S-31

SUATU MODEL HARGA OBLIGASI

Lienda Noviyanti*

*Staf pengajar jurusan Statistika FMIPA - Universitas Padjadjaran, Bandung.

Uang merupakan sebuah komoditas, sedangkan tingkat bunga adalah biaya dari uang. Uang sebagai modal membiayai pertumbuhan suatu negara. Biasanya, modal ini harus dipinjam. Peminjaman uang ini dapat dilakukan melalui pasar obligasi (*bond*). Obligasi memberikan manfaat baik bagi peminjam maupun investor, serta melibatkan sejumlah uang yang sangat besar, sehingga penentuan harga obligasi sangatlah penting. Suatu model yang baik dibutuhkan untuk menentukan harga obligasi. Harga obligasi bergantung dari tingkat bunga yang nilainya berubah-ubah, sehingga nilai tingkat bunga pada masa yang akan datang tidak diketahui dengan pasti. Penelitian ini membentuk model untuk menentuan harga obligasi dengan kupon, yang didasarkan pada *yield curve*, dengan tingkat bunga diasumsikan mengikuti gerak Brown.

Kata kunci: *yield curve*, gerak Brown, obligasi dengan kupon.

1. PENDAHULUAN

Obligasi (*bond*) adalah instrumen utang yang mewajibkan penerbit obligasi (peminjam utang) untuk membayar utang kepada investor (pemberi utang) sejumlah yang dipinjam ditambah bunga untuk periode tertentu. Obligasi memiliki risiko cukup besar karena merupakan suatu investasi jangka panjang yang nilainya bergantung pada perubahan tingkat bunga, kondisi perusahaan penerbit obligasi dan juga kondisi ekonomi nasional. Penentuan harga obligasi menjadi sangat penting karena besarnya jumlah uang yang diinvestasikan dalam obligasi sehingga perubahan sedikitpun pada tingkat bunga akan sangat berpengaruh pada harga obligasi. Harga tersebut haruslah wajar (*fair)* baik bagi penerbit maupun pembeli obligasi. Hal ini berarti bahwa harga

 ISBN: 978-979-16353-3-2

tersebut tidak terlalu mahal juga tidak terlalu murah. Bila terlalu mahal, pembeli akan enggan untuk membeli, sedangkan bila terlalu murah, tidak akan ada pihak yang akan menerbitkan dan menjualnya. Untuk itu perlu dibuat suatu model untuk menentukan harga obligasi tersebut. Masalah utama dalam menentukan harga obligasi adalah tidak diketahuinya fluktuasi tingkat bunga pada masa mendatang. Penentuan harga ini dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menentukan *yield curve*, yaitu hubungan antara waktu jatuh tempo obligasi dan tingkat bunga. Dengan kata lain *yield* merepresentasikan tingkat tahunan yang harus dibayar hari ini untuk sebuah obligasi yang jatuh tempo dalam sejumlah tahun mendatang.

Pemodelan tingkat bunga dapat dibentuk melalui dua pendekatan, yaitu model-model deret waktu (*times series models*) dan model-model tingkat bunga derivatif (*interest rate derivatives models*). Pada dasarnya, model-model deret waktu bersifat umum. Produksi minyak bumi, persediaan suatu barang, harga saham atau tingkat bunga dapat dimodelkan dengan model-model deret waktu. Perkembangan analisis kuantitatif finansial yang tumbuh dengan pesat menggunakan konsep stokastik seperti *martingales* untuk menangkap perilaku ekonomi antara lain *the absence of arbitrage opportunity* atau *no-arbitrage* dan *equilibrium theory* (Brigo, 2001; Lamberton et al, 2000; dan Stampfli, 2001. Konsep dasar model-model tersebut adalah Brownian Motion atau Gerak Brown. Pada penelitian ini tingkat bunga diasumsikan mengikuti *Brownian Motion* dalam menentukan harga obligasi dengan kupon. Dengan menggunakan Lemma Ito dapat diperlihatkan hubungan antara harga obligasi dengan perubahan tingkat bunga jangka pendek dan waktu.

Struktur penyajian hasil penelitian ini adalah sebagai berikut; (1) pendahuluan, (2) studi pustaka, (3) model harga obligasi, serta diakhiri dengan (4) penentuan harga obligasi sebagai kesimpulan.

 ISBN: 978-979-16353-3-2

2. STUDI PUSTAKA

Obligasi adalah instrumen hutang yang mewajibkan penerbit (peminjam uang) untuk membayar hutang kepada investor (pemberi hutang) sejumlah yang dipinjam ditambah bunga untuk periode waktu tertentu. Tanggal di mana pokok pinjaman harus dibayar disebut tanggal jatuh tempo (*maturity time*). Obligasi diterbitkan dengan spesifikasi yaitu (1) tanggal tetap pada saat pinjaman (pokok pinjaman) jatuh tempo dan (2) tingkat bunga, yang biasa dibayarkan setiap enam bulan. Obligasi dapat diterbitkan oleh pemerintah pusat, pemerintah daerah dan perusahaan (domestik atau asing).

Zero coupon bond (*discount bond*) merupakan suatu perjanjian di mana satu pihak akan membayar sejumlah uang pada saat jatuh tempo tanpa pembayaran keuntungan (*coupon*). Di dalam perjanjian ini tidak ada risiko ataupun kegagalan dalam pembayaran. Harga dari *zero coupon bond* merupakan fungsi $P(t,T)$, dengan *t* menyatakan waktu pada saat itu dan *T* adalah waktu pada saat jatuh tempo. Selang waktunya adalah $\tau = T - t$. Dengan pembayaran pada saat waktu jatuh tempo (*maturity time*) adalah \$1, maka harga obligasi pada saat waktu jatuh tempo adalah $P(T,T) = 1$.

Harga dari suatu obligasi sebenarnya merupakan (*present value*) dari pembayaran akhir, yakni :

$$P(t,T) = \frac{1}{e^{y(t,T)(T-t)}}. \tag{1}$$

Zero coupon rate atau *yield to maturity* dinotasikan sebagai $y(t,T)$ merupakan tingkat bunga yang diasumsikan akan terbagi-bagi pembayarannya (*continuously compounded*). Dengan mengambil logaritma dari persamaan (1), persamaan *zero coupon rate* adalah

$$y(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}. \tag{2}$$

 ISBN: 978-979-16353-3-2

Yield curve ditentukan dengan melihat hubungan-hubungan antara *discount curve, forward curve*, dan *yield curve* (Hull, 1993; Hull and White, 1993).

- Hubungan antara *yield curve* dan *discount curve*

  Dari *yield curve* bisa diperoleh *discount curve*

$$P(t,T) = e^{y(t,T)(T-t)}. \tag{3}$$

- Hubungan antara *yield curve* dan *forward curve*

  Dari *discount curve* ini bisa diperoleh *forward curve*

$$f(t,T) = -\frac{P'(t,T)}{P(t,T)}. \tag{4}$$

- Hubungan antara *yield to maturity* dengan *forward rate* dapat dinyatakan oleh

$$y(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_0^{\infty} f(u)du. \tag{5}$$

  yang menyatakan *yield* sebagai rata-rata dari *forward rate*.

Persamaan terakhir merupakan tingkat bunga pada waktu *t>0* dilihat pada saat ini yang selanjutnya akan dinotasikan dengan *r(t)*. Sesuai dengan *yield curve*, pasar obligasi memberikan tingkat bunga untuk periode *(0,t)*. Jadi pasar menentukan *forward rate* melalui *yield curve.*

Nilai dari obligasi $P(t,T)$ bergantung dari *T* (waktu jatuh tempo), *t*, dan *r(t)*, tingkat bunga jangka pendek. Lemma Ito memperlihatkan hubungan antara perubahan harga obligasi dengan perubahan tingkat bunga jangka pendek dan waktu.

Misal $P(t,T)$ merupakan fungsi dari suku bunga jangka pendek *r(t)* dan waktu *t*. Proses Ito mengikuti persamaan perubahan tingkat bunga, dengan μ dan σ merupakan fungsi dari *r* dan *t,* yakni;

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dB, \tag{6}$$

dengan $B \sim N(0,dt)$ merupakan gerak Brown.

 ISBN: 978-979-16353-3-2

Selanjutnya akan ditentukan dP dengan menggunakan deret Taylor dan asumsi bahwa *P* differensiabel diperoleh;

$$dP(t,T) = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}dr^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t}dr\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}dt^2 + \cdots \tag{7}$$

Dengan mensubsitusikan (6) ke (7) diperoleh Lemma Ito yang berbentuk;

$$dP(t,T) = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial P}{\partial r}dB \tag{8}$$

3. MODEL HARGA OBLIGASI

Persamaan (8) dapat dituliskan kembali sebagai

$$dP(t,T) = \mu(t,T)dt + v(t,T)dB. \tag{9}$$

Selanjutnya bentuk portofolio yang terdiri dari dua obligasi dengan kupon, dengan tanggal jatuh tempo yang berbeda yaitu T_1 dan T_2. Misalkan harga kedua obligasi tersebut masing-masing P_1 dan P_2, maka portofolio tersebut adalah

$$\pi = P_1 - \Delta P_2;\ \ d\pi = dP_1 - \Delta dP_2;\ \ P_1 = P(t,T_1);\ \ P_2 = P(t,T_2). \tag{10}$$

Substitusi dP_1 dan dP_2 dari persamaan (10) ke persamaan (9) maka diperoleh $d\pi = (u_1 - \Delta u_2)dt + (v_1 - \Delta v_2)dB.$ Dengan mengambil $\Delta = v_1/v_2$, didapat

$$d\pi = (u_1 - \Delta u_2)dt \tag{11}$$

Oleh karena π berperilaku seperti investasi di pasar uang, return yang dihasilkan harus sesuai dengan tingkat bunga jangka pendek. Misalkan K_1 dan K_2 masing-masing menyatakan kupon untuk obligasi dengan tanggal jatuh tempo T_1 dan T_2, mak

$$d\pi = (r\,\pi - K_1 + \Delta K_2)dt.$$

Substitusi $d\pi$ ke persamaan (11) akan menghasilkan

 ISBN: 978-979-16353-3-2

$$\frac{1}{v_1}(u_1 - r\,P_1 + K_1) = \frac{1}{v_2}(u_2 - r\,P_2 + K_2).$$

Oleh karena ruas kiri pada persamaan terakhir hanya mengandung suku-suku yang bergantung pada T_1 dan ruas kanan pada persamaan terakhir hanya mengandung suku-suku yang bergantung pada T_{12} maka

$$\lambda(t,r) = \frac{u(t,T) - r(t,T)P(t,T) + K(t,r)}{v(t,T)}$$

tidak bergantung pada *T*. Notasi λ menyatakan harga pasar dari risiko dan dapat dituliskan kembali sebagai

$$u(t,T) = rP(t,T) + \lambda v(t,T) - K(t,r).$$

Selanjutnya, kembalikan nilai *u* dan *v* dari persamaan (9) sehingga diperoleh persamaan diferensial untuk harga obligasi sebagai berikut

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP + \lambda\sigma\frac{\partial P}{\partial r} - K$$

atau

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = -Cr, \tag{12}$$

dengan $K = Cr$.

Persamaan (12) merupakan persamaan diferensial parsial tak homogen. Solusi dari persamaan tersebut adalah $P = P_h + P_p$ dengan P_h menyatakan solusi homogen dan P_p menyatakan solusi khusus. Solusi homogen P_h dari persamaan (12) merupakan solusi dari persamaan diferensial parsial untuk obligasi tanpa kupon (Noviyanti, 2006) $\frac{\partial P}{\partial t} + a\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$ dan $P(t,T) = e^{-\left[(T-t)r - \frac{a}{2}(T-t)^2\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right]}$, yakni

$$P_h = exp[A(t)r + B(t)]$$

dengan $A(t) = (T-t)$ dan $B(t) = -\frac{a}{2}(T-t)^2\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3.$

Misalkan $P_p = k$, substitusi ke persamaan (12) maka $k = C$. Jadi solusi untuk persamaan (12) adalah

$$P = exp\,[\,A\,r + B\,] + C \tag{13}$$

4. PENENTUAN HARGA OBLIGASI

Setiap obligasi dengan kupon mempunyai yield saat ini, $Y(t)$, yang dihitung dari harga pasar saat ini

$$Y(t) = \frac{-\ln(P)}{T-t}.$$

Berdasarkan persamaan (13) model harga obligasi dengan kupon adalah

$$P(t,T) = exp\left\{-(T-t)r - \frac{a}{2}(T-t)^2\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right\} + C, \tag{13}$$

sehingga

$$Y(t,T) = \frac{-ln\left(exp\left\{-(T-t)r - \frac{a}{2}(T-t)^2\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right\} + C\right)}{T-t} \tag{14}$$

Persamaan tersebut dapat dihampiri dengan polinom berderajat tertentu, misal *3*, dalam *T*, sehingga diperoleh

$$Y(0,T)\,T = -\ln(1+C) + \frac{r_0}{1+C}T - \left(\frac{-a+r_0^2}{2(1+C)} - \frac{r_0^2}{2(1+C)^2}\right)T^2 - \left(\frac{\frac{1}{6}\sigma^2 + \frac{1}{2}r_0 a - \frac{1}{6}r_0^3}{1+C} + \frac{r_0(-a+r_0^2)}{6(1+C)^2} + \frac{(-a-aC+r_0^2C)r_0}{3(1+C)^3}\right)T^3$$

Parameter-parameter a, σ^2 dan C dapat diperoleh dari observasi data pasar pada suatu tanggal tertentu.

 ISBN: 978-979-16353-3-2

DAFTAR PUSTAKA

1. Brigo, D. and Mercurio, F., 2001, *Interest Rate Models, Theory and Practice*, Springer-Verlag, Germany.
2. Hull, J. C. 1993. *Options, Future and Other Derivative Securities*. 2^{nd} ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. Hull, J. and A. White, 1993, " The Pricing of Options on Interest-Rate Caps and Floors Using the Hull-White Model, *The Journal of Financial Engineering* Volume 2, Numer 3, Pages 287-296.
4. Lamberton, D., and Lapeyre, B., 2000, *Introduction to Stochastic Calculus, Applied to Finance*, Chapman&Hall, UK.
5. Noviyanti, L., 2006, *Tingkat Bunga Stokastik dalam Kontrak Asuransi Jiwa*, Disertasi, Institut Teknologi Bandung, tidak dipublikasikan.
6. Stampfli, J. and Goodman, V., 2001, *The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging*, Brooks/Cole, Thomson Learning, USA.