

## PENENTUAN HUBUNGAN EKSPONEN SPEKTRAL DAN DIMENSI FRAKTAL SINYAL ULF GEOMAGNET

John Maspupu

Pusfatsainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjunan No. 133 Bandung 40173,

Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998

E-mail: [john\\_mspp@yahoo.com](mailto:john_mspp@yahoo.com)

**Abstrak** Makalah ini membahas hubungan antara dua jenis karakteristik fraktal sinyal *ULF* (*Ultra low Frequency*) geomagnet yaitu eksponen spektral dan dimensi fraktal. Jika hubungan matematis antara kedua jenis karakteristik fraktal sinyal *ULF* ini telah diketahui atau ditentukan maka selain dimensi fraktal, pendekatan eksponen spektral ini juga dapat digunakan sebagai ciri untuk mengindikasi eksistensi anomali pada sinyal *ULF* tersebut. Anomali dimaksud adalah terjadinya kenaikan amplitudo yang cukup besar pada variasi medan geomagnet komponen *H*, dibandingkan dengan komponen-komponen lainnya (komponen *D* dan *Z*). Oleh karena itu tujuan pembahasan makalah ini adalah menyelidiki keterkaitan kedua karakteristik fraktal sinyal *ULF* tersebut dan sekaligus menentukan hubungan matematisnya. Metode analisis yang digunakan untuk mencapai tujuan di atas, antara lain menyangkut konsep-konsep dimensi fraktal, fraksi gerakan-gerakan Brown (*fractional Brown motions*) dan kuat spektral yang terkait dengan eksponen *Hurst*. Hasil pembahasan dari hubungan kedua karakteristik tersebut adalah untuk saling memperkuat dukungan pada proses fisis terkait yang nantinya memunculkan informasi tentang aktivitas geomagnet, sehubungan dengan akan terjadinya badi geomagnet.

**Kata kunci :** Eksponen spektral, dimensi fraktal, sinyal *ULF* geomagnet.

### 1. Pendahuluan

Pengertian tentang eksponen spektral sinyal *ULF* umumnya merupakan faktor pangkat dari ukuran presisi  $\frac{1}{f}$  dalam skala frekuensi. Dipihak lain enersi fungsi densitas spektral (*power spectrum*) umumnya sebanding dengan ukuran presisi dipangkatkan eksponen spektralnya (lihat [6]). Pernyataan di atas ini mengacu pada suatu hukum yang dikenal dengan sebutan hukum pangkat (*power law*). Sedangkan kontruksi dimensi fraktal yang didasarkan pada bentuk-bentuk geometri serupa diri (*self-*

*similarity*), ataupun pada jumlah hitungan kotak (*Box-counting*) juga diperoleh melalui relasi hukum pangkat (lihat [4]). Dengan demikian eksponen spektral maupun dimensi fraktal juga merupakan suatu karakteristik fraktal dari sinyal ULF. Pernyataan ini diperkuat ataupun didukung dengan penyelidikan tentang dinamika karakteristik sinyal ULF pada suatu kondisi geomagnet lokal, yang dapat dibaca dalam makalah *Hayakawa et. al.* dan *Smirnova et. al.* (lihat [2], [3], dan [5]). Oleh karena itu dengan mempertimbangkan beberapa referensi yang telah dikemukakan di atas, muncul pemikiran untuk menentukan hubungan matematis antara eksponen spektral dan dimensi fraktal sinyal ULF. Adapun tujuan pembahasan makalah ini antara lain, a). Menyelidiki keterkaitan kedua karakteristik fraktal sinyal ULF tersebut. b). Menentukan hubungan matematis antara dimensi serupa ( $\equiv D_s$ ) dengan tangens arah ( $\equiv d$ ) pada kurva suatu data deret waktu. c). Menentukan hubungan matematis antara dimensi hitungan kotak ( $\equiv D_B$ ) dengan eksponen spektral ( $\equiv \beta$ ). Namun yang menjadi masalah adalah bagaimana caranya menyelidiki keterkaitan kedua karakteristik tersebut? Dan metode apa yang digunakan untuk proses penyelidikkannya? Untuk itu perlu dirancang suatu metodologi yang mampu menyelesaikan permasalahan tersebut di atas. Selain itu manfaat dari diperolehnya hubungan kedua karakteristik tersebut adalah untuk saling memperkuat dukungan pada proses fisis terkait yang nantinya memunculkan informasi tentang aktivitas geomagnet, sehubungan dengan akan terjadinya badi geomagnet.

## 2. Metodologi

Konsep-konsep yang digunakan dalam pembahasan makalah ini adalah antara lain, analisis dimensi serupa (*similarity dimension*), analisis dimensi hitungan kotak (*Box-counting dimension*), relasi hukum pangkat (*power law relationships*), fraksi gerakan-gerakan Brown (*fractional Brown motions*) dan kuat spektral atau fungsi densitas spektral (*spectral density function  $\equiv$  power spectrum*) yang terkait dengan eksponen *Hurst*. Untuk jelasnya, berikut ini diberikan tahapan-tahapan pembahasan sebagaimana mestinya.

- i). Gunakan relasi hukum pangkat pada panjang kurva suatu data deret waktu.

- ii). Gunakan relasi hukum pangkat pada dimensi serupa diri dari kurva fraktal.
- iii). Nyatakan hubungan antara panjang kurva ( $\equiv \mu$ ) dengan banyaknya potongan-potongan kurva ( $\equiv \alpha$ ) menurut skala yang ditentukan ( $\equiv \varepsilon$ ).
- iv). Klaim dimensi serupa  $D_S = d + 1$ .
- v). Gunakan relasi hukum pangkat pada rata-rata mutlak pertambahan nilai fungsi jejak gerakan Brown terhadap waktu sebagai berikut :  $|\overline{\Delta B}| \sim T_S^\delta$  (lihat [1]).
- vi). Kembangkan relasi di langkah v), untuk fraksi gerakan-gerakan Brown dengan melibatkan eksponen *Hurst* sehingga menjadi,  $|\overline{\Delta B_H}| \sim T_S^H$ .
- vii). Lakukan analisis perhitungan kotak (*box-counting analysis*) dan gunakan formulasi  $D_B = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$  (lihat [4]).
- viii). Klaim dimensi hitungan kotak  $D_B = 2 - H$ .
- ix). Gunakan relasi hukum pangkat pada *kuat spektral* untuk semua derau yang terkait dengan eksponen spektral yaitu,  $P(f) \sim \frac{1}{f^\beta}$ .
- x). Gunakan formulasi *kuat spektral* untuk fraksi gerakan-gerakan Brown yang terkait dengan eksponen *Hurst* yaitu,  $P_{B_H}(f) = \frac{\sigma_H^2}{|f|^{2H+1}}$ .
- xi). Lakukan analisis pada langkah-langkah viii), ix), dan x).
- xii). Klaim  $D_B = \frac{5 - \beta}{2}$ .

### 3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan  $\mu$  adalah panjang kurva suatu data deret waktu .

$\varepsilon$  adalah aturan petunjuk pengukuran (*compass setting*) dalam satuan panjang.

$\frac{1}{\varepsilon}$  adalah ukuran atau faktor presisi.

$d$  adalah tangens arah (*slope*) pada kurva suatu data deret waktu dalam diagram

$\log \mu$  versus  $\log \frac{1}{\varepsilon}$ .

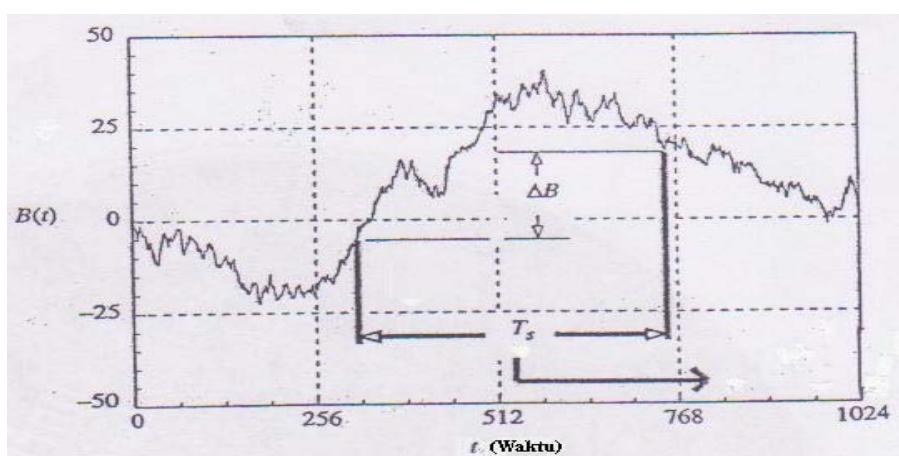
Menurut relasi hukum pangkat panjang kurva suatu data deret waktu sebanding dengan faktor presisi yang dipangkatkan tangens arah pada kurva data deret waktu tersebut. Ini berarti secara simbolik  $\mu \sim \frac{1}{\varepsilon^d}$ . Atau jika  $k$  suatu konstanta, maka secara matematis dapat ditulis  $\mu = \frac{k}{\varepsilon^d}$  .....(1)

Dipihak lain menurut konsep dimensi serupa diri (*self-similarity dimension*) dari kurva fraktal juga berlaku relasi hukum pangkat  $\alpha = \frac{k}{\varepsilon^{D_s}}$  .....(2)

Selanjutnya jika  $\alpha$  merupakan banyaknya potongan-potongan kurva yang dapat menutup secara utuh panjang kurva ( $\equiv \mu$ ) maka  $\mu$  dapat dikatakan sebagai hasil perkalian antara banyaknya potongan-potongan ( $\equiv \alpha$ ) dengan kebalikkan ukuran skala presisinya ( $\equiv \varepsilon$ ). Dengan demikian diperoleh relasi sebagai berikut,  $\mu = \alpha \cdot \varepsilon$  .....(3)

Subtitusi persamaan-persamaan (1) dan (2) ke persamaan (3) akan diperoleh relasi berikut,  $\frac{k}{\varepsilon^d} = \frac{k}{\varepsilon^{D_s}} \cdot \varepsilon$ , atau  $\varepsilon^{D_s} = \varepsilon^{d+1}$  .....(4)

Jika kedua ruas persamaan (4) diambil logaritmanya maka dihasilkan suatu relasi sebagai berikut,  $D_s = d+1$ . Hal yang serupa juga berlaku untuk hubungan antara dimensi kompas ( $\equiv D_K$ ) dengan tangens arah ( $\equiv d$ ) pada kurva data deret waktu yaitu  $D_K = d+1$ . Selanjutnya perhatikan pasangan titik-titik pada jejak gerakan *Brown* yang dipisah dengan waktu  $T_s$ , seperti terlihat pada gambar 1., di bawah ini :



Gambar1. Pertambahan skala waktu dari jejak suatu gerakan *Brown*.

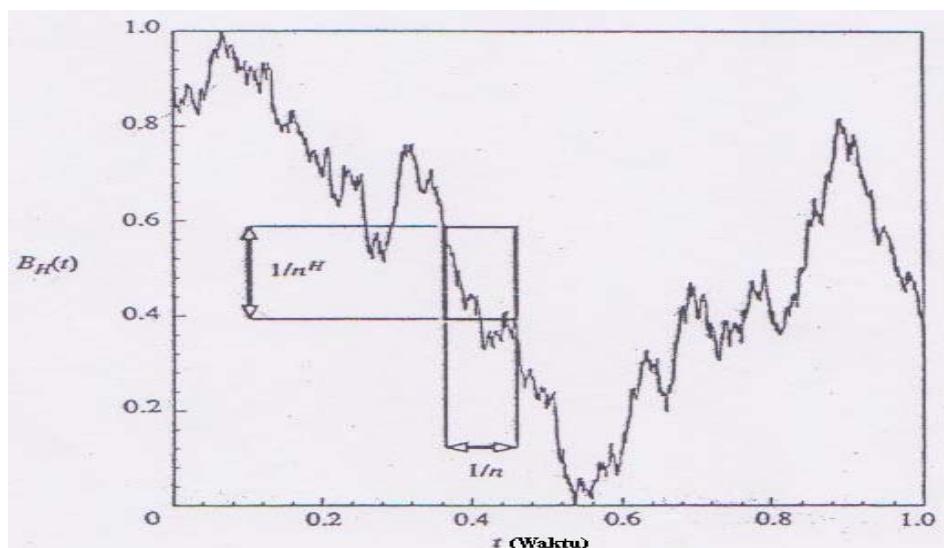
Jika  $B(t) \equiv$  fungsi jejak gerakan *Brown* terhadap waktu maka menurut relasi hukum

$$\text{pangkat berlaku : } \overline{|\Delta B|} = \overline{B(t + T_S) - B(t)} \sim T_S^\delta \quad \dots \dots \dots (5)$$

Bila  $\delta = \frac{1}{2}$  maka  $\delta$  diganti dengan  $H$  dan disebut eksponen *Hurst*, sehingga  $B(t)$  akan memberikan gerakan *Brown* yang reguler (*regular Brown motion*). Selanjutnya sebutlah  $B_H(t)$  adalah sebagian kecil dari gerakan-gerakan *Brown* (*fractional Brown motions*  $\equiv fBm$ ) dengan daerah definisi eksponen *Hurst* di antara 0 dan 1 ( $0 < H < 1$ ). Sebagian kecil gerakan-gerakan *Brown* secara statistik adalah proses *Gaussian* serupa diri (*fractal*) dan merupakan model-model yang relevan untuk berbagai jenis klas dari suatu fenomena alam. Walaupun gerakan-gerakan *Brown* ini tidak stasioner, namun satu hal yang dapat didefinisikan adalah kuat spektral yang memiliki enersi fungsi densitas liruahan (*power decay*). Perlu diketahui bahwa kondisi non stasioner dari  $B_H(t)$  akan terlihat dalam enersi yang muncul di frekuensi rendah seperti pada sinyal-sinyal ULF. Dengan demikian relasi (5) di atas dapat dimodifikasi menjadi

$$\overline{|\Delta B_H|} \sim T_S^H \quad \dots \dots \dots (6)$$

Untuk menyederhanakan pembahasan ini, tinjaulah fraksi gerakan-gerakan *Brown* dalam suatu sistem koordinat  $B_H(t)$  terhadap waktu  $t$  dengan  $0 \leq t \leq 1$  dan  $0 \leq B_H(t) \leq 1$  seperti terlihat pada gambar 2., di bawah ini :



Gambar 2. Sifat skala suatu fraksi gerakan *Brown* yang termuat dalam kotak satuan.

Jika selang satuan waktu  $t$  dan selang satuan  $B_H(t)$  ini masing-masing dibagi menjadi  $n$  subselang maka panjang tiap subselang waktu adalah  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  dan panjang subselang  $B_H(t)$  adalah  $\frac{1}{n^H} = \varepsilon^H$ . Dengan demikian luas dari persegi panjang tersebut adalah sebesar  $\frac{1}{n^H} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{H+1}} = \varepsilon^{H+1}$  .....(7)

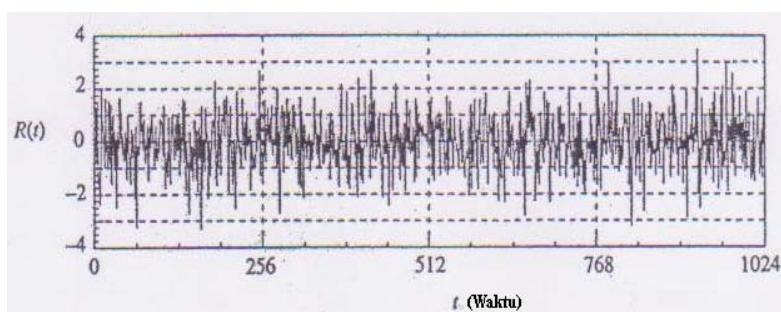
Akan tetapi luas dari bujur sangkar terkecil dengan rusuk  $\frac{1}{n}$  yang digunakan untuk menutupi seluruh persegi panjang tersebut di atas adalah  $\frac{1}{n^2} = \varepsilon^2$ . Jadi banyaknya bujur sangkar yang digunakan untuk menutup persegi panjang tersebut setiap subselang waktu adalah sebesar  $\frac{\varepsilon^{H+1}}{\varepsilon^2} = \varepsilon^{H-1}$  .....(8)

Karena ada  $n = \varepsilon^{-1}$  subselang waktu dengan panjang masing-masing subselang waktu  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , jadi total banyaknya kotak sepanjang satu satuan waktu adalah sebesar  $N = \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon^{H-1} = \varepsilon^{H-2}$  .....(9)

Menurut formulasi dimensi hitungan kotak (lihat [4])  $D_B = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$  .....(10)

Dari persamaan- persamaan (9) dn (10) diperoleh  $D_B = 2 - H$  .....(11)

Menurut konsep "*The colour and Power of noise*" (lihat [1]), jejak waktu suatu variabel acak dengan distribusi Gaussian biasanya dikenal sebagai derau putih (*white noise*) seperti yang terlihat pada gambar 3., di bawah ini :

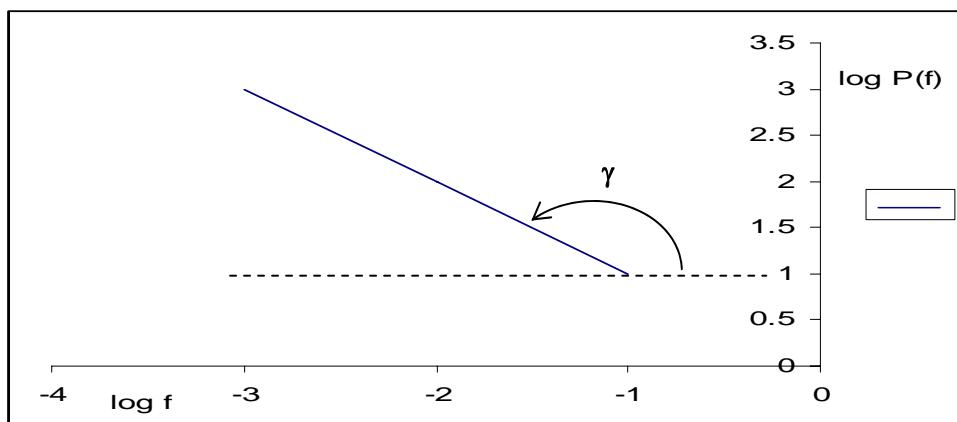


Gambar 3. Hasil proses simulasi variabel acak  $R(t)$  dengan distribusi *Gaussian* (menurut konstruksi gerakan *Brown*) yang disampling di setiap satuan pertambahan waktu.

Penjumlahan secara utuh dari derau putih ini memberikan suatu gerakan *Brown* reguler reguler yang juga dikenal sebagai derau *Brown* (*Brown noise*) dengan eksponen *Hurst* ( $H = 0,5$ ). Derau putih dan derau *Brown* ini sering teramati di alam, oleh karena itu menurut relasi hukum pangkat, energi fungsi densitas spektral atau kuat spektral semua

deraui selalu sebanding dengan  $\frac{1}{f^\beta}$ . Atau ditulis  $P(f) \sim \frac{1}{f^\beta}$  .....(12)

Dalam hal ini  $f$  adalah besaran frekuensi, dan  $\beta$  adalah eksponen spektral yang didefinisikan sebagai minus kemiringan (*slope*) regresi linier dari hasil plot  $\log f$  versus  $\log P(f)$ . Dalam hal ini kemiringan adalah  $\tan \gamma$  dan  $\gamma$  adalah sudut miring dengan arah berlawanan jarum jam terhadap sumbu koordinat  $\log f$  positif, seperti terlihat pada gambar 4. Dengan demikian dapat ditulis  $\tan \gamma = -\beta$  atau  $\beta = -\tan \gamma$ .



Gambar 4. Garis regresi linier dari  $\log f$  versus  $\log P(f)$

Dipihak lain, kuat spektral dari derau-deraui fraktal seperti pada *fBm*, secara matematis dinyatakan sebagai berikut,  $P_{B_H}(f) = \frac{\sigma_H^2}{|f|^{2H+1}}$  .....(13)

Dalam hal ini  $\sigma_H^2$  adalah variansi dari distribusi *fBm* dan  $H$  adalah eksponen *Hurst*. Dengan memperhatikan relasi (12) dan persamaan (13), akibatnya dapat ditentukan hubungan  $\beta = 2H + 1$  .....(14)

Dengan mensubtitusikan persamaan (11) ke dalam persamaan (14), akibatnya diperoleh diperoleh hubungan antara eksponen spektral dan dimensi fraktal sebagai berikut yaitu,

$$D_B = \frac{5 - \beta}{2} \quad \text{atau} \quad \beta = 5 - 2D_B \quad \dots \dots \dots (15)$$

Dari relasi-relasi (14) dan (15) ini, dapat dihitung nilai-nilai eksponen spektral, eksponen *Hurst* dan dimensi fraktal hitungan kotak yang semuanya dicantumkan dalam tabel 1.

Tabel 1. Hasil perhitungan  $\beta$  dan  $D_B$  dengan  
 $0 \leq H \leq 1$

Eksponen <i>Hurst</i> H	Eksponen Spektral $\beta$	Dimensi fraktal hitungan kotak $D_B$	Eksponen <i>Hurst</i> H	Eksponen Spektral $\beta$	Dimensi fraktal hitungan kotak $D_B$
1,00	3,0	1,00	0,45	1,9	1,55
0,95	2,9	1,05	0,40	1,8	1,60
<b>0,90</b>	<b>2,8</b>	<b>1,10</b>	0,35	1,7	1,65
0,85	2,7	1,15	0,30	1,6	1,70
0,80	2,6	1,20	0,25	1,5	1,75
0,75	2,5	1,25	0,20	1,4	1,80
0,70	2,4	1,30	0,15	1,3	1,85
0,65	2,3	1,35	<b>0,10</b>	<b>1,2</b>	<b>1,90</b>
0,60	2,2	1,40	0,05	1,1	1,95
0,55	2,1	1,45	0,01	1,02	1,99
<b>0,50</b>	<b>2,0</b>	<b>1,50</b>	<b>0,00</b>	<b>1,0</b>	<b>2,00</b>

Dari tabel 1., di atas terlihat bahwa untuk eksponen *Hurst* diantara 1 dan 0, dimensi fraktal  $D_B$  secara bertahap cenderung membesar (menaik), namun eksponen spektralnya secara gradual juga cenderung mengecil (menurun). Selanjutnya menurut [1], kondisi derau hitam (*black noise*) akan muncul di daerah nilai eksponen spektral yang lebih besar dari pada dua ( $\beta > 2,0$ ) atau tercatat dalam tabel 1., di daerah nilai dimensi fraktal yang lebih kecil dari pada satu setengah ( $D_B < 1,50$ ) disertai daerah nilai eksponen *Hurst* yang lebih besar dari pada setengah ( $H > 0,50$ ). Situasi seperti ini biasanya dikenal sebagai kondisi persistensi (*persistence conditions*). Sedangkan kondisi anti persistensi (lihat [1]) terjadi di daerah nilai eksponen *Hurst* yang lebih kecil dari pada setengah ( $H < 0,50$ ) atau tercatat dalam tabel 1., di daerah

nilai dimensi fraktal yang lebih besar dari pada satu setengah ( $D_B > 1,50$ ) disertai daerah nilai eksponen spektral yang lebih kecil dari pada dua ( $\beta < 2,0$ ). Selain itu menurut [7], jika  $H = 0,90$  (*persistent noise*) maka  $D_B = 1,10$  dan  $\beta = 2,8$ . Sedangkan bila  $H = 0,10$  (*antipersistent noise*) maka  $D_B = 1,90$  dan  $\beta = 1,2$ . Juga menurut [7], terdapat suatu keanehan yang paling utama dan dapat dilihat dari hasil plot log frekuensi  $f$  versus log kuat spektral  $P(f)$  yaitu penurunan nilai eksponen spektral ( $\beta$ ) secara gradual menuju  $\beta = 1,0$  (*flicker noise signature*), atau terjadi kenaikan dimensi fraktal secara bertahap menuju  $D_B = 2,00$  ketika menjelang gempa bumi dalam orde hari. Itu berarti sudut miring garis regresi pada gambar 4., akan menuju  $135^\circ$  ( $\gamma = 135^\circ$ ).

#### 4. Simpulan

Dengan mengetahui hubungan kedua karakteristik fraktal tersebut (dimensi fraktal dan eksponen spektral), ini akan saling memperkuat dukungan pada proses fisis terkait yang nantinya memunculkan informasi tentang aktivitas geomagnet, sehubungan dengan akan terjadinya badai geomagnet. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa pada saat akan terjadi badai geomagnet, perilaku eksponen spektral untuk selang waktu tertentu secara gradual akan semakin bertambah kecil (cenderung menurun). Sedangkan dalam selang waktu yang sama secara bertahap dimensi fraktal akan membesar (cenderung menaik).

#### Daftar Pustaka

- [1]. Addison P.S, (1997) *Fractals and Chaos: An illustrated course*, IOP Publishing Ltd., Philadelphia USA.
- [2]. Hayakawa M. et. al., (1999) Fractal Analysis of ULF geomagnetic data associated with the Guam earthquake on 8 August 1993, *Geophys. Res. Lett.*, 26, 18, pp. 2797 – 2800.

- 
- [3]. Hayakawa M. et. al., (2000a) ULF electromagnetic precursors for an earthquake at Biak, Indonesia on 17 February 1996, *Geophys. Res. Lett.*, 27, pp. 1531 – 1534.
- [4]. Maspupu J, (2002) Dimensi fraktal suatu himpunan, *Jurnal Natural FMIPA-Tera-kreditasi UNIBRAW*, hal. 29 – 36.
- [5]. Peitgen H.O, et. al., (1992) *Chaos and Fractals: New frontiers of science*, Springer – Verlag, New York.
- [6]. Smirnova N. et.al., (1999) Structure of the ULF geomagnetic noise in a seismo-active zone and its relation to the earthquake, in: Noise Physical System and  $\frac{1}{f}$  Fluctuations (*Proc. 15th Int. Conf. ICNF'99, Hong Kong, 23-26 August*), (Ed) Surya.Ch. World Scientific, pp.471-474.
- [7]. Smirnova N. et.al., (2001) Scaling characteristic of ULF geomagnetic fields at the Guam seismoactive area and their dynamics in relation to the earth quake, *Journal Natural Hazards and Earth System Sciences (J. NHESS)*, pp.119 – 126.