

**Uji Alternatif Data Terurut
Perbandingan antara Uji Jonckheere Terpstra dan Modifikasinya**

Ridha Ferdhiana¹

Statistics Peer Group

Jurusan Matematika FMIPA

Universitas Syiah Kuala

Banda Aceh, Aceh , 23111

email: ridha.ferdhiana@gmail.com

Abstrak

Uji alternatif terurut merupakan uji yang ingin mengetahui apakah ukuran nilai tengah beberapa kelompok mengikuti urutan tertentu atau tidak. Uji untuk alternatif terurut yang paling utama adalah uji Jonckheere-Terpstra (JT). Modifikasi uji JT (MJT) diperkenalkan oleh Tryon dan Hettmansperger dan Neuhauser mengatakan uji MJT lebih baik dari JT karena distribusinya lebih panjang. Penelitian ini melakukan simulasi untuk mengetahui power uji JT dan MJT. Kombinasi dari 9 distribusi, enam urutan nilai tengah, dan tiga kombinasi banyak sampel dilakukan untuk pengujian tiga, empat, dan lima kelompok. Hasil penelitian menunjukkan bahwa uji MJT tidak lebih baik dari uji JT.

Kata kunci : alternatif terurut, uji Jonckheere Terpstra, Modifikasi Jonckheere Terpstra

Pendahuluan

Seringkali suatu penelitian ingin mengetahui secara serentak apakah terdapat perbedaan letak ukuran nilai tengah pada beberapa kelompok dibandingkan apakah letak ukuran nilai tengah mengikuti suatu ukuran tertentu. Pengujian yang pertama merupakan uji yang biasa diselesaikan menggunakan uji analisis ragam (anova) atau uji Kruskal Wallis. Pengujian yang kedua disebut uji alternatif data terurut. Pada uji alternatif terurut, hipotesis seharusnya dibangun atas dasar bagaimana perlakuan diberikan dan bukan berdasarkan pada sampel yang didapatkan [1]. Peneliti tidak

seharusnya menetapkan hipotesis setelah data dikumpulkan dan ditelaah tapi hipotesis seharusnya ditetapkan dulu baru kemudian data dikumpulkan.

Uji untuk alternatif terurut yang paling utama adalah uji Jonckheere-Terpstra (JT), yang diperkenalkan oleh Jonckheere dan Terpstra [2][3]. Uji statistik dari uji JT adalah penjumlahan uji statistik Mann-Whitney (MW) untuk setiap kombinasi pasangan dari k-populasi tersebut, dimana k adalah banyaknya kelompok. Statistik MW sendiri seringkali disebut sebagai statistik U yang merupakan statistik untuk mengukur apakah dua kelompok berbeda satu sama lain [4].

Bewick dkk [5], menyatakan bahwa uji JT lebih tepat digunakan pada perlakuan yang terurut. Dalam artikelnya mereka menunjukkan bahwa uji statistik yang lain hanya mampu menunjukkan bahwa data lamanya waktu tinggal diruang ICU pada pasien yang mengalami kecelakaan, mempunyai masalah medis, dan pasien yang menjalani operasi syaraf adalah berbeda. Namun, tidak bisa diambil kesimpulan apakah waktu tinggal mereka dalam ruang ICU bertambah sesuai dengan tingkatan resiko yang dihadapi pasien setelah mengalami tiap perlakuan diatas. Pernyataan ini juga dikuatkan oleh Mehotcheva [6] yang merekomendasikan uji JT jika alternatif hipotesis yang ingin diteliti adalah data terurut.

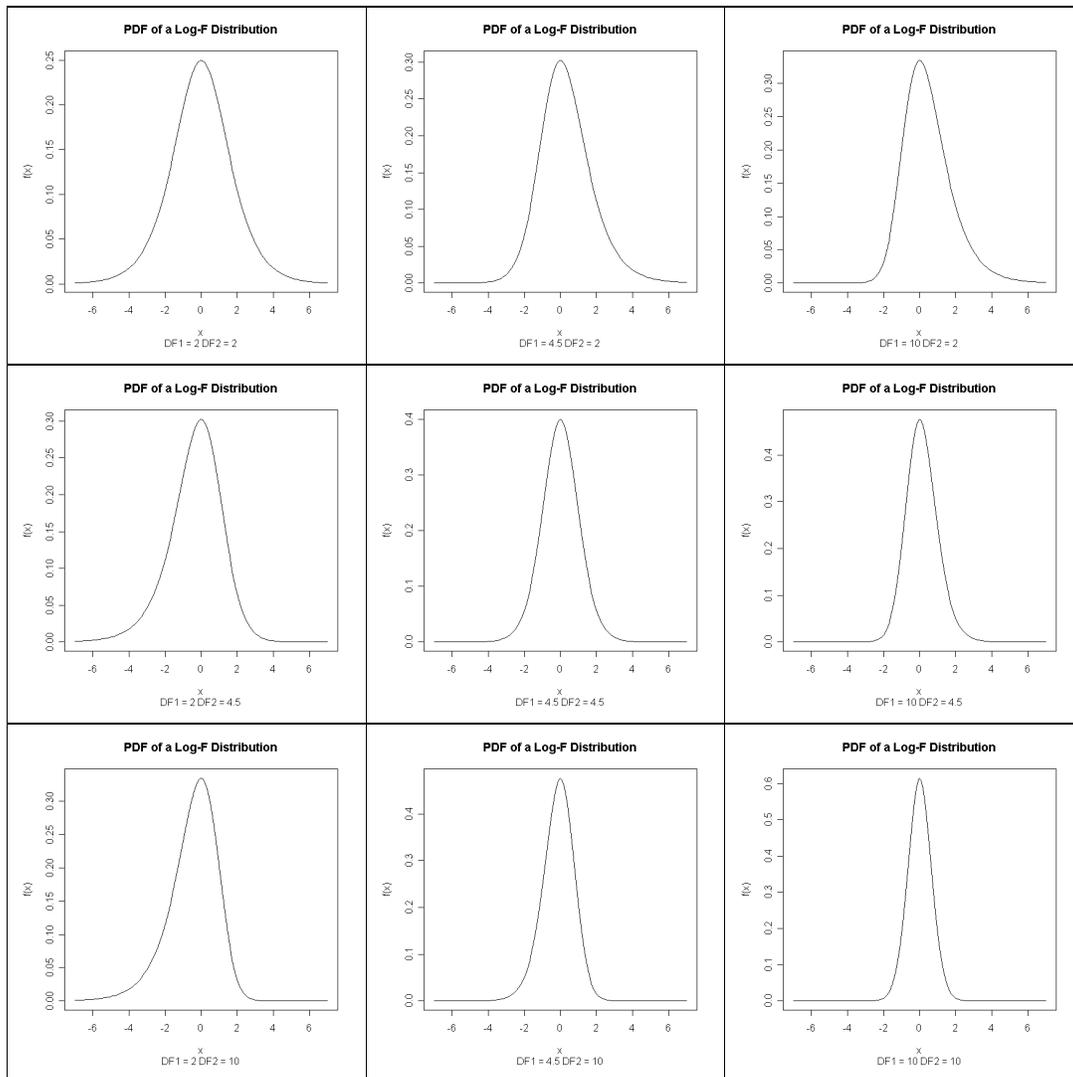
Tyron dan Hettmansperger, pada tahun 1987, mengusulkan sebuah uji yang merupakan modifikasi dari uji JT [7]. Usulan mreka adalah menambahkan bobot pada setiap statistik-U yang merupakan bagian dari uji JT. Bobot yang mereka usulkan adalah beda urutan dari populasi yang diujikan, misal pebandingan antara kelompok pada urutan pertama dan kedua mendapat bobot 1, sedangkan kelpompok satu dan tiga mendapat bobot 2. Uji ini bisa digambarkan sebagai uji JT dengan bobot. Uji modifikasi JT ini dikenal dengan istilah uji Modified Jonckheere Terpstra (MJT). Neuhauser [8] menyatakan bahwa uji MJT lebih baik dari uji JT karena mempunyai distribusi yang lebih panjang, namun mereka tidak melaporkan bagaimana power MJT dibandingkan JT pada berbagai macam jumlah data pada tiap kelompok. Namun, perhitungan varians dan rataannya sebenarnya pada uji MJT lebih rumit daripada uji JT karena varians dan rataannya selalu berbeda ketika kombinasi banyak sampel yang

digunakan berbeda. Sebagai contoh, varians dari kombinasi banyak sampel 3,4, dan 5 pada pengujian untuk tiga kelompok, akan berbeda dengan kombinasi banyak sampel 4, 3, dan 5. Sedangkan pada uji JT, varians dari kedua kombinasi banyak sampel diatas akan sama nilainya.

Tujuan dari penelitian ini adalah melakukan simulasi Monte Carlo dengan menggunakan perangkat lunak R [9] untuk mengetahui power dari uji JT dan uji MJT. Simulasi yang dilakukan akan menggunakan beberapa distribusi, antara lain skew kiri dan kanan serta simetri, beberapa jumlah sampel yang berbeda-beda untuk tiap-tiap kelompok, serta beberapa tingkatan pertambahan nilai tengah yang berbeda-beda juga diteliti. Dengan demikian akan bisa diambil kesimpulan pada situasi yang bagaimana uji JT dan MJT lebih unggul satu sama lain. Manfaat yang bisa dipakai adalah suatu acuan pada saat yang bagaimana kita harus menggunakan uji JT atau MJT berdasarkan power yang didapat dari penelitian.

Metode Penelitian

Simulasi yang dilakukan menggunakan sembilan distribusi yaitu tiga distribusi yang skew kiri, tiga yang skew kanan, dan tiga distribusi yang simetri. Distribusi-distribusi tersebut dibangkitkan menggunakan logF distribusi dan memakai kombinasi derajat kebebasan 2, 4.5, dan 10. Semakin kecil derajat kebebasan yang dipakai, semakin besar ragam (variants) yang terjadi. Distribusi logF yang menggunakan derajat kebebasan 4.5 dan 4.5 akan mendekati distribusi standar normal. Gambar 1 dibawah adalah ilustrasi distribusi-distribusi yang dipakai. Ketika derajat kebebasan pertama lebih dari derajat kebebasan kedua, maka distribusi akan menjadi skew kiri. Distribusi akan simetri ketika kedua derajat kebebasannya sama, sedangkan skew kanan ketika derajat kebebasan pertama kurang dari yang kedua.



Gambar 1. Ilustrasi distribusi-distribusi yang dipakai dalam simulasi.

Perhitungan power akan dilakukan dengan membangkitkan data acak sebanyak lima ribu kali untuk setiap kombinasi distribusi dan banyak sampel, serta ukuran-ukuran nilai tengah, kemudian akan dilakukan uji dengan menggunakan uji-z. Pengujian dengan uji-z dilakukan karena distribusi dari uji JT dan MJT adalah simetri dan dengan hukum angka besar (Large Law Number) distribusinya akan mendekati standar normal jika dikurangi dengan rataan dan dibagi dengan akar positif dari varians sebenarnya. Tingkat kesalahan yang dihitung adalah 0.05, sehingga setiap nilai z yang didapat akan dibandingkan dengan -1.959964 atau 1.959964 karena kita melakukan uji

dua arah. Setiap kali H_0 ditolak akan diberi nilai satu, kalau tidak diberi nilai nol. Power merupakan penjumlahan berapa kali H_0 ditolak dibagi banyaknya simulasi yang dilakukan yang dalam penelitian ini sebanyak 5000 kali

Rataan dan varians sebenarnya dari uji JT dan MJT bisa didapatkan dengan rumus-rumus berikut:

$$E_0(T_{JT}) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{(n_i n_j)}{2} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \sum_{i \neq j}^k n_i n_j = \frac{1}{4} \left[N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2 \right]$$

$$V_0(T_{JT}) = \text{var} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k U_{ij} \right) \\ = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \text{var}(U_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{t=s+1}^k \text{cov}(U_{ij}, U_{st})$$

$$E_0(T_{MJT}) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (j-i) U_{ij}$$

$$V_0(T_{JT}) = \text{var} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (j-i) U_{ij} \right) \\ = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (j-i) \text{var}(U_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{t=s+1}^k (j-i)(t-s) \text{cov}(U_{ij}, U_{st})$$

dimana U bisa didapatkan sebagai berikut:

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi(X_i, Y_j) \quad , \quad \varphi(X_i, Y_j) = \begin{cases} 1, & \text{jika } X_i < Y_j \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Hasil dan Pembahasan

Tiga tabel 1, tabel 2, dan tabel 3 menyajikan power dari uji JT dan MJT dari hasil simulasi. Power untuk tiga kelompok disajikan di tabel 1, untuk empat kelompok disajikan dalam tabel 2, dan tabel tabel 3 menyajikan untuk lima kelompok.

Untuk tiga kelompok, distribusi yang disajikan adalah skew kiri dengan varians besar dan kombinasi banyak sampel untuk tiap kelompok adalah 5, 10, dan 10 yang artinya banyak data untuk kelompok satu adalah 5, kelompok dua adalah 10, dan kelompok tiga adalah 10. Terlihat bahwa power dari kedua uji tidak menunjukkan superioritas satu sama lain. Saat perubahan nilai tengah adalah sama, uji MJT tidak mampu menunjukkan bahwa power yang dipunyainya lebih besar dari uji JT. Ketika penambahan nilai tengah tidak lagi sama, terlihat uji JT lebih besar powernya.

Tabel 1. Power untuk tiga kelompok, distribusi skew kiri.

$n_1, n_2, n_3 = 5, 10, 10$		
μ_1, μ_2, μ_3	JT	MJT
0.00 0.50 1.00	0.427	0.430
0.00 1.00 2.00	0.875	0.870
0.00 1.25 1.50	0.542	0.572
0.00 1.00 1.00	0.267	0.289
0.00 0.00 1.00	0.523	0.499
0.00 0.25 1.50	0.745	0.721

Tabel 2 menyajikan power untuk empat kelompok dengan distribusi simetri dengan varians kecil dan kombinasi banyak sampel untuk tiap kelompok adalah 5, 10, 10, dan 15. Terlihat dari tabel ini, power uji MJT sedikit lebih besar dibanding uji JT untuk berbagai kombinasi penambahan nilai tengah untuk tiap kelompok. Pada saat penambahan nilai tengah tidak sama, power uji JT hanya berbeda sangat kecil dibanding uji MJT.

Tabel 2. Power untuk empat kelompok, distribusi simetri dengan varians kecil

$n_1, n_2, n_3, n_4 = 5, 10, 10, 15$			
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$	JT	MJT	
0.00 0.50 0.75 1.00	0.875	0.890	
0.00 0.25 0.50 0.75	0.776	0.782	
0.00 0.75 1.00 1.25	0.939	0.957	
0.00 0.25 0.75 1.50	1.000	1.000	
0.00 0.75 1.25 1.50	0.993	0.996	
0.00 0.75 1.00 1.50	0.998	0.999	

Power dari uji MJT terlihat lebih besar dari uji JT ketika pertambahan nilai tengah adalah sama pada lima kelompok dengan distribusi skew kanan dan varians kecil dimana kombinasi banyak sampel untuk tiap kelompok adalah 5, 5, 5, 10, dan 10 . Namun beberapa power MJT terlihat kalah dari uji JT ketika pertambahan nilai tengah berbeda.

Tabel 3. Power untuk lima kelompok, distribusi simetri varians kecil.

$n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 = 5, 5, 5, 10, 10$				
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$	JT	MJT		
0.00 0.25 0.50 0.75 1.00	0.718	0.746		
0.00 0.75 1.00 1.25 1.50	0.900	0.926		
0.00 0.25 0.50 0.75 1.50	0.970	0.957		
0.00 0.75 1.25 1.50 1.75	0.969	0.979		
0.00 0.50 0.75 1.00 1.75	0.987	0.978		
0.00 0.25 1.00 1.50 1.75	0.988	0.993		

Kesimpulan

Uji MJT tidak lebih baik dari uji JT walaupun untuk beberapa kasus terlihat bahwa powernya lebih besar dibanding uji JT. Untuk pengujian alternatif data terurut, berdasarkan dari penelitian ini, lebih baik digunakan uji JT karena perhitungan rata-rata dan varians sebenarnya yang sederhana dan bersifat universal (sama untuk setiap kombinasi banyak sampel tiap kelompok).

Daftar Pustaka

- [1] Hollander, M. dan Wolfe, D.A., 1999, "Nonparametric Statistical Methods," 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc., a Wiley-Interscience Publication, New York,.
- [2] Jonckheere, A.R., 1954, "A Distribution Free k-sample Test Against Ordered Alternatives," *Biometrika*, vol. 41, pp.133-145.
- [3] Terpstra, T., 1952, "The Asymptotic Normality and Consistency of Kendall's Test Against Trend when Ties are Present in One Ranking," *Indagationes Mathematicae*, vol. 14, pp.327-333.
- [4] Koroljuk, V.S., dan Borovskich, Yu. V., 1994, "Theory of U-Statistics," Dordrecht Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [5] Bewick, V., Cheek, L., dan Ball, J., 16 April 2004, "Statistics review 10: Further nonparametric methods" *Critical Care Vol 8 No 3*, online at <http://ccforum.com/content/8/3/196>.
- [6] **Mehotcheva, T. H.**, 23 April 2008, "The Kruskal Wallis Test", Seminar in Methodology & Statistics. University of Groningen, Netherland.
- [7] Tryon, V. P. dan Hettmansperger, T. P., 1987, "A Class of Nonparametric Tests for Homogeneity Against Ordered Alternatives," *Annals of Statistics* 1, pp. 1061-1070.

[8] Neuhauser, M., Liu, P.Y., dan Hothorn, L.A., 1998, "Nonparametric Tests for Trend: Jonckheere's Test, a Modification and Maximum Test," *Biometrical Journal*, vol. 40(8), pp. 899-909.

[9] W. N. Venables and D. M. Smith, "An Introduction to R, Notes on R : A Programming Environment for Data Analysis and Graphics", Version 2.0.1, 15 September 2004.