

DESAIN LINEAR QUADRATIC REGULATOR PADA SISTEM INVERTED PENDULUM

Muhammad Wakhid Musthofa¹

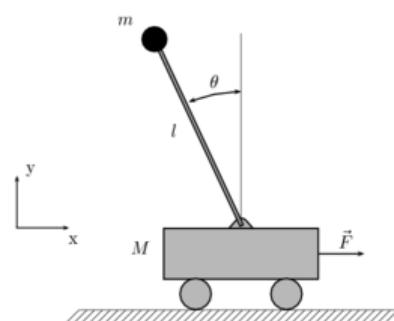
¹ Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
e-mail: mwakhid_m@yahoo.com

Abstak. Makalah ini membahas desain pengontrol tipe Linear Quadratic Regulator (LQR) untuk menstabilkan pendulum yang berada di atas kereta tetap dalam posisi terbalik dengan meminimumkan tenaga listrik yang disuplai ke dalam kereta. Selanjutnya disajikan simulasi hasil perhitungan pengontrol untuk memberikan gambaran pengaruh kerja pengontrol dalam menstabilkan sistem.

Kata kunci. linear quadratic regulator, optimal control, inverted pendulum.

1. Pendahuluan

Inverted pendulum pada sebuah kereta bergerak adalah sistem klasik yang digunakan untuk mendemonstrasikan aspek teori dan aspek praktis dari teori kontrol. Sistem ini terdiri dari sebuah kereta yang pergerakannya sepanjang track terbatas pada gerak linear dan gerak batang yang dipasang pada kereta. Antara kereta dan batang dihubungkan dengan sebuah engsel. Kereta dilengkapi dengan sebuah motor yang menerima tenaga listrik (voltase) dan dari tenaga listrik tersebut dihasilkan tenaga putar (torsi) yang menggerakkan kereta (gambar 1) [1].



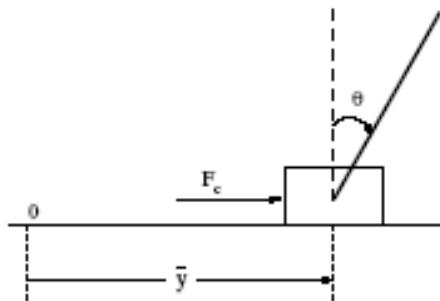
Gambar 1. sistem *inverted pendulum*

Tujuan pengontrolan pada sistem *inverted pendulum* pada umumnya adalah menstabilkan pendulum tetap pada posisi terbalik dengan cara menggerak-gerakkan kereta mengikuti arah jatuhnya pendulum. Hal ini dapat diilustrasikan sebagaimana seorang pemegang tongkat yang harus menyeimbangkan sebuah tongkat pada ujung jari-jarinya. Pada kondisi tersebut ia harus memperhatikan gerakan tongkat untuk menentukan kapan tongkat tersebut bergerak ke bawah kemudian tepat pada saat tersebut ia harus menggerakkan tangannya sesuai dengan gerakan tongkat tersebut. Analog dengan ilustrasi diatas, dalam sistem *inverted pendulum* harus diperhatikan sudut pendulum dan posisi kereta dan dengan *feedback controller* akan ditentukan voltase dari motor yang akan menggerakkan kereta melintas pada track dengan tetap mempertahankan posisi pendulum dalam keadaan terbalik.

Tujuan utama pembahasan makalah ini adalah mendesain *linear quadratic regulator* (LQR) untuk menstabilkan posisi pendulum sehingga pendulum tetap dalam posisi terbalik dengan cara menggerakkan kereta dari satu posisi ke posisi yang lain sehingga state dari sistem tetap berada di sekitar titik equilibrium 0 (titik asal).

Masalah tersebut akan dinyoleisaikan dengan beberapa langkah berikut. Pada bagian 2 akan diturunkan model matematika dari sistem *inverted pendulum* dengan menggunakan hukum Newton. Selanjutnya pada bagian 3 akan didesain teknik kontrol feedback jenis LQR untuk mengatasi ketidakstabilan pada sistem *inverted pendulum*. Pada akhir pembahasan akan disajikan simulasi yang menggambarkan pengaruh kerja pengontrol dalam menstabilkan sistem.

2. Model Matematika



Gambar 2. sistem *inverted pendulum*

Dengan menggunakan Hukum Newton pada *inverted pendulum*, didapat persamaan-persamaan sebagai berikut [4] :

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\bar{y} + l \sin \theta) = F_H \quad (1)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = F_V - mg \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F_V l \sin \theta - F_H l \cos \theta. \quad (3)$$

Sedangkan pada gerak kereta, diperoleh persamaan

$$M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = F_c. \quad (4)$$

Dengan mengasumsikan $F_H = F_V = 0$ maka dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

$$(M + m) \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} + ml \ddot{\theta} \cos \theta = ml \ddot{\theta}^2 \sin \theta + F_c. \quad (5)$$

Sedangkan dari persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$\frac{4}{3} l \ddot{\theta} + \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} \cos \theta = g \sin \theta. \quad (6)$$

Besaran F_c adalah gaya yang bekerja pada kereta yang dirumuskan dengan

$$F_c = \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{d\bar{y}}{dt} + \alpha_3 \text{sign} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right). \quad (7)$$

Suku pertama dari F_c menyatakan gaya yang diberikan oleh motor pada kereta yang besarnya proporsional terhadap voltase V yang diberikan pada motor. Suku kedua dari F_c menyatakan gaya gesek elektromotif dari motor dan suku ketiga menyatakan friksi Coulomb. Berdasarkan [2] pada tabel berikut ini disajikan besaran-besaran yang terdapat dalam persamaan-persamaan di atas.

Tabel 1. Nilai besaran pada persamaan (1) – (7)

lambang	deskripsi	nilai / unit
M	Massa kereta	0.915 kg
m	massa batang	0.210 kg
l	setengah dari panjang batang	0.3 m
\bar{y}	posisi kereta	m
θ	sudut dari batang	radian
F_c	gaya pada kereta	N
g	percepatan gravitasi	9.81 m/s^2
V_{\max}	voltase maksimum pada motor	5 V
α_1	koefisien motor	1.4 N/V
α_2	koefisien gaya gesek elektromotif	-9.1 kg/s
α_3	koefisien friksi Coulomb	-3 N

Dengan memilih scaling

$$\bar{y} = \frac{4}{3} ly \quad (8)$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{4l}{3g}} t \quad (9)$$

$$V = V_{\max} u \quad (10)$$

maka persamaan (5) dan (6) menjadi

$$\ddot{y} + \varepsilon \cos \theta (\ddot{\theta}) = \varepsilon (\dot{\theta})^2 \sin \theta + \beta_1 u + \beta_2 \dot{y} + \beta_3 \text{sign}(\dot{y}) \quad (11)$$

$$\cos \theta (\ddot{y}) + \ddot{\theta} = \sin \theta \quad (12)$$

dengan $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\ddot{\theta} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ dan

$$\varepsilon = \frac{3m}{4(M+m)} = 0.140 \quad (13)$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 V_{\max}}{g(M+m)} = 0.634 \quad (14)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{4l}{3g}} \frac{\alpha_2}{M+m} = -1.633 \quad (15)$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3}{g(M+m)} = -0.027. \quad (16)$$

Persamaan (11) dan (12) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \ddot{\theta}^2 \sin \theta + \beta_1 u + \beta_2 \dot{y} + \beta_3 \text{sign}(\dot{y}) \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Persamaan (17) dapat ditulis sebagai sistem persamaan dalam

$x = (y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})^T = (y, \theta, v, q)^T$ sebagai

$$\begin{aligned} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} & \frac{\varepsilon \dot{\theta} \sin \theta}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2 \cos \theta}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} & \frac{\varepsilon \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta + \beta_3 \text{sign}(\dot{y})}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} \\ \frac{\sin \theta + \beta_3 \cos \theta \text{sign}(\dot{y})}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta_1}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} \\ \frac{\beta_1 \cos \theta}{1-\varepsilon \cos^2 \theta} \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Yaitu dalam bentuk standar dapat ditulis dengan

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad \text{dengan } u(t) \in U \quad (19)$$

dengan U adalah himpunan kontrol yang diperkenankan.

3. Feedback

Dalam masalah kontrol optimal ini feedback diperlukan karena dua alasan berikut [2] :

1. State x_0 (titik asal) pada sistem *inverted pendulum* bukan titik equilibrium yang stabil. Hal ini dikarenakan pada state tersebut pendulum masih dalam posisi terbalik. Secara matematis, dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen matriks representasi sistem pada state tersebut mempunyai bagian real yang positif. Untuk mengimplementasikan pengontrol kita perlu menstabilkan pendulum. Hal tersebut dikerjakan dengan mendesain LQR pada sistem.
2. Model matematika yang diturunkan dari gerak pendulum dan kereta tidaklah sempurna. Sehingga jika kontrol optimal diaplikasikan pada model tersebut maka pendulum tidak akan mencapai state yang diharapkan. Hal ini disebabkan kesalahan (*error*) pada model dan faktor-faktor gangguan (*disturbance*). Pada prinsipnya seberapa dekat pendulum mengikuti gerak kereta sangat bergantung pada seberapa akurat model tersebut diformulasikan. Untuk mengatasi hal tersebut maka diperlukan pelinearan pada sistem kemudian mendesain LQR pada sistem sehingga kontrol pada sistem tersebut mempunyai feedback.

Selanjutnya untuk mendesain kontrol optimal dari sistem yang berupa LQR dimulai dengan melinearkan persamaan state space sistem (18) yang telah tak berdimensi pada titik $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ sebagai berikut.

Persamaan (18) dapat ditulis sebagai

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (19)$$

dengan

$$f_1 = \dot{y}, \quad (34)$$

$$f_2 = \dot{\theta}, \quad (35)$$

$$f_3 = \frac{\beta_2 \dot{y}}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta} + \frac{\varepsilon(\dot{\theta}) \sin \theta^2}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta} + \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta + \beta_3 \operatorname{sign}(\dot{y})}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta}, \quad (36)$$

$$f_3 = \frac{\beta_2 \cos \theta \dot{y}}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta} + \frac{\varepsilon(\theta)^2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta + \beta_3 \cos \theta \operatorname{sign}(\dot{y})}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta}, \quad (37)$$

$$g_1 = 0, \quad (38)$$

$$g_2 = 0, \quad (39)$$

$$g_3 = \frac{\beta_1}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta}, \quad (40)$$

$$g_4 = \frac{\beta_1 \cos \theta}{1 - \varepsilon \cos^2 \theta}. \quad (41)$$

Maka, matriks Jacobian dari sistem (18) adalah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix}$$

dan di titik asal $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ dihasilkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} & \frac{\beta_2}{1-\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\varepsilon} & -\frac{\beta_2}{1-\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\beta_1}{1-\varepsilon}.$$

Sehingga dari sistem (18) didapat sistem linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (42)$$

dengan A dan b sebagaimana didefinisikan diatas.

Dalam keadaan *steady state*, ingin dicari kontrol $u(t)$ yang meminimalkan indeks performansi[3]

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[x(t)^T Q x(t) + r u^2(t) \right] dt \quad (43)$$

dengan $Q > 0$ dan $r > 0$ merupakan bobot untuk x dan u .

Input kontrol $u(t)$ dihitung dengan rumus

$$u(t) = -\frac{1}{r} b^T S x(t) \quad (44)$$

atau

$$u(t) = -K x(t)$$

dengan S adalah penyelesaian dari persamaan aljabar Riccati

$$-SA - A^T S + \frac{1}{r} bb^T S - Q = 0 \quad (45)$$

dan $S > 0$.

Dengan mengambil matriks $Q = I_4$ dan $r = 1$ maka dengan menyelesaikan persamaan aljabar Riccati (45) didapatkan kontrol $u(t) = -Kx(t)$ dengan

$$K = [-1 \quad -11.5958 \quad -7.8354 \quad -11.3729]$$

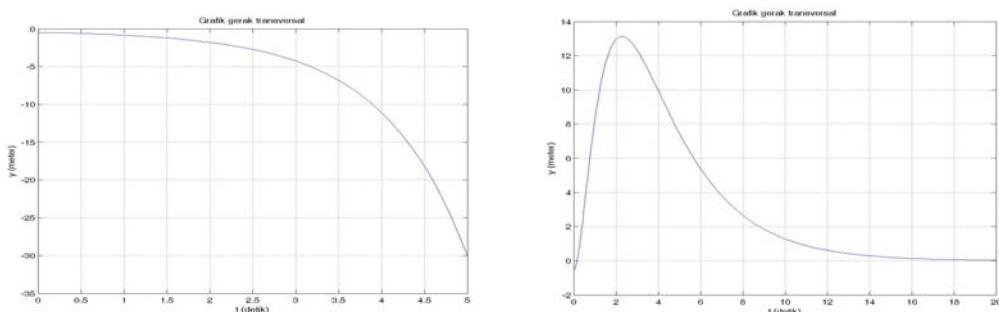
dan

$$S = \begin{bmatrix} 5.2602 & 11.3729 & 10.0191 & 11.3750 \\ 11.3729 & 66.0528 & 48.4488 & 64.1712 \\ 10.0191 & 48.4488 & 37.2699 & 47.8938 \\ 11.3750 & 64.1712 & 47.8938 & 63.3141 \end{bmatrix}.$$

4. Simulasi Pengaruh Pengontrol pada Sistem

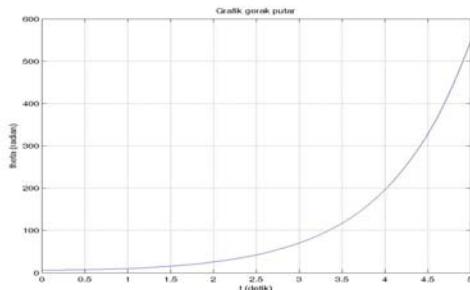
Berikut ini dipaparkan pengaruh dari kontrol $u(t) = -Kx(t)$ terhadap sistem *inverted pendulum* yang didisajikan dalam beberapa grafik berikut.

Gambar 3. dan 4. menunjukkan pengaruh pengontrol $u(t) = -Kx(t)$ dalam gerak transfersal dari sistem. Dari gambar tersebut terlihat bahwa gerak transfersal dari sistem dapat distabilkan ke titik asal setelah detik 18 detik.



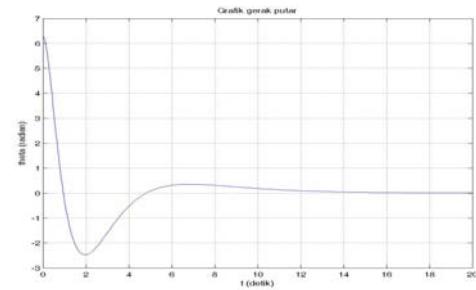
Gambar 3. gerak transfersal sistem
tanpa kontrol

Gambar 5. dan 6. menunjukkan pengaruh pengontrol $u(t) = -Kx(t)$ dalam gerak putar dari sistem. Dari gambar tersebut terlihat bahwa gerak putar dari sistem dapat distabilkan ke titik asal setelah detik 16 detik.



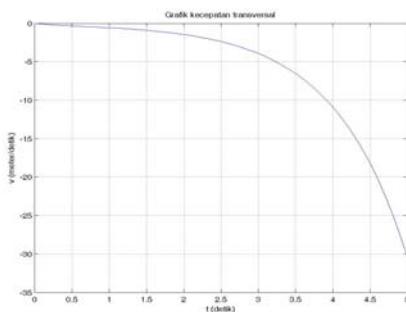
Gambar 5. gerak putar sistem
tanpa kontrol

Gambar 4. gerak transfersal sistem
dengan kontrol

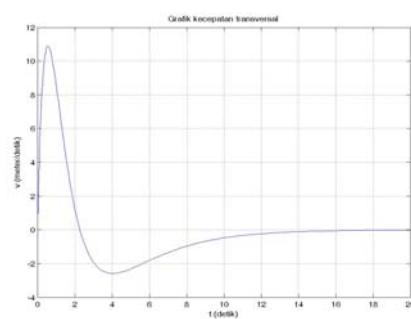


Gambar 6. gerak putar sistem
dengan kontrol

Gambar 7. dan 8. menunjukkan pengaruh pengontrol $u(t) = -Kx(t)$ dalam kecepatan transfersal dari sistem. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kecepatan transfersal dari sistem dapat distabilkan ke titik asal setelah detik 16 detik.

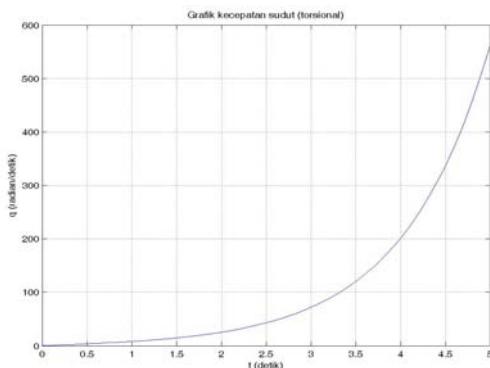


Gambar 7. kecepatan transfersal sistem
tanpa kontrol

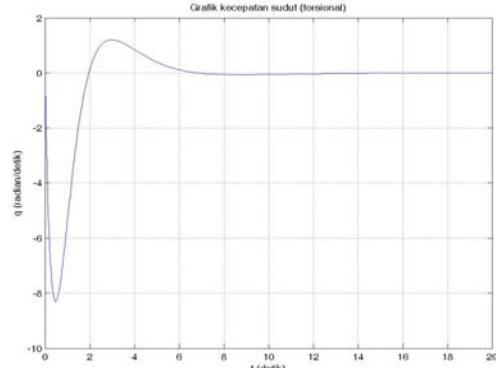


Gambar 8. kecepatan transfersal
dengan kontrol

Gambar 9. dan 10. menunjukkan pengaruh pengontrol $u(t) = -Kx(t)$ dalam kecepatan putar dari sistem. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kecepatan putar dari sistem dapat distabilkan ke titik asal setelah detik 8 detik.



Gambar 9. kecepatan putar sistem tanpa kontrol



Gambar 10. kecepatan putar sistem dengan kontrol

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa desain pengontrol yang dibuat pada sistem *inverted pendulum* dapat menstabilkan sistem tersebut untuk tetap berada di titik asal.

5. Kesimpulan

Dalam malakah ini telah dikaji desain pengontrol pada sistem *inverted pendulum* yang menstabilkan sistem tersebut dengan meminimumkan tenaga listrik yang disuplaikan pada kereta. Pengaruh kerja pengontrol dalam menstabilkan sistem juga telah disajikan melalui simulasi hasil peritungan. Namun demikian, permasalahan dalam kajian ini masih cukup sederhana. Sehingga pengembangan permasalahan seperti menstabilkan pendulum di atas kereta yang sedang dalam posisi bergerak atau permasalahan yang lainnya dapat menjadi bahan kajian lebih lanjut.

6. Referensi

- [1] Astrom, K. J., Futura, K., (2000), Swinging up a Pendulum by Energy Control, *Automatica*, Vol. 36 pp 287 – 295.
- [2] Earl, M.G., D'Andrea, R., (2005), Design and Implementation of a Minimum Time Translation for an Inverted Pendulum, *Proceeding of the Asian Conference of Industrial Automation and Robotic*, Bangkok.
- [3] Lewis, F. L., Syrmos, V. L., (1995), *Optimal Control*, John Wiley and Sons, pp 170 – 174.
- [4] Olsder, G. J., (1994), *Mathematical Systems Theory*, 1994, Delftse Ultgevers Maatschappij, Netherland, pp 13 – 16.