 ISBN : 978-979-16353-3-2

An-2

DEFINISI TIPE RIEMANN UNTUK INTEGRAL LEBESGUE [1]

Drajad Maknawi [2] dan Muslich [3]
Jurusan Matematika FMIPA UNS

Abstrak

Tujuan dari tulisan ini adalah membahas tentang integral Lebesgue secara konstruktif yaitu bentuk integral Lebesgue sebagai limit jumlah. Selanjutnya dikaji sifat-sifat terkait diantaranya adalah sifat ketunggalan hasil dan sifat kelinearan, teorema Cauchy dan teorema ekivalensi.

Kata kunci : integral Riemann, integral Lebesgue.

1. PENDAHULUAN

Bentuk integral konstruktif pertama kali dikenalkan oleh matematikawan Jerman yaitu Riemann (1826-1866) yang selanjutnya dikenal dengan integral Riemann. Setiap fungsi kontinu f pada $[a,b]$ dijamin terintegral Riemann. Kenyataan menunjukkan bahwa masih terdapat banyak fungsi yang tidak terintegral secara Riemann. Salah satu fungsi yang tidak terintegral secara Riemann adalah fungsi Dirichlet $f:[0,1]\to R$ dengan

$$f(x)=\begin{cases}1; & x \text{ rasional}\\ 0; & x \text{ irasional}\end{cases}.$$

Berkat ide matematikawan Perancis yaitu Henry Leon Lebesgue (1875-1941), ia berhasil menyusun tipe integral untuk mengatasi permasalahan yang muncul, yaitu banyaknya fungsi yang tidak terintegral secara Riemann. Integral yang dibangun Lebesgue banyak mendasarkan pada teori ukuran. Dengan konsep integral Lebesgue ini maka dapat ditunjukkan bahwa fungsi Dirichlet tersebut terintegral secara Lebesgue.

Integral konstruktif Riemann dibangun melalui konsep partisi pada daerah integrasi (domain fungsi), sedangkan dalam tulisan ini penulis bertujuan untuk membahas integral Lebesgue dengan pendekatan secara konstruktif sebagaimana halnya pada pembahasan integral konstruktif Riemann, namun pembahasan sedikit berbeda karena partisi yang dibangun adalah pada daerah hasil (*range*) fungsi. Selanjutnya bentuk integral ini dikenal

==

 ISBN : 978-979-16353-3-2

1. Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di UNY Yogyakarta pada tanggal 5 Desember 2009.
2. Adalah mahasiswa S-1 Jurusan Matematika FMIPA UNS Surakarta.
3. Adalah dosen Jurusan Matematika FMIPA UNS Surakarta.

dengan definisi tipe Riemann untuk integral Lebesgue atau juga dikenal dengan integral Lebesgue sebagai limit jumlah.

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1. Integral Jumlah Riemann

Diberikan fungsi terbatas $f:[a,b] \to R$. Himpunan terurut berhingga $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $x_{i-1} < x_i$ untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n$ disebut partisi pada $[a,b]$. Jika P_1 dan P_2 adalah partisi-partisi pada $[a,b]$ dengan $P_2 \supset P_1$, maka partisi P_2 disebut partisi penghalusan (*refinement partition*) dari partisi P_1. Selanjutnya $[x_{i-1}, x_i]$ disebut selang bagian ke-*i*, notasi $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ merupakan panjang selang bagian ke-*i* dan $\|P\| = maks\{\Delta_i x \,; i = 1,2,3,\dots,n\}$ disebut norma suatu partisi P pada $[a,b]$. Diambil sebarang titik $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ dan dibentuk jumlahan

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x.$$

Kemudian diambil nilai limitnya untuk $\Delta_i x \to 0$ maka $\|P\| \to 0$ dan berakibat $n \to \infty$ dan jika nilai

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f,P) = \lim_{\Delta_i x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x = \text{ada (berhingga)}$$

maka fungsi f dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$. Lee dan Vyborny [2] mendefinisikan integral jumlah Riemann sebagai berikut.

Definisi 2.1.

Fungsi $f:[a,b] \to R$ terbatas dikatakan terintegral Riemann ke suatu nilai A pada $[a,b]$, ditulis $f \in R[a,b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$|S(f,P) - A| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x - A\right| < \varepsilon.$$

Bilangan A disebut nilai integral Riemann atau integral-R fungsi f pada $[a,b]$ yang biasa dinotasikan dengan

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P) = \lim_{\Delta_i x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x = (R)\int_a^b f(x)dx = A.$$

2.2. Integral Lebesgue Sebagai Limit Jumlah

Pada prinsipnya integral Lebesgue dibangun atas teori ukuran. Integral Riemann dari suatu fungsi terbatas f pada $[a,b]$ disusun berdasarkan atas konsep partisi $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$. Menurut Lifton [3] dan Spiegel [4], bahwa penyusunan integral Lebesgue sebagai limit jumlah atau disebut sebagai definisi tipe Riemann untuk integral Lebesgue dari suatu fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E disusun berdasarkan konsep partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada interval $[\alpha,\beta]$. Dengan ketentuan $\alpha = \inf\{f(x);\ x \in E\}$ dan $\beta > \sup\{f(x);\ x \in E\}$ dimana nilai β cukup dekat dengan nilai $\sup\{f(x);\ x \in E\}$. Namun sebaliknya menurut Enrique [1], penyusunan partisi P pada $[\alpha,\beta]$ bisa juga diambil dengan ketentuan $\alpha < \inf\{f(x);\ x \in E\}$ dan $\beta \geq \sup\{f(x);\ x \in E\}$. Notasi $\pi[\alpha,\beta]$ adalah himpunan semua partisi P pada $[\alpha,\beta]$. Selanjutnya untuk setiap $k = 1,2,3,\dots,n$ dikonstruksikan himpunan-himpunan $E_k = \{x;\ y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$, karena f terukur maka menurut Spiegel [4], E_k juga terukur . Dibentuk jumlahan-jumlahan

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \ \text{ dan } S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \qquad 2.1$$

dengan $m(E_k)$ adalah ukuran Lebesgue himpunan E_k. Menurut Spiegel [4], jika P adalah sebarang partisi pada $[\alpha,\beta]$ dan Q adalah partisi penghalusan dari partisi P pada $[\alpha,\beta]$, maka berlaku $s(f,P) \leq s(f,Q)$ dan $S(f,P) \leq S(f,Q)$.

Integral Lebesgue bawah fungsi f pada E dinotasikan dengan $I = \sup\{s(f,P);\ P \in \pi[\alpha,\beta]\}$ dan integral Lebesgue atas fungsi f pada E dinotasikan dengan $J = \inf\{S(f,P);\ P \in \pi[\alpha,\beta]\}$. Masih menurut Spiegel [4], untuk setiap fungsi

 ISBN : 978-979-16353-3-2

terbatas dan terukur f berlaku $s(f,P) \leq I \leq J \leq S(f,P)$. Selanjutnya fungsi terbatas dan terukur f dikatakan terintegral Lebesgue pada E jika $I = J$.

Definisi 2.2.

Fungsi f terbatas dan terukur pada E dikatakan terintegral Lebesgue pada E, dinotasikan $f \in L(E)$, jika nilai $I = J$.

Di lain pihak menurut Lifton [3] dan Springer Online Reference [5], untuk setiap fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E dan untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada interval $[\alpha, \beta]$, diambil sebarang titik $y_k^* \in [y_{k-1}, y_k]$; $k = 1,2,3,\dots,n$ dan dibentuk jumlahan

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k). \tag{2.2}$$

Jika nilai

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) = \text{ada (berhingga)}$$

maka fungsi f dikatakan terintegral Lebesgue sebagai limit jumlah pada E dengan notasi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) = (L)\int_E f(x)\,dx.$$

Definisi 2.3.

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E. Fungsi f dikatakan terintegral Lebesgue ke nilai A pada E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha, \beta]$ dengan $\|P\| = maks\{y_k - y_{k-1};\ k = 1,2,3,\dots,n\} < \delta$ berakibat

$$|s(f,P) - A| = \left|\sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - A\right| < \varepsilon.$$

Sebagaimana halnya pada definisi integral tipe Riemann maka berdasarkan pada Definisi 2.3 di atas akan dibahas beberapa teorema terkait.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

3. PEMBAHASAN

Dengan mengacu pada persamaan 2.1 dan Definisi 2.2 terlebih dahulu diberikan contoh fungsi yang terintegral Lebesgue seperti dalam Contoh 3.1 berikut.

Contoh 3.1.

Diberikan fungsi Dirichlet $f: [0,1] \to R$ dengan $f(x) = \begin{cases} 1; & x\ rasional \\ 0; & x\ irasional \end{cases}$. Fungsi f adalah terintegral Lebesgue pada $[0,1]$ sebab jika dibentuk sebarang partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha, \beta]$, $\alpha = 0$, $\beta > 1$, dengan asumsi - $y_0 = 0$, $y_1 > 0$, $y_{n-1} < 1$ dan $y_n > 1$, diperoleh himpunan-himpunan $E_1 = \{x;\ y_0 \le f(x) < y_1\} = \{x;\ f(x) = 0\} = \{x;\ x\ irasional\}$, $E_k = \{x;\ y_{k-1} \le f(x) < y_k\} = \{x;\ 0 < f(x) < 1\} = \emptyset$ untuk $k = 2, 3, \dots, n-1$, dan $E_n = \{x;\ y_{n-1} \le f(x) < y_n\} = \{x;\ f(x) = 1\} = \{x;\ x\ rasional\}$. Dengan $m(E_1) = 1$ dan $m(E_k) = 0$ untuk $k = 2, 3, \dots, n$. Berakibat $s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) = y_0.1 + y_1.0 + \dots + y_{n-1}.0 = y_0$ dan $S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = y_1.1 + y_2.0 + \dots + y_n.0 = y_1$. Sehingga didapat $I = \sup\{s(f,P); P \in \pi[\alpha,\beta]\} = \sup\{s(f,P);\ s(f,P) = 0\} = 0$ dan $J = \inf\{S(f,P); P \in \pi[\alpha,\beta]\} = \inf\{S(f,P); S(f,P) > 0\} = 0$. Diperoleh $I = J = 0$. Jadi, fungsi Dirichlet tersebut terintegral Lebesgue pada $[0,1]$ dengan $(L)\int_{E=[0,1]} f(x)dx = 0$.

Berdasarkan pada persamaan 2.1 yaitu konsep jumlah Lebesgue atas dan jumlah Lebesgue bawah diperoleh Teorema 3.2 sebagai berikut.

Teorema 3.2.

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E. Fungsi f terintegral Lebesgue pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha, \beta]$ sehingga berlaku $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Bukti.

ISBN : 978-979-16353-3-2

1). Syarat perlu :

Diketahui $f \in L(E)$, maka terdapat bilangan I dan J sehingga $I = J$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, dengan menggunakan sifat supremum dan infimum, terdapat partisi P_1 dan P_2 pada $[\alpha,\beta]$ sehingga $I - \frac{1}{2}\varepsilon < s(f,P_1) \le I = J \le S(f,P_2) < J + \frac{1}{2}\varepsilon$. Diambil partisi $P = P_1 \cup P_2$ pada $[\alpha,\beta]$, maka berlaku $I - \frac{1}{2}\varepsilon < s(f,P_1) \le s(f,P) \le I = J \le S(f,P) \le S(f,P_2) < J + \frac{1}{2}\varepsilon$ dan berakibat $S(f,P) - s(f,P) < \left(J + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - \left(I - \frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon$.

2). Syarat cukup :

Diketahui untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[\alpha,\beta]$ sehingga $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Karena selalu berlaku $s(f,P) \le I \le J \le S(f,P)$, maka diperoleh $J - I \le S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Karena diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, maka berlaku $I = J$. Dengan demikian, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi f terintegral Lebesgue pada E.

Jadi, teorema terbukti. ■

Berdasarkan pada Definisi 2.3 yang berhubungan dengan konsep integral Lebesgue sebagai limit jumlah diperoleh beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 3.3

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E. Jika f terintegral Lebesgue pada E maka nilai integralnya tunggal.

Bukti.

Misalkan f terintegral Lebesgue ke nilai A dan B, akan diperlihatkan bahwa $A = B$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \ldots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P\| = maks\{y_k - y_{k-1};\ k = 1,2,3,\ldots,n\} < \delta_1$ berakibat

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \ldots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P\| = maks\{y_k - y_{k-1};\ k = 1,2,3,\ldots,n\} < \delta_2$ berakibat

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Didefinisikan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha, \beta]$ dengan $\|P\| = maks\{y_k - y_{k-1};\ k = 1,2,3,\dots,n\} < \delta$ berlaku

$$|A - B| = \left|A - \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) + \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - B\right|$$

$$\leq \left|A - \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $A = B$. Jadi, nilai integral Lebesgue fungsi f pada E adalah tunggal.

Dengan demikian teorema terbukti. ∎

Teorema 3.4

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f dan g pada himpunan terukur E. Jika f dan g terintegral Lebesgue pada E dan c adalah sebarang bilangan real maka $f + g$ dan cf terintegral Lebesgue dan berlaku

a). $(L)\int_E (f(x) + g(x))dx = (L)\int_E f(x)dx + (L)\int_E g(x)dx.$

b). $(L)\int_E cf(x)dx = c(L)\int_E f(x)dx.$

Bukti.

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

a). Karena f dan g terintegral Lebesgue pada E, sebut $(L)\int_E f(x)dx = A$ dan $(L)\int_E g(x)dx = B$, maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_f pada $[\alpha_f, \beta_f]$ dengan $\alpha_f = \inf\{f(x);\ x \in E\}$ dan $\beta_f > \sup\{f(x);\ x \in E\}$ dengan $\|P_f\| < \delta_1$ berlaku

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_{fk}^* m(E_k) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2(|c| + 1)}$$

dan terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_g pada $[\alpha_g, \beta_g]$ dengan $\alpha_g = \inf\{g(x);\ x \in E\}$ dan $\beta_g > \sup\{g(x);\ x \in E\}$ dengan $\|P_g\| < \delta_2$ berlaku

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_{gk}^{*} m(E_k) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka untuk setiap partisi P pada $[\alpha_f, \beta_f]$ atau pada $[\alpha_g, \beta_g]$ dengan $\|P\| < \delta$, berlaku

$$|S(f+g, P) - (A+B)| = \left|\sum_{k=1}^{n} (y_{fk}^{*} + y_{gk}^{*}) m(E_k) - (A+B)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} y_{fk}^{*} m(E_k) - A\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} y_{gk}^{*} m(E_k) - B\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Berarti $f + g$ terintegral Lebesgue pada E dan berlaku

$$(L)\int_E (f(x) + g(x))dx = A + B = (L)\int_E f(x)dx + (L)\int_E g(x)dx.$$

b). Demikian juga berlaku untuk setiap partisi P_f pada $[\alpha_f, \beta_f]$ dengan $\|P_f\| < \delta_1$, maka

$$|S(cf, P) - cA| = \left|\sum_{k=1}^{n} c y_{fk}^{*} m(E_k) - cA\right|$$

$$= |c| \left|\sum_{k=1}^{n} y_{fk}^{*} m(E_k) - A\right|$$

$$< |c| \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)} < \varepsilon.$$

Berarti cf terintegral Lebesgue pada E dan berlaku

$$(L)\int_E cf(x)dx = cA = c(L)\int_E f(x)dx.$$

Jadi, teorema terbukti. ■

Teorema 3.5 [Teorema Cauchy]

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E. Fungsi f terintegral Lebesgue pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_1 dan P_2 pada $[\alpha, \beta]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berlaku

$$|S(f, P_1) - S(f, P_2)| < \varepsilon.$$

Bukti.

1). Syarat perlu :

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Diketahui f terintegral Lebesgue pada E. Misalkan fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap partisi P_1 dan P_2 pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berlaku $|S(f,P_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|S(f,P_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga berakibat

$$|S(f,P_1) - S(f,P_2)| - |S(f,P_1) - A - S(f,P_2) + A|$$
$$\leq |S(f,P_1) - A| + |S(f,P_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2). Syarat cukup :

Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_1 dan P_2 pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berlaku $|S(f,P_1) - S(f,P_2)| < \varepsilon$. Diambil bilangan ε>0 tetap dan dimisalkan $\pi_\delta[\alpha,\beta]$ adalah koleksi semua partisi P pada $[\alpha,\beta]$ dengan norma lebih kecil dari δ. Untuk suatu partisi $P_0 \in \pi_\delta[\alpha,\beta]$ tetap dan sebarang $P \in \pi_\delta[\alpha,\beta]$ berlaku $|S(f,P_0) - S(f,P)| < \varepsilon$. Dengan kata lain berlaku

$$S(f,P_0) - \varepsilon < S(f,P) < S(f,P_0) + \varepsilon.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa himpunan $S(f) = \{S(f,P) : P \in \pi_\delta[\alpha,\beta]\}$ tak hingga dan terbatas, maka menurut Teorema Weierstrass, himpunan $S(f)$ mempunyai paling sedikit satu titik limit, misal A. Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $P_1 \in \pi_\delta[\alpha,\beta]$ sehingga $|S(f,P_1) - A| < \varepsilon$. Dengan demikian, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E.

Jadi, teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa Definisi 2.2 ekuivalen dengan Definsi 2.3 seperti pada Teorema 3.6 berikut.

Teorema 3.6

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E. Fungsi f memenuhi Definisi 2.2 jika dan hanya jika fungsi f memenuhi Definisi 2.3.

Bukti.

1). Syarat perlu :

Diketahui fungsi f terintegral Lebesgue pada E berdasarkan Definisi 2.2, maka terdapat bilangan I dan J sehingga nilai $\sup\{s(f,P); P \in \pi[\alpha,\beta]\} = I = J = \inf\{S(f,P); P \in \pi[\alpha,\beta]\}$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat supremum dan infimum, maka terdapat partisi P_1 dan P_2 pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P_1\| < \delta_1$ dan $\|P_2\| < \delta_2$ sehingga

$$I - \varepsilon < s(f,P_1) \leq I = J \leq S(f,P_2) < J + \varepsilon.$$

Dibentuk partisi $P = P_1 \cup P_2$ pada $[\alpha,\beta]$ dan didefinisikan $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, maka $\|P\| < \delta$ dan berlaku $s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq \mathcal{S}(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2)$. Sehingga akan berlaku $I - \varepsilon \leq \mathcal{S}(f,P) \leq J + \varepsilon$. Karena nilai $I = J$, maka didapat

$$|\mathcal{S}(f,P) - I| < \varepsilon.$$

Dengan demikian, untuk setiap setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|\mathcal{S}(f,P) - I| < \varepsilon.$$

Menurut Definisi 2.3 fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai $I = J$ pada E.

2). Syarat cukup :

Diketahui fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E berdasarkan Definisi 2.3, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha,\beta]$ dengan $\|P\| = maks\{y_k - y_{k-1}; k = 1,2,3,\dots,n\} < \delta$ berakibat

$$|\mathcal{S}(f,P) - A| = |\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau $A - \frac{\varepsilon}{2} < \mathcal{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_k^* m(E_k) - A < A + \frac{\varepsilon}{2}$. Hal ini berlaku untuk sebarang $y_k^* \in [y_{k-1}, y_k]$. Jadi, jika diambil $y_k^* \in [y_{k-1}, y_k]$ dengan $y_k^* = y_{k-1}$, maka berlaku

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

dan jika diambil $y_k^* \in [y_{k-1}, y_k]$ dengan $y_k^* = y_k$, maka berlaku

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diperoleh $S(f,P) - s(f,P) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$

Dengan demikian, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dan untuk setiap partisi $P = \{\alpha = y_0, y_1, \dots, y_n = \beta\}$ pada $[\alpha, \beta]$ dengan $\|P\| = maks\{y_k - y_{k-1};\ k = 1,2,3, \dots, n\} < \delta$ berlaku $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Karena selalu berlaku $s(f,P) \le I \le J \le S(f,P)$, maka diperoleh $J - I \le S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Karena bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $I = J$. Menurut Definisi 2.2 fungsi f terintegral Lebesgue pada E.

Jadi, teorema terbukti. ■

4. KESIMPULAN

Integral Lebesgue sebagai limit jumlah adalah merupakan definisi tipe Riemann untuk

integral Lebesgue. Beberapa hasil pembahasan integral Lebesgue sebagai limit jumlah ini antara lain teorema ketunggalan hasil, berlakunya sifat kelinearan, teorema Cauchy dan teorema ekivalensi.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Enrique A.G. and Velaso, 1986. **“The Lebesgue Integral as a Riemann Integral“,** Internet. J. Math. & Math. Sci. 1987, Vol. 10 N0. 4, 693-706, Massachusetts, USA.

[2]. Lee, P. Y. and Vyborny, R., 2000. **“Integral : An Easy Approach after Kurzweil and Henstock”,** Cambridge, University Press, United Kingdom.

[3]. Lifton, J. H., 2004. **“Measure Theory and Lebesgue Integration”,** Swarthmore College Mathematics Senior Conference, Pensylvania, United Stated. http://web.media.mit.edu/~lifton/snippets/measure_theory.pdf.

[4]. Spiegel, M. R., 1969. **“Theory and Problems of real Variables”,** McGraw-Hill, United Stated of America.

[5]. Springer Online Reference Works. http://eom.springer.de/1/i051840.