ISBN : 978-979-16353-3-2

An.5

GLOBALLY SMALL RIEMANN SUMS (GSRS) INTEGRAL HENSTOCK-PETTIS PADA RUANG EUCLID $\mathcal{R}^n$

Globally Small Riemann Sums (GSRS) Henstock-Pettis Integral On The Eucliden Space $\mathcal{R}^n$

Hairur Rahman[1]

Abstrack. In this paper we study Henstock-Pettis integral on the Euclidean space $\mathcal{R}^n$. We discuss some properties of the integrable: Globally Small Riemann Sums (**GSRS**).

Keywords: Henstock integral, Euclidean Space $\mathcal{R}^n$, Henstock-Pettis integrable, Globally Small Riemann Sums (**GSRS**).

1 Pendahuluan

Pada tahun 1914, Perron mengembangkan perluasan lain integral Lebesgue dan menunjukkan bahwa integralnya mempunyai sifat bahwa setiap derivatifnya terintegral pada garis lurus. Selanjutnya Henstock dan Kurzweil secara terpisah mengitlakkan integral Riemann dengan mengubah konstanta positif δ menjadi fungsi positif δ dan ternyata integral yang disusun keduanya ekuivalen. Oleh karena itu, integral yang mereka susun terkenal dengan nama Henstock-Kurzweil [11].

Dari kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkapkan baik dalam $\mathcal{R}$ maupun ruang $\mathcal{R}^n$. Menurut penelitian, masalah mengenai sifat-sifat pada integral Henstock kemungkinan dapat dikembangkan menjadi masalah yang lebih luas dalam integral Henstock-Pettis, khususnya sejauh mana sifat-sifat integral Henstock dari fungsi bernilai real dapat dikembangkan ke dalam integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$. Dari kajian tentang integral Henstock-Kurzweil banyak sifat-sifat yang telah diungkapkan baik dalam $\mathcal{R}$ maupun ruang $\mathcal{R}^n$. Menurut penelitian, masalah mengenai sifat-sifat pada integral Henstock-Kurzweil [1],[2],[4],[5], kemungkinan dapat dikembangkan menjadi masalah yang lebih luas dalam integral Henstock-Kurzweil-Pettis, khususnya sejauh mana sifat-sifat integral Henstock dari fungsi bernilai real dapat dikembangkan ke dalam integral Henstock-Kurzweil-Pettis pada ruang

[1] Departement of Matemathics, The State Islamic University of Malang., **Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY**. *email.hrrrrr_math@yahoo.co.id*.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Euclide $\mathcal{R}^n$. Lebih lanjut integral Henstock-Kurzweil-Pettis pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$ akan dikembangkan pada sifat-sifat globally Small Riemann Sums (GSRS) pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$.

Definisi 1.1. [8]. *Diberikan fungsi volume α pada $\mathcal{R}^n$, sel $E \subset \mathcal{R}^n$ dan E ruang Banach. Fungsi $f : E \longrightarrow X$ dikatakan* ***terintegral-α Henstock pada E terhadap*** *α, ditulis singkat $f \in \mathcal{H}(E, \alpha, X)$ jika terdapat vektor $A \in X$ sehingga untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D_1, \bar{x}_1), (D_2, \bar{x}_2), ..., (D_n, \bar{x}_n)\}$ pada E berlaku*

$$\left\| A - (\mathcal{D}) \sum f(\bar{x})\alpha(D) \right\| = \left\| A - (\mathcal{D}) \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\alpha(D_i) \right\| < \epsilon.$$

Definisi 1.2. . [8]. *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume α pada $\mathcal{R}^n$, dan sel $E \subset \mathcal{R}^n$. Fungsi $f : E \to X$* ***dikatakan terintegral-α Henstock-Pettis pada E****, ditulis singkat dengan $f \in \mathcal{HP}(E, \alpha)$, jika untuk setiap $x^* \in X^*$ dan sel $A \subset E$, fungsi $x^* f$ terintegral-α Henstock pada A dan terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)} \in X$ sehingga*

$$x^*(x_{(f,A,\alpha)}) = (\mathcal{H}) \int_A x^* f d\alpha.$$

Selanjutnya vektor $x_{(f,A,\alpha)}$ di atas disebut nilai Integral Henstock-Pettis fungsi f pada A dan ditulis

$$x_{(f,A,\alpha)} = (\mathcal{HP}) \int_A f d\alpha,$$

khususnya

$$x_{(f,E,\alpha)} = (\mathcal{HP}) \int_E f d\alpha.$$

Jadi

$$x^* \left((\mathcal{HP}) \int_A f d\alpha \right) = (\mathcal{H}) \int_A x^* f d\alpha.$$

Teorema 1.3. (Kriteria Cauchy). [10] *Fungsi $f \in \mathcal{HP}(E, \alpha)$jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $\mathcal{D}_1 = \{(B_1, \bar{x}_1), ..., (B_p, \bar{x}_p)\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(C_1, \bar{x}_1), ..., (C_q, \bar{x}_q)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A memenuhi*

$$\left| (\mathcal{D}_1) \sum_{i=1}^{p} x^* f(\bar{x}_i)\alpha(B_i) - (\mathcal{D}_2) \sum_{k=1}^{q} x^* f(\bar{y}_k)\alpha(C_k) \right| < \epsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Definisi 1.4. *Jika $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$ dan $\mathcal{J}(E)$ koleksi semua sel bagian di dalam E maka fungsi $F : \mathcal{J}(E) \longrightarrow X$ dengan rumus*

$$F(A) = x_{(f,A,\alpha)} = (\mathcal{HP}) \int_A f d\alpha,$$

dan $F(\emptyset) = 0$, untuk setiap $A \in F(E)$ disebut fungsi **primitif-$\mathcal{HP}$** *fungsi f.*

Teorema 1.5. *Diberikan fungsi volume α di dalam $\mathcal{R}^n$ dan sel $E \subset \mathcal{R}^n$. Jika $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$ dengan f sebagai primitif-$\mathcal{HP}$nya dan $E_1, E_2, ..., E_p$ sel-sel di dalam E yang tak saling tumpang tindih dan $E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k$ maka*

$$F(E) = \sum_{k=1}^{p} F(E_k) = \sum_{k=1}^{p} x_{(f,A,\alpha)}.$$

Bukti: Karena $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$ dengan primitif-$\mathcal{HP}$ fungsi f pada E, $E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k$ dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$, diperoleh

$$\begin{aligned}
F(E) &= F\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right) \\
&= x_{(f,(\bigcup_{k=1}^{p} E_k),\alpha)} \\
&= x_{(f,E_1,\alpha)} + x_{(f,E_2,\alpha)} + ... + x_{(f,E_p,\alpha)} \\
&= F(E_1) + F(E_2) + ... + F(E_p) \\
&= \sum_{k=1}^{p} F(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{p} x_{(f,A,\alpha)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 1.2 maka integral Henstock-Pettis tehadap pada E dapat juga dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 1.6. *Fungsi $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $F : \mathcal{J}(E) \longrightarrow X$ sehingga untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ yang diberikan dan $x^* \in X^*$ dapat ditemukan fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $\mathcal{D} = \{(D,\bar{x})\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left| \sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D)) \right| < \epsilon.$$

Teorema 1.7. **(Lemma Henstock)** *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dual-nya, volume α pada $\mathcal{R}^n$ dan sel $E \subset \mathcal{R}^n$. Jika $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$ dengan primitif F, yaitu*

 ISBN : 978-979-16353-3-2

unruk setiap bilangan $\epsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapatlah fungsi positif* δ *pada* E *sehingga jika* $A \subset E$ *sel dan* $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|(\mathcal{D})\sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D))\right| < \epsilon,$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ *dan* $(\mathcal{D})\sum$ *berlaku*

$$|(\mathcal{D})\textstyle\sum_1 x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D))| < \epsilon.$$

2 Hasil dan Penbahasan

Akan dibahas sifat-sifat lanjut dari integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$, yakni memuat pembahasan yang berkaitan dengan sifat-sifat Globally Small Riemann Sums (GSRS) fungsi terintegral Henstock-Pettis pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$.

Definisi 2.1. *Diberikan* X *ruang Banach dan* X^* *ruang dualnya, volume* α *pada* $\mathcal{R}^n$*, dan sel* $E \subset \mathcal{R}^n$*, dan* $f : E \longrightarrow X$ *fungsi terukur-*α *pada sel* E*. Fungsi* f *dikatakan mempunyai sifat* ***Globally Small Riemann Sums*** *(**GSRS**) terhadap* α *pada sel* E *ditulis singkat* $f \in \boldsymbol{GSRS}(E, \alpha)$ *jika untuk setiap* $\epsilon > 0$, $x^* \in X^*$*, dan* $A \subset E$ *sel, ada bilangan asli* n_0 *sehingga untuk setiap* $n \geq n_0$ *ada fungsi positif* δ_n *pada* E *sehingga jika* $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ *partisi Perron* δ_n*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|(\mathcal{D})\sum_{|x^* f(\bar{x})|>n} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \epsilon.$$

Teorema 2.2. *Diberikan* X *ruang Banach dan* X^* *ruang dualnya, volume* α *pada* $\mathcal{R}^n$*, dan sel* $E \subset \mathcal{R}^n$*. Jika fungsi terukur-*α $f \in \boldsymbol{GSRS}(E, \alpha)$ *maka* $f \in \mathcal{HP}(E, \alpha)$*.*

Bukti: Karena $f \in \boldsymbol{GSRS}(E, \alpha)$ maka untuk setiap $\epsilon > 0$, $x^* \in X^*$ dan $A \subset E$ sel, ada bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ terdapat fungsi positif δ_n pada E sehingga jika $\mathcal{D} = \{D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ_n-fine pada A berlaku

$$\left|(\mathcal{D})\sum_{|x^* f(\bar{x})|>n} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

sehingga untuk setiap dua partisi Perron δ_n-fine $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}'$ pada A berlaku

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{D})\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - (\mathcal{D}')\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\
&\leq \left|(\mathcal{D})\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| + \left|(\mathcal{D}')\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\
&\leq \left|(\mathcal{D})\sum_{|x^* f(\bar{x})|>n} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| + \left|(\mathcal{D})\sum_{|x^* f(\bar{x})|\leq n} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\
&\quad + \left|(\mathcal{D}')\sum_{|x^* f(\bar{x})|>n} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| + \left|(\mathcal{D}')\sum_{|x^* f(\bar{x})|\leq n} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Cauchy, $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$. ■

Teorema 2.3. *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume α pada $\mathcal{R}^n$, dan fungsi bernilai real f terdifinisi pada sel $E \subset \mathcal{R}^n$. Didefinisikan fungsi $x^* f_k$ dengan*

$$x^* f_k(\bar{x}) = \begin{cases} x^* f(\bar{x}), & \text{untuk } \bar{x} \text{ dengan } |x^* f(\bar{x})| \leq k \\ 0 & , \text{untuk } \bar{x} \text{ yang lain.} \end{cases}$$

*Fungsi f terintegral-$\mathcal{HP}(E,\alpha)$ pada sel E ke $F(E)$ dan $F_k(E) \to F(E)$ untuk $k \to \infty$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi terukur bersifat **GSRS** pada sel E.*

Bukti: **(Syarat Perlu)** Karena $f \in \mathcal{HP}(E,\alpha)$ maka untuk setiap $\epsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan $A \subset E$ sel terdapat fungsi positif δ^* pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ^*-fine $\mathcal{D}^*$ pada sel A berlaku

Setiap k, terdapat fungsi positif δ^k pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ^k-fine $\mathcal{D}^*$ pada sel A berlaku

$$\left|(\mathcal{D}^k)\sum x^*(f_k(\bar{x})\alpha(D) - F_k(A))\right| < \frac{\epsilon}{3},$$

untuk setiap $x^* \in X^*$. Karena $\{F_k(A)\}$ konvergen ke F pada sel E, maka terdapat bilangan bulat positif K dengan sifat untuk setiap $k \geq K$ berlaku

$$|x^* F_k(A) - x^* F(A)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Untuk $k \geq K$, didefinisikan fungsi positif δ pada E dengan

$$\delta(\bar{x}) = \min\{\delta^*(\bar{x}), \delta^k(\bar{x})\}.$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Dengan demikian untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel A berlaku

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})|>k} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| &= \left|(\mathcal{D}) \sum (x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^* f_k(\bar{x})\alpha(D))\right| \\ &\leq \left|(\mathcal{D}^*) \sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(A))\right| + |x^* F_k(A) - x^* F(A)| \\ &\quad + \left|x^* F_k(A) - (\mathcal{D}^k) \sum x^* f_k(\bar{x})\alpha(D)\right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

(Syarat Cukup) Karena $f \in \boldsymbol{GSRS}(E, \alpha)$ maka untuk setiap $\epsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ dan $A \subset E$ sel, terdapat bilangan positif K_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq K_0$ terdapat fungsi δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_k-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel A berlaku

$$\left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})|>k} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \frac{\epsilon}{4},$$

untuk setiap $x^* \in X^*$. Fungsi f_k terintegral-$\mathcal{HP}(E, \alpha)$ untuk setiap k. Oleh karena itu untuk setiap $m, k \geq K_0$ terdapat fungsi positif δ_m dan δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_m-fine dan δ_k-fine $\mathcal{D}_m$ dan $\mathcal{D}_k$ pada sel A berlaku

$$\left|(\mathcal{D}^m) \sum x^*(f_m(\bar{x})\alpha(D) - F_m(A))\right| < \frac{\epsilon}{8},$$

$$\left|(\mathcal{D}^k) \sum x^*(f_k(\bar{x})\alpha(D) - F_k(A))\right| < \frac{\epsilon}{8},$$

untuk setiap $x^* \in X^*$. Untuk $m, k \geq K_0$, fungsi positif δ dengan $\delta(\bar{x}) = \min\{\delta_m(\bar{x}), \delta_k(\bar{x})\}$, sehingga untuk setiap $m, k \geq K_0$ terdapat fungsi positif δ pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel A berlaku

$$\begin{aligned}|x^* F_k(A) - x^* F_m(A)| &\leq \left|x^* F_k(A) - (\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})|\leq k} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\ &\quad + \left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})|>k} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| + \left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})|>m} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\ &\quad + \left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})|\leq m} x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^* F_m(A)\right| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.\end{aligned}$$

Jadi $\{x^* F_k(A)\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathcal{R}$. Karena $\mathcal{R}$ merupakan ruang lengkap maka $\{x^* F_k\}$ konvergen, katakan ke $F(A)$. Dengan demikian terdapat bilangan positif k_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq k_0$ berlaku

$$|x^* F_k(A) - x^* F(A)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Bilangan K dan fungsi δ^* berturut-turut diambil $K = \max\{K_0, k_0\}$ dan $\delta^*(\bar{x}) = \delta_K(\bar{x})$. Dengan demikian untuk setiap partisi Perron δ^*-fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{D}) \sum (x^* f(\bar{x})\alpha(D) - F(D))\right| \\
&= \left|(\mathcal{D}) \sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(A))\right| \\
&\leq \left|(\mathcal{D}) \sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F_K(A))\right| + |x^* F_K(A) - x^* F(A)| \\
&\leq \left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})| \leq K} x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F_K(A))\right| + \left|(\mathcal{D}) \sum_{|x^* f(\bar{x})| > K} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \\
&\quad + |x^* F_K(A) - x^* F(A)| \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Dari uraian di atas berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk sel $A \subset E$ di atas terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)} \in X$ sehingga

$$x^*\left(x_{(f,A,\alpha)}\right) = (\mathcal{H}) \int_A x^* f d\alpha.$$

Jadi $f \in \mathcal{HP}(E, \alpha)$. ■

Syarat $F_k(A)$ konvergen ke $F(A)$ tidak dapat dihilangkan di dalam Teorema diatas, sebab terintegralnya fungsi f pada Sel $E \subset \mathcal{R}^n$ tidak menjamin $F_k(A)$ konvergen ke $F(A)$ seperti ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 2.4. , [2]. *Diketahui sel* $E = [0,1] \times [0,1] \subset \mathcal{R}^2$ *dan fungsi* $x^* f$ *bernilai real terdefinisi pada* E *dengan*

$$x^* f(\bar{x}) = \begin{cases} m^5 \ , & \bar{x} \in \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}\right) \times \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}\right) \\ m^3 \ , & \bar{x} \in \left(\frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}, \frac{m}{(m)}\right) \times \left(\frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}, \frac{1}{m}\right) \\ 0 \ , & \bar{x} \textit{ yang lain.} \end{cases}$$

Dengan demikian $x^* f_k$ *adalah fungsi berikut*

$$x^* f_k(\bar{x}) = \begin{cases} m^5 \ , & \bar{x} \in \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}\right) \times \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}\right), \ m^5 \leq k \\ m^3 \ , & \bar{x} \in \left(\frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}, \frac{1}{m}\right) \times \left(\frac{1}{m(m+1)} + \frac{m}{(m+1)^2}, \frac{1}{m}\right), \ m^5 \leq k \\ 0 \ , & \bar{x} \textit{ yang lain.} \end{cases}$$

ISBN : 978-979-16353-3-2

Fungsi x^*f terintegral Henstock pada sel E, dan untuk sel $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)} \in X$ sehingga

$$x^*\left(x_{(f,A,\alpha)}\right) = (\mathcal{H})\int_A x^* f d\alpha.$$

Jadi f terintegral-$\mathcal{HP}$, tetapi perhatikan bahwa $F_k(A)$ tidak konvergen

$$\begin{aligned} x^*F_k(A) &= \sum_{\bar{x}\in\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m(m+1)}+\frac{m}{(m+1)^2}\right)\times\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m(m+1)}+\frac{m}{(m+1)^2}\right),\ m^5\le k} x^* f_k(\bar{x})\frac{1}{m^2(m+1)^4} \\ &\quad + \sum_{\bar{x}\in\left(\frac{1}{m(m+1)}+\frac{m}{(m+1)^2},\frac{1}{m}\right)\times\left(\frac{1}{m(m+1)}+\frac{m}{(m+1)^2},\frac{1}{m}\right),\ m^5\le k} x^* f_k(\bar{x})\frac{1}{(m+1)^4} \\ &= \sum_{i=1}^{r_k} i^5\frac{1}{i^2(i+1)^4} + \sum_{i=1}^{p_k} i^3\frac{1}{(i+1)^4} \\ &\ge \sum_{i=1}^{p_k}\frac{i^3}{(i+1)^4} \end{aligned}$$

dengan $r_k = \max\{m : m^5 \le k\}$ dan $p_k = \max\{m : m^3 \le k\}$. Diperhatikan bahwa $p_k \to \infty$ untuk $k \to \infty$. Karena $\sum_{i=1}^{p_k}\frac{i^3}{(i+1)^4} > \sum_{i=1}^{p_k}\frac{i}{(i+1)}$ dan mengingat $i+1 < (i+1)^2$ untuk setiap bilangan bulat positif i maka

$$\sum_{i=1}^{p_k}\frac{i^3}{(i+1)^4} > \sum_{i=1}^{p_k}\frac{i}{(i+1)}.$$

Karena $\sum_{i=1}^{p_k}\frac{i}{(i+1)}$ divergen maka $\{F_k(A)\}$ divergen.

References

[1] Dharmawidjaya, S., 2003, ***On The Bounded Interval Functions***, Proceedings of the International Conference 2003 On Mathematics And Its Application, SEAMS-Gadjah Mada University, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

[2] Indrati, Ch. R., 2002, ***Integral Henstock-Kurzweil pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$ berdimensi-n***, Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

[3] Gordon, R.A., 1994, ***The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock***, American Mathematical Society, USA.

[4] Guoju, Ye and Tianqing, 2001.***On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integral***, IJMMS, 25:7, Hindawi Publishing Corp. pp 467-478.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

[5] Guoju, Ye, and ,$\hat{S}$wabik.$\hat{S}$, 2001. ***The MacShane and The weak. MacShane Intergal of Banach Space Value Function Defined On*** $\mathcal{R}^n$. Mathematical Notes, Miscole, Vol, 2., No, 2., pp127-136.

[6] Guoju, Ye, and ,$\hat{S}$wabik.$\hat{S}$, 2004, ***Topics in Banach Space Integration***, manuscript in preparation.

[7] Guoju, Ye, Lee, P.Y.,Wu, Congxin, 1999, ***Convergence Theorem of The Denjoy-Bochner, Denjoy-Pettis and Denjoy-Dunford Integral***, southeast asian bulletin of mathematics, Springer-Verlag, vol 23; 135-143.

[8] Rahman, Hairur, 2005, ***Integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide*** $\mathcal{R}^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

[9] Rahman, Hairur, 2005, ***Kekonvergenan Integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide*** $\mathcal{R}^n$, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

[10] Rahman, Hairur, 2005, ***Globally Small Riemann Sums* (GSRS) *Integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide*** $\mathcal{R}^n$, Seminar Matematika IV ITS, Indonesia.

[11] Lee, P.Y., 1989, ***Lanzhou Lectures On Henstock Integration***, Word Scientific, Singapore.

[12] Lee, P.Y. dan Vborn, R., 2000, Integral : ***An Easy Approach after Kurzweil and Henstock***, Cambridge University Press.

[13] Pfeffer,W.F.,1993, ***The Riemann Approach to Integration***, Cambridge University Press, New York, USA.

[14] Royden, H.L., 1989, ***Real Analysis***, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, USA.

[15] $\hat{S}$wabik.$\hat{S}$. and Ye, Guoju.,1991. ***The Macshne and The Pettis Intergal of Banach Space Value Function Defined on*** $\mathcal{R}^n$, chzech, math journal.