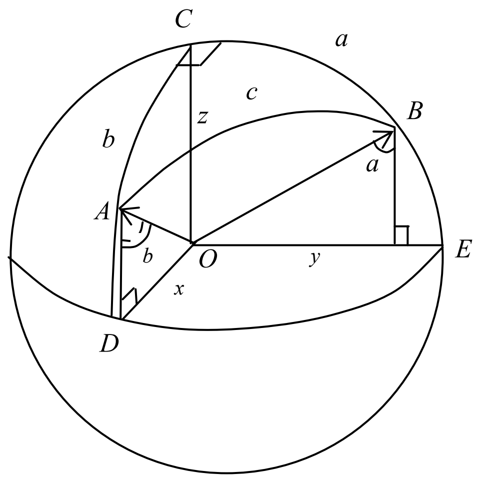
Misalkan ΔABC adalah segitiga siku-siku di C pada luasan bola satuan dengan pusat di *O*. Maka berlaku

$$\cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c},$$

dan

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Bukti



 ISBN : 978-979-16353-3-2

Misalkan luasan bola satuan *S* berpusat di $O(0,0,0)$ dalam ruang berdimensi tiga $\mathbf{R}^3$.

Maka, kita dapatkan vektor-vektor

$$\vec{A} = (\sin b, 0, \cos b),$$
$$\vec{B} = (0, \sin a, \cos a).$$

Menggunakan perkalian silang, kita berturut-turut memperoleh

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-\cos b \sin a, -\sin b \cos a, \sin b \sin a),$$

dan

$$\| \vec{A} \times \vec{B} \| = \| \vec{A} \| \, \| \vec{B} \| \sin c = 1 \cdot 1 \cdot \sin c = \sin c.$$

Pada pihak lain, menggunakan perkalian titik kita juga memperoleh

$$(0,-1,0) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \|(0,-1,0)\| \, \| \vec{A} \times \vec{B} \| \cos A = \| \vec{A} \times \vec{B} \| \cos A = \sin c \cos A.$$

But

$(0,-1,0) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (0,-1,0) \cdot (-\cos b \sin a, -\sin b \cos a, \sin b \sin a) = \sin b \cos a.$ Sehingga dapat disimpulkan

$$\sin c \cos A = \sin b \cos a,$$

atau

$$\cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}.$$

Untuk membuktikan formula kedua,

$$\| (0,-1,0) \cdot \times (\vec{A} \times \vec{B}) \| = \| (0,-1,0) \| \, \| \vec{A} \times \vec{B} \| \sin A = \| \vec{A} \times \vec{B} \| \sin A = \sin c \sin A.$$

Tetapi

$$\begin{aligned} \|(0,-1,0) \times (\vec{A} \times \vec{B}) \| &= \| (0,-1,0) \times (-\cos b \sin a, -\sin b \cos a, \sin b \sin a) \| \\ &= \| (-\sin a \sin b,\ 0,\ -\sin a \cos b) \| = \sin a, \end{aligned}$$

Sehingga kita memperoleh

$$\sin c \sin A = \sin a,$$

atau

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Teorema (Formula cosinus untuk sisi-sisi sferik)

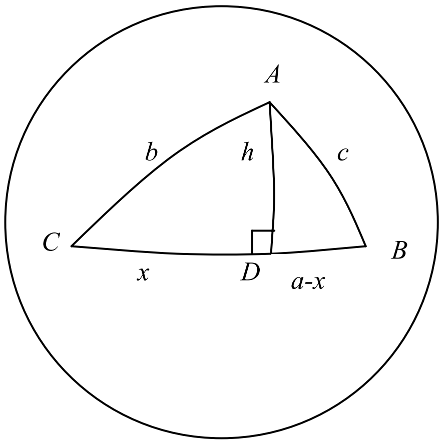
Misalkan ΔABC adalah segitiga pada luasan bola satuan dan pusatnya di titik *O*. Misalkan sisi-sisi *a*, *b*, dan *c* dari ΔABC berturut-turut terletak di hadapan titik-titik sudut *A*, *B*, and *C*. Maka berlaku

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Formula tersebut dapat dibaca di Daftar Pustaka no. 2 *C:\Spherical Triangle, Relationships Between Sides and Angles of a Spherical Triangle.htm*

Di bawah ini adalah bukti kita:

Bukti



Pada ΔADB, menggunakan formula Phytagoras, kita peroleh $\cos c = \cos h \cos(a - x)$. Then,

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos h \cos(a - x)\\ &= \cos h \cos a \cos x + \cos h \sin a \sin x.\end{aligned}$$

Pada ΔACD, menggunakan Lemma 2 di atas, kita peroleh juga $\cos C = \dfrac{\cos h \sin x}{\sin b}$;

dan dengan formula Phytagoras lagi kita peroleh

$$\cos b = \cos x \cosh .$$

Menggabungkan tiga hasil terakhir di atas dapat kita simpulkan

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a(\cos x \cos h) + \sin a(\cos\ h \sin x)\\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}$$

Teorema (Formula Heron Sferik)

Misalkan a, b, c adalah panjang sisi-sisi dari segitiga sferik ΔABC pada luasan bola yang berjari-jari $\int$ yang terletak berturut-turut di hadapan titik-titik sudut A, B, C. Maka luasnya adalah

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$|\Delta ABC| = \int^2 \left\{ \begin{array}{l} \arccos\left(\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right) + \arccos\left(\dfrac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \right) + \\ \arccos\left(\dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \right) - \pi \end{array} \right\}.$$

Bukti

Menggunakan Lemma 1 di atas, kita peroleh luas ΔABC

$$|\Delta ABC| = \int^2 (A + B + C - \pi).$$

Juga, menggunakan Formula Cosinus untuk sisi-sisi sferik kita peroleh

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

atau ekivalennya,

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

atau

$$C = \arccos\left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \right).$$

Dengan cara yang sama, kita peroleh juga

$$B = \arccos\left(\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin a \sin c} \right)$$

dan

$$A = \arccos\left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right).$$

Jadi, menggunakan hasil-hasil di atas dapat kita simpulkan

$$|\Delta ABC| = \int^2 \left\{ \begin{array}{l} \arccos\left(\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right) + \arccos\left(\dfrac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \right) + \\ \arccos\left(\dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \right) - \pi \end{array} \right\}.$$

Simpulan

1. Teorema (Formula Heron dalam Geometri Euklid)

Misalkan a, b, c adalah panjang sisi-sisi ΔABC that are yang terletak berturut-turut di hadapan titik-titik sudut $A, B, C.$ Maka luasnya adalah

$$|\Delta ABC| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{, di mana } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

2. Teorema (Formula Heron dalam Geometri Sferik)

Misalkan a, b, c adalah panjang sisi-sisi dari segitiga sferik ΔABC pada luasan bola yang berjari-jari $\int$ yang terletak berturut-turut di hadapan titik-titik sudut $A, B, C.$ Maka luasnya adalah

$$|\Delta ABC| = \int^2 \left\{ \begin{array}{l} \arccos\left(\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right) + \arccos\left(\dfrac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}\right) + \\ \arccos\left(\dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right) - \pi \end{array} \right\}.$$

Daftar Pustaka

1. Baragar, Arthur. *A Survey of Classical and Modern Geometries with Computer Activities.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA. 2001.
2. C:\Spherical Triangle, Relationships Between Sides and Angles of a Spherical Triangle.htm