ISBN : 978-979-16353-3-2

An-3

DISCOUNTED FEYNMAN KAC UNTUK MENCARI PDP PADA PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM KARYAWAN SETELAH *VESTING PERIOD*

Rudianto Artiono
Universitas Negeri Surabaya
rudianto_82@yahoo.com

Abstrak

Pada makalah ini akan membahas tentang penggunaan *Discounted Feynman Kac* untuk mencari bentuk persamaan diferensial parsial untuk menentukan harga opsi saham karyawan model *verr* setelah melewati *vesting period*.

Kata kunci: Opsi Saham Karyawan, *Discounted Feynman Kac*

A. Pendahuluan

Sistem pemberian kompensasi yang dilakukan di beberapa perusahaan di Indonesia mulai mengalami perkembangan. Kompensasi tidak hanya berupa gaji dan bonus, tapi mulai diberikan pula kompensasi yang berupa kepemilikan sebagian saham perusahaan. Kompensasi ini dikenal dengan istilah Opsi Saham Karyawan (OSK).

Pada makalah ini akan dibahas OSK model *verr* yaitu OSK yang memuat fitur-fitur yang dapat mengakomodasi kepentingan perusahaan dan karyawan seperti fitur *vesting period* (fitur masa tunggu) yaitu fitur yang membatasi karyawan dalam hal waktu penggunaan hak untuk melakukan *excercise*. *Exit rate* adalah fitur yang memperhatikan kemungkinan karyawan yang menerima OSK keluar dari perusahaan baik secara sukarela maupun karena PHK, *Reload* adalah fitur dimana penerima OSK yang telah melakukan *exercise* terhadap opsinya dapat menerima OSK yang baru dengan proporsi tertentu, dan *Reset* adalah fitur dimana jika OSK yang telah melewati masa tunggu namun tidak dilakukan *excercise* karena dalam keadaan *out of the money* maka dapat dilakukan pengaturan kembali tentang kesepakatan yang ada dalam kontrak OSK.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Secara lebih mendalam makalah ini akan membahas penggunaan *Discounted Feynman Kac* untuk mencari bentuk PDP pada penentuan harga OSK model *verr* setelah melewati *vesting period*.

B. Pembahasan

Penentuan harga OSK sangat bergantung terhadap perubahan harga saham, sehingga perlu diperhatikan model pergerakan harga saham. Dengan mengasumsikan bahwa rata-rata suku bunga adalah konstan maka model pergerakan harga saham perusahaan yang mengikuti *Geometric Brownian Motion* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q)dt + \sigma dZ_t \quad (1)$$

dengan *q* adalah deviden, adalah volatilitas, Z adalah gerak Brown standar, dan

adalah jumlah return saham yang diharapkan. Dengan mengambil batasan masalah bahwa penerima opsi diperbolehkan melakukan *hedging* opsinya sehingga untuk menurunkan persamaan diferensial dari fungsi harga saham dapat menggunakan metode standar *risk-neutral pricing*, maka untuk menurunkan persamaan diferensial dari fungsi harga saham dapat menggunakan metode standar *risk-neutral pricing*. Dari metode ini diperoleh bahwa , sehingga model pergerakan harga saham dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dZ_t \quad (2)$$

Selanjutnya, karena adanya pembatasan dari perusahaan untuk tidak memperjual belikan OSK, mengakibatkan harga OSK kurang begitu menguntungkan bagi penerimanya. Hal ini disebabkan karena penerima OSK tidak dapat mengambil keuntungan dari penjualan opsi yang diperolehnya tetapi sebaliknya bagi perusahaan, karena adanya pembatasan ini mengakibatkan perusahaan harus menanggung biaya yang agak lebih mahal sebagai konsekuensi dari adanya pembatasan tersebut. Untuk menggabungkan pengaruh tersebut, maka penerima OSK dianggap sebagai suatu subjek yang sewaktu-waktu dapat keluar dari perusahaan karena adanya *employment shock*

 ISBN : 978-979-16353-3-2

sehingga pada saat karyawan keluar dari perusahaan, karyawan tidak bisa menjual opsi yang telah diterimanya.

Employment shock ini dimodelkan mengikuti proses Poisson dengan *hazard rate* . Ketika penerima merasakan ada *employment shock*, penerima OSK tidak dapat menjual opsinya. Penerima OSK dapat melakukan *excercise* terhadap opsinya, jika sudah melewati *vesting period* atau mengorbankannya (opsi hangus). Jika penerima OSK melakukan *excercise* terhadap opsinya sesaat setelah *vesting period* berakhir, maka penerima OSK tersebut akan kehilangan kesempatan untuk mendapatkan opsi *reloaded* yang baru. *Employment shock* yang mengakibatkan keluarnya karyawan dari perusahaan mempengaruhi harga opsi dan strategi melakukan *excercise* para penerima OSK.

Pada makalah ini yang menjadi fokus pembahasan adalah harga OSK setelah *vesting period*, harga OSK ini dinotasikan dengan , dengan *S* adalah harga saham dan *K strike price*. Perlu diperhatikan bahwa *strike price* dari opsi dapat berubah setelah melewati masa *resetting* dan *reloading*.

Ketika dilakukan *exercise*, penerima OSK akan mendapatkan $\rho_H \frac{K}{S}$ opsi baru dengan *strike price* yang sama dengan harga saham pada saat opsi tersebut dilakukan *excercise*. Opsi baru yang diterima, mempunyai *vesting period* yang baru pula.

Dengan memperhatikan perbandingan yang digunakan untuk mendapatkan opsi baru karena fitur *reload* yaitu $\frac{K}{S}$ jika dikalikan dengan sesuatu faktor yang positif akan menghasilkan harga opsi baru dan *reset barrier* baru dengan proporsi yang sama maka untuk menentukan *boundary exercise* dapat pula dilakukan dengan cara yang sama yaitu menyatakan sebarang variabel ke dalam variabel pembanding yaitu *K*. Dengan cara seperti ini, maka *boundary exercise* dapat dinyatakan sebagai *hK*

 ISBN : 978-979-16353-3-2

dengan . Dengan cara ini pula, maka dapat diperoleh perbandingan antara harga opsi baru dengan *strike price S* yang baru adalah *D*

$$D = \frac{V(S,0;S)}{S} \tag{3}$$

Terdapat 5 kemungkinan *payoff* dari OSK berdasarkan pergerakan harga saham. Pada saat awal diberikan, harga OSK adalah sebesar *DK*. kemungkinan pertama, jika harga saham menyentuh *reset barrier* sehingga dengan adanya fitur *reset* mengakibatkan *payoff* dari OSK adalah . Kemungkinan kedua, jika terjadi *employment shock* sebelum *vesting period* ini mengakibatkan karyawan keluar dari perusahaan, maka *payoff* dari OSK adalah 0 (hangus). Kemungkinan ketiga, jika dilakukan *excercise* dengan segera disebabkan karena adanya *employment shock* setelah *vesting period* namun belum mencapai *exercise boundary* yang diharapkan maka *payoff* dari OSK adalah . Kemungkinan keempat, jika dilakukan *excercise* ketika harga saham mencapai *excercise boundary* setelah melewati *vesting period* atau kemungkinan kelima dilakukan *excercise* dengan segera setelah opsi melewati *vesting period* dan harga saham telah berada di atas *exercise boundary*. Kemungkinan keempat dan kelima memberikan *payoff* dari OSK adalah .

Selanjutnya dari *payoff* yang telah diperoleh, akan ditentukan harga OSK pada saat awal diberikan. Penentuan harga OSK diperhitungkan melalui 2 daerah waktu yaitu waktu setelah *vesting period* dan waktu saat *vesting period*, dimana perhitungan saat *vesting period* bergantung pada hasil yang diperoleh saat melakukan perhitungan harga OSK setelah *vesting period*.

Metode Martingale

Penentuan harga OSK setelah *vesting period* sama seperti penentuan harga opsi *American perpetual* dengan tambahan *lower barrier* untuk *reset*. Harga OSK pada saat $S \geq hK$, memberikan *payoff* yang didalamnya disertakan pula *reload option* yang baru yaitu:

$$C(S,K) = S - K + \rho_H DK \tag{4}$$

Harga OSK pada saat $S = lK$ yaitu ketika harga saham menyentuh *barrier*, maka OSK akan digantikan dengan ρ_L *reset option* yang baru yaitu:

$$C(lK;K) = \rho_L DlK \quad (5)$$

Harga OSK pada saat $lK < S < hK$ diperoleh dari penurunan ekspektasi *payoff* harga OSK secara umum:

$$C(t,S;K) = \mathbb{E}_{t,S}\left[e^{-r(\tau_s - t)}[S(\tau_s) - K]^+\right] \quad (6)$$

τ_s adalah *stopping time*

Untuk mendapatkan bentuk persamaan diferensial dari ekspektasi

maka digunakan *Discounted Feynman Kac Theorem*. Menurut Shreve (2004) prinsip umum untuk pembuktian dengan menggunakan *Discounted Feynman Kac Theorem* adalah sebagai berikut:

a. Menemukan *martingale*
b. Melakukan diferensial
c. Menjadikan bentuk (*drift*) sama dengan nol

Maka langkah yang dilakukan pertama kali untuk mendapatkan bentuk persamaan diferensial adalah menemukan *martingale* dari ekspektasi harga opsi yang dipengaruhi oleh harga saham.

Misal memenuhi persamaan differensial parsial berikut:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q)S\frac{\partial C}{\partial S} - rC = \frac{\partial C}{\partial T} \quad (7)$$

Menemukan *martingale*

$$C(t,S;K) - \mathbb{E}\left[e^{-r(\tau_s - t)}[S(\tau_s) - K]^+\right]$$

Jika $0 \leq d \leq t \leq \tau_s$ maka

$$C(t,S;K) = \mathbb{E}\left[e^{-r(\tau_s - t)}[S(\tau_s) - K]^+ \middle| \mathcal{F}(t)\right]$$

$$e^{-rt}C(t,S;K) = \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_s}[S(\tau_s) - K]^+ | \mathcal{F}(t)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-rt}C(t,S;K)|\mathcal{F}(d)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-r\tau_s}[S(\tau_s) - K]^+|\mathcal{F}(t)\right]|\mathcal{F}(d)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_s}[S(T) - K]^+|\mathcal{F}(d)\right]$$

$$= e^{-r\tau_s}V(d,S;K)$$

Jadi adalah *martingale*

Langkah selanjutnya adalah melakukan diferensial terhadap fungsi waktu pada bentuk *martingale* yang sudah diperoleh sebagai berikut:

$$d\left(e^{-rt}C(t,S;K)\right) = -re^{-rt}C(t,S;K)dt + e^{-rt}d\left(C(t,S;K)\right)$$

Suku $d\left(C(t,S;K)\right)$ ditentukan dengan menggunakan Lemma Ito

$$d\big(C(t,S;K)\big) = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial t}(dS)(dt)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dS)^2$$

persamaan (2) memberikan persamaan untuk dS sehingga

$$d\big(C(t,S;K)\big) = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}\big((r-q)Sdt + \sigma SdZ\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial t}$$
$$\big((r-q)Sdt + \sigma SdZ\big)(dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\big((r-q)Sdt + \sigma SdZ\big)^2$$

abaikan suku-suku yang memuat dt dengan orde lebih dari 1

$$d\big(C(t,S;K)\big) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 Z^2\right)dt + \sigma SdZ\frac{\partial C}{\partial S}$$

$$dZ = B\sqrt{dt} \qquad B \sim N(0,1) \qquad \mathbb{E}(B) = 0 \qquad \mathbb{E}(B^2) = 0$$

$$d\big(C(t,S;K)\big) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \sigma SdZ\frac{\partial C}{\partial S}$$

Sehingga diperoleh

$$d\big(e^{-rt}C(t,S;K)\big) = e^{-rt}\left[-rCdt + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt\right.$$
$$\left.+\sigma SdZ\frac{\partial C}{\partial S}\right]$$

$$d\big(e^{-rt}C(t,S;K)\big) = e^{-rt}\left\{-rC + \frac{\partial C}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right\}dt +$$
$$+e^{-rt}\sigma SdZ\frac{\partial C}{\partial S}$$

Dari hasil diferensial selanjutnya diperhatikan suku dari drift, karena adalah *martingale* maka suku dari *drift* sama dengan nol, sehingga diperoleh persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

Sehingga $C(t,S;K) = \mathbb{E}_{t,S}\left[e^{-r(\tau_s - t)}[S(\tau_s) - K]^+\right]$ merupakan solusi dari persamaan diferensial tersebut.

Tulis $T = \tau_s - t$ maka $dT = -dt$

Sehingga diperoleh persamaan diferensialnya adalah

$$(r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = \frac{\partial C}{\partial T}$$

Selanjutnya *stopping time* untuk OSK setelah *vesting period* ada 2 kemungkinan yaitu disebabkan karena *employment shock* atau disebabkan karena harga saham telah

 ISBN : 978-979-16353-3-2

menyentuh level batas yang diinginkan. Sehingga harga OSK dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$C(t,S;K) = \mathbb{E}_{t,S}\left[e^{-r(\tau_\lambda \wedge \tau_B - t)}[S(\tau_\lambda \wedge \tau_B) - K]^+\right] \qquad (8)$$

τ_λ adalah *stopping time* karena *employment shock*

τ_B adalah *stopping time* karena telah mencapai level batas yang diinginkan

$\tau_\lambda \wedge \tau_B$ adalah waktu minimal antara τ_λ dan τ_B

Waktu terjadinya *employment shock* mengikuti proses poisson berdistribusi eksponensial sehingga peluang terjadinya adalah sebagai berikut:

$$P\{\tau_\lambda \in dt\} = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

Harga OSK yang dipengaruhi oleh *employment shock* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C_p(S;K) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} C(t,S;K)\,dt$$

Karena $C(t,S;K)$ memenuhi persamaan (7) maka $C_p(S;K)$ dapat diperoleh dengan cara mengintegralkan persamaan (7) di kedua ruas

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left((r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC\right)dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{\partial C}{\partial T}dt$$

Untuk bentuk integral di ruas kanan, dapat diselesaikan dengan menggunakan transformasi Laplace Carson sebagai berikut:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{\partial C}{\partial T}dt = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\partial C}{\partial T}dt = \lambda[C_p - (S-K)^+]$$

Sehingga diperoleh hasil pengintegralannya adalah:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} - (r+\lambda)C + \lambda\max(S-K,0) = 0$$

Harga OSK setelah *vesting period* memenuhi bentuk persamaan diferensial parsial tersebut.

Kesimpulan

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Dengan menggunakan *Discounted Feynman Kac* dapat diperoleh bentuk persamaan diferensial parsial pada penghitungan harga opsi saham karyawan setelah *vesting period* yaitu:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} - (r+\lambda)C + \lambda \max(S-K,0) = 0$$

Daftar Pustaka

Carr, Peter. (1998), *Randomization And The American Put*, Review of Financial Studies 11, 597-626

Carr, Peter and Linnetsky, Vadim. (2000), *The Valuation of Executive Stock Option in an Intensity-Based Framework*, European Finance Review 4: 211-230

Cvitanic, Jaksa, Zvi Wiener, and Fe rnando Zapatero. (2004), *Analytic Pricing of Employee Stock Option*, University of Southern California

Murni, Dewi. (1995): Proses Poisson, Tesis Program Master, Institut Teknologi Bandung

Ross, M. Sheldon. (1996), *Stochastic Process*, John Wiley & Sons, Inc. New York

Shreve, E. Steven. (2004), *Stochastic Calculus For Finance II Continuous-Time Models*, Springer Finance Textbook