ISBN: 978-979-16353-3-2

S-6

Menentukan Statistik Pengujian Untuk Eksperimen Faktorial dengan Dua Kali Pembatasan Pengacakan

Oleh : Enny Supartini

Jurusan Statistika FMIPA Universitas Padjadjaran Bandung

e-mail : arthinii@yahoo.com

Abstrak

Dalam eksperimen faktorial apabila pengacakan tidak bisa dilakukan sepenuhnya karena replikasi tidak bisa dilakukan dalam kondisi yang sama maka replikasi dijadikan sebagai blok dan apabila terjadi lagi keterbatasan lainnya yaitu tidak bisa dilakukan pengacakan dalam blok karena masing-masing blok dibagi lagi kedalam beberapa kelompok yang disebut sebagai plot, kemudian plot dibagi lagi kedalam beberapa kelompok yang disebut split plot sehingga dalam analisis variannya untuk melakukan pengujian hipotesis perlu ditentukan statistik pengujian yang tepat sesuai dengan desaian eksperimen yang digunakan

Kata kunci : Analisis varians, ekspektasi kuadrat tengah, statistik uji.

1. Pendahuluan

Rancangan suatu eksperimen dibuat supaya eksperimen yang dilakukan akan memberikan informasi yang dibutuhkan untuk pengkajian permasalahan tersebut dan ketika kita memilih satu desain eksperimen maka harus dipastikan bahwa rancangan tersebut tepat untuk permasalahan yang diteliti. Untuk memberikan hasil yang baik maka ketika eksperimen itu dilakukan harus sesuai benar dengan desain yang dipilih, apabila dalam pelaksanaannya terjadi keterbatasan maka harus ada penyesuaian-penyesuaian baik terhadap desainnya maupun terhadap analisisnya. Ketika melakukan eksperimen faktorial dan pada pelaksanyaannya terjadi keterbatasan dalam melakukan pengacakannya karena replikasi yang dilakukan tidak bisa dikondisikan homogen yang mengakibatkan pengacakan tidak bisa dilakukan sepenuhnya maka untuk hal ini replikasi dijadikan sebagai blok, kemudian terjadi lagi keterbatasan lainnya yaitu tidak bisa dilakukan pengacakan dalam blok karena blok dibagi lagi kedalam beberapa bagian yang disebut *plot,* kemudian masing-masing plot dibagi lagi kedalam beberapa bagian yang disebut *slit plot*,

 ISBN: 978-979-16353-3-2

sehingga dengan dilakukannya 2 kali pembatasan karena perubahan ini baik model matematis maupun analisis variansnya harus disesuaikan sehingga kita harus menentukan statistik pengujian yang tepat untuk melakukan analisis varians tersebut, statistik pengujian yang tepat bisa diperoleh melalui ekspektasi kuadrat tengah (*expected mean square*) dari masing-masing parameter yang terlibat dalam model matematisnya.

2. Menentukan Statistik Pengujian untuk suatu desain Eksperimen

2.1. Model matematis untuk eksperimen Faktorial dengan satu kali pembatasan pengacakan.

Dalam melakukan eksperimen faktorial apabila replikasi tidak bisa dilakukan dalam kondisi yang homogen maka replikasi dijadikan sebagai blok.

Model matematis untuk Desain Blok Acak adalah sebagai berikut :

$$Y_{kl} = \mu + R_i + \pi_l + \varepsilon_{il} \qquad \text{. . . (2.1)}$$

Dengan Y_{kl} sebagai variabel respons atau variabel yang diukur.

μ : merupakan rata-rata umum

R_i : merupakan efek blok ke-i

π_l : merupakan efek perlakuan ke-l

Untuk eksperimen fakorial dengan pembatasan pengacakan maka replikasi dijadikan sebagai blok sehingga dalam kasus ini eksperimen faktorial dalam desain blok acak, dimana pengacakan dilakukan didalam blok, secara matematis mengakibatkan pada persamaan 2.1. π_l merupakan faktorial yang misalnya terdiri dari dua faktor model matematisnya adalah :

$$\pi_l = A_i + B_j + AB_{ij} \qquad \text{. . . (2.2)}$$

sehingga persamaan (3.1) menjadi :

$$Y_{ijk} = \mu + R_i + A_j + B_k + AB_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \text{. . . (2.3)}$$

Untuk i=1,2,...a ; j=1,2,...b dan k=1,2,...r

Dengan A_i : merupakan efek faktor A taraf ke-i

 ISBN: 978-979-16353-3-2

B_j : merupakan efek faktor B taraf ke-j

AB_{ij} : merupakan efek bersama taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B

2.2. Model matematis untuk eksperimen faktorial dengan dua kali pembatasan pengacakan

Dengan menggunakan eksperimen faktorial dengan desain acak sempurna pengacakan harus dilakukan secara acak sempurna terhadap seluruh kombinasi perlakuan dan replikasi harus dilakukan dalam kondisi yang homogen dan pengacakan secara sempurna, ketika kedua persaratan ini tidak dipenuhi, baik terhadap replikasinya maupun terhadap pengacakan pada kombinasi perlakuannya maka terjadi dua kali pembatasan pengacakan dalam eksperimen faktorial. Pada bagian 2.1. terjadi pembatasan pengacakan pada replikasi dan replikasi dijadikan sebagai blok dan pengacakan dilakukan terhadap blok. Ketika pengacakan dalam blok tidak bisa dilakukan maka blok dibagi lagi menjadi beberapa bagian atau disebut split maka model matematis untuk kasus ini dibagi kedalam dua bagian yang pertama adalah blok atau plot induk dan bagian berikutnya sebagai split plot-nya seperti berikut ini :

$$Y_{ijkm} = \mu + R_i + A_j + RA_{ij} + B_k + RB_{ik} + AB_{jk} + RAB_{ijk} + \varepsilon_{m(ijk)} \qquad . . . (2.4)$$

Dengan i=1,2,...r; j=1,2,...,a dan k=1,2,...,b

Y_{ijk} adalah kekuatan daya tarik kertas pada blok ke i metode kej dan temparatur ke k

μ adalah efek rata-rata

R_i adalah efek replikasi/blok ke i

A_j adalah efek taraf ke j faktor A

RA_{ij} adalar efek bersama replikasi ke i dan taraf ke j faktor A

B_k adalah efek taraf ke k faktor B

RT_{ik} adalah efek bersama replikasi ke i dan taraf ke k faktor B

AB_{jk} adalah efek bersama taraf ke j faktor A dan taraf ke k faktor B

 ISBN: 978-979-16353-3-2

RAB_{ijk} adalah efek bersama replikasi ke i, taraf ke j faktor A dan taraf ke k faktor B

Untuk menentukan ekspektasi kuadrat tengah sacara matematis dapat diturunkan dari model matematisnya, misalnya untuk desain acak sempurna adalah sebagai berikut :

$Y_{ij} = \mu + \pi_i + \varepsilon_{ij}$

dengan i=1,2,...,a dan j=1,2,...,n

Kuadrat Tengah untuk eror atau EKT(E) merupakan estimasi untuk varians populasi yaitu Jumlah Kuadrat Eror JK(E) dibagi dengan derajat bebas (db) :

$$\frac{\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2\right]}{\sum_{i=1}^{a}\left(n-1\right)} = \frac{JK\,(E)}{N-a} \qquad \text{. . . (2.5)}$$

Maka Ekspektasi Kuadrat Tengah untuk Eror diperoleh seperti berikut :

$$\begin{aligned} EKT(E) &= E\left[\frac{JK(E)}{N-a}\right] \\ &= \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\overline{Y}_{i.}\right] \\ &= \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}\right)\right)\right] \quad \text{...(2.6)} \end{aligned}$$

Dengan menggantikan ε_{ij}^2 oleh σ^2 dan $\varepsilon_{i.}^2$ oleh $n\sigma^2$ sedangkan $E(\varepsilon_{ij})=0$ maka persamaan 3.3 menjadi :

$$\begin{aligned} EKT(E) &= \frac{1}{N-a}E\left[N\mu^2+n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+N\sigma^2N\mu^2-n\sum_{i=1}^{a}\tau_i-a\sigma^2\right] \\ &= \sigma^2 \qquad \text{... (2.7)} \end{aligned}$$

 ISBN: 978-979-16353-3-2

Dengan cara yang sama akan diperoleh Ekspektasi Kuadrat Tengah untuk parameter yang lainnya. Untuk mempermudah penentuanya dapat digunakan aturan seperti berikut.

Langkah-langkah untuk menentukan EKT adalah :

1. Buatlah tabel yang berisikan : pada baris faktor dan interaksi yang akan ditentukan
   EKT-nya, pada kolom : model faktor, banyaknya masing-masing taraf faktor dan reflikasi beserta indeksnya.
2. Isi sel yang dibentuk oleh baris dan kolom dengan banyaknya taraf faktor atau reflikasi untuk indeks yang berlainan.
3. Isi sel yang dibentuk oleh kolom, apabila indeksnya sama dengan indeks yang ada dalam tanda kurung dengan satu.
4. Isi sisa sel yang masih kosong, untuk model *fixed* dengan nol dan untuk model *random* dengan satu.
5. Tentukan EKT-nya seperti berikut :
   a. Tutup semua kolom yang indeknya sama dengan indeks baris yang akan ditentukan
   b. Tutup semua baris yang tidak mengandung indeks yang sama dengan indeks kolom yang sudah ditutup.
   c. Kalikan semua bilangan pada sel yang belum ditutup, kemudian kalikan dengan masing-masing variasi faktor pada baris yang bersangkutan.
   d. Jumlahkan semua hasil pada c.

Dengan cara seperti dijelaskan sebelumnya, maka diperoleh ekspektasi kuadrat tengah untuk model (2.4) dapat dilihat pada Tabel 2.1.

 ISBN: 978-979-16353-3-2

Tabel 2.1. Ekspektasi kuadrat tengah untuk desain faktorial dengan 2 kali pembatasan

Faktor		r A i	a T j	b T k	1 T n	EKT
Plot Induk	R_i	1	a	b	1	$\sigma^2 + ab\sigma_R^2$
	A_j	r	0	b	1	$\sigma^2 + b\sigma_{RA}^2 + \frac{rb\sum A_j^2}{a-1}$
	RA_{ij}	1	0	b	1	$\sigma^2 + b\sigma_{RA}^2$
Sub Plot	B_k	r	a	0	1	$\sigma^2 + a\sigma_{RA}^2 + \frac{ra\sum B_k^2}{a-1}$
	RB_{ik}	1	a	0	1	$\sigma^2 + a\sigma_{RA}^2$
	AB_{jk}	r	0	0	1	$\sigma^2 + \sigma_{RAB}^2 + \frac{r\sum\sum AB_{jk}^2}{(r-1)(a-1)}$
	RAB_{ijk}	1	0	0	1	$\sigma^2 + \sigma_{RAB}^2$
	ε_{ijk}	1	1	1	1	(not estimable)

Berdasarkan Ekspektasi Kuadrat Tengah seperti dapat dilihat pada Tabel 2.1 maka untuk menentukan statistik pengujian pada model tetap dibawah hipotesis nol bahwa A_j=0 benar untuk semua j maka **∑** A_j = 0 akibatnya EKT(A_j) dan EKT(RA_{ij})= σ^2 + b σ_{RA}^2 artinya EKT(A_i) = EKT (RA_{ij}) sedangkan karena RA_{ij} sebagai kekeliruan Plot induk maka EKT(A_i) = EKT (RA_{ij}) = σ^2 sehingga KT(A_j) dan KT(RA_{ij}) sebagai penaksir tak bias dari σ^2 dan dapat dibandingkan sebagai statistk uji F (Mongomery 1991), yaitu :

F = KT(A_j)/ KT(RA_{ij})

Karena JK(A_i)/ σ^2 berdistribusi Chi-square dengan db=a-1 dan JK(RA_{ij})/ σ^2 dengan db = (r-1)(a-1) maka statistik uji F pada persamaan (2.7) berdistribusi F dengan db v_1=a-1 dan v_2=(r-1)(a-1) (Mood Graybill 19)

Dengan cara yang sama dapat diperoleh statistik pengujian untuk yang lainnya.

ISBN: 978-979-16353-3-2

3. Kesimpulan

Untuk menentukan statistik pengujian dalam melakukan analisis varians pada suatu eksperimen hal yang harus diperhatikan yaitu desain yang digunakan harus sesuai dengan permasalahan dan eksperimen yang dilakukan terutama apabila dalam prakteknya terjadi keterbatasan dalam melakukan eksperimen sehingga model matematisnya akan berubah sesuai dengan permasalahan dengan semua keterbatasan yang ada, kemudian sifat taraf faktor dan ekspektasi kuadrat tengah yang diturunkan dari model matematisnya.

4. Daftar Pustaka

Box, G. P., Hunter, W. G., and Hunter J. S., (1978) *Statistical for Experimenters*, New York, John Wiley.

Hinkelmann, K. And Kempthorne (1994) *Design and Analysis of Experiment,* New York, John Wiley.

Lehmann E., (1986) *Testing Statistical Hypothesis*, New York, John Wiley.

Montgomery, Douglas C., (2001) *Design and Analysis of Experiment* 5th ed. New York, John Wiley.

Mood, A., Graybill F. A. & Boes, D.C. (1974) *Introduction to The Theori of Statistic*, New York , Mc Graw Hill.

Sudjana (1995), *Desain dan Analisis Eksperimen,* edisi 4, Bandung, PT Tarsito.

Winner, B. J., (1971) *Statistical Principle in Experimenttal Design*. New York, Mc Graw Hill.