ISBN : 978-979-16353-3-2

A-2

TEOREMA GOURSAT

Konstruksi subgrup dari grup darab langsung

M.V.Any Herawati,S.Si.,M.Si.
Program Studi Matematika
Universitas Sanata Dharma

Abstrak

Darab langsung $G \times H$ dari grup G dan H adalah grup terhadap perkalian per komponen. Selain itu bila A adalah subgrup dari G dan C adalah subgrup dari H, maka $A \times C$ adalah subgrup dari $G \times H$. Sedangkan bila $S \times T$ adalah subgrup dari $G \times H$, belum tentu S merupakan subgrup dari G dan T merupakan subgrup dari H. Teorema Goursat memberikan prosedur yang sistematis untuk mencari semua subgrup dari suatu grup darab langsung.

Kata kunci : *darab langsung, grup, subgrup.*

1.Pendahuluan

1,1 Latar Belakang Masalah

Dalam perkuliahan tentang teori grup, mahasiswa diperkenalkan dengan bermacam-macam metode untuk mengkonstruksi contoh-contoh yang merupakan grup atau bukan grup. Apa yang kelihatannya luput dalam silabus perkuliahan teori grup adalah sebuah teorema, yang pertama kali dibuktikan oleh Edouard Jean_Baptiste Goursat (1858-1936) pada tahun 1889, yang menunjukkan hubungan yang 'indah' antara beberapa topik elementer dari teori grup. Pembahasan tentang subgrup dari suatu darab langsung, bila ada, biasanya singkat dan tidak lengkap. Goursat dikenal di kalangan matematikawan karena bukunya *Cours d'analyse mathematique* (*A Course in Mathematical Analysis*), yang dalam buku tersebut Goursat memperbaiki teorema integral Cauchy, yang kemudian dikenal secara luas sebagai Teorema Cauchy-Goursat. Teorema tersebut menyatakan bahwa integral dari fungsi analitik pada kurva tertutup sederhana adalah nol.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Tulisan ini akan membahas *teorema Goursat yang lain*, yang secara lengkap menjelaskan tentang subgrup dari suatu darab langsung. Selanjutnya teorema tersebut akan disebut sebagai Teorema Goursat. Adapun bukti dari Teorema Goursat cukup didasarkan pada beberapa topik dasar dari teori grup: subgrup, subgrup normal, koset, grup kuosien, indeks, order,darab langsung, bijeksi, dan isomorfisma. Dengan demikian mudah diterima oleh mahasiswa yang mengikuti perkuliahan aljabar abstrak, khususnya teori grup. Di samping itu penulis akan mencoba menyusun kembali bukti Teorema Goursat tersebut dan *Corollary*nya ke dalam barisan teorema-teorema — yang dalam perkuliahan bisa dijadikan sebagai kumpulan soal-soal latihan — dengan maksud agar pada akhir semester, teorema tersebut dapat dipahami dan dibuktikan tanpa banyak kesulitan.

Digunakan notasi $A \triangleleft B$ untuk menyatakan *A* adalah subgrup normal dari *B* , notasi e_G untuk menyatakan elemen identitas dari grup *G* (atau dengan *e* bila konteksnya jelas), dan notasi 1 untuk menyatakan subgrup trivial dari *G*. Notasi teori grup yang lainnya adalah standar. Dalam tulisan ini untuk menyingkat penulisan, bukti teorema tidak disertakan.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasar uraian dalam latar belakang masalah di atas, dapat dituliskan rumusan masalah sebagai berikut :

1.Bagaimana bunyi Teorema Goursat yang mengenai konstruksi subgrup dari grup darab langsung?

2. Bagaimana langkah-langkah pembuktian teorema tersebut?

1.3. Tujuan dan Manfaat

Tujuan penulisan makalah ini adalah untuk memberikan kontribusi terhadap pengembangan matematika khususnya bidang aljabar abstrak dan pengajarannya.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

2. Pembahasan

2.1.Subgrup dari suatu darab langsung

Teorema 1. Bila *A* adalah subgrup dari *G* dan *C* adalah subgrup dari *H*, maka $A \times C$ adalah subgrup dari $G \times H$.

Teorema 2. *Diagonal* dari $G \times G$, yang didefinisikan dengan *D* = $\{(g,g) \mid g \in D\}$, adalah subgrup dari $G \times G$.

Untuk melihat bahwa Teorema 1 dan 2 belum memberikan daftar yang lengkap dari subgrup-subgrup, misalkan Z_3 = $\langle x \rangle$ = $\{e, x, x^2\}$, dan perhatikan darab langsung $Z_3 \times Z_3$. Mudah diperiksa bahwa himpunan $\{(e,e),(x,x^2),(x^2,x)\}$ adalah subgrup yang bukan merupakan darab langsung dari subgrup-subgrup, bukan pula subgrup diagonal. Seperti yang dikatakan di depan bahwa Teorema Goursat akan memperlihatkan prosedur yang sistematis untuk memeriksa setiap subgrup dari darab langsung.

2.2.Teorema Goursat

Kita akan menggunakan istilah grup kuosien atau disingkat *kuosien*, untuk bentuk A/B, di mana *A* adalah grup dan $B \lhd A$. Bila *A* = *B*, maka A/B disebut *kuosien trivial* karena isomorfis dengan grup trivial berorde 1.

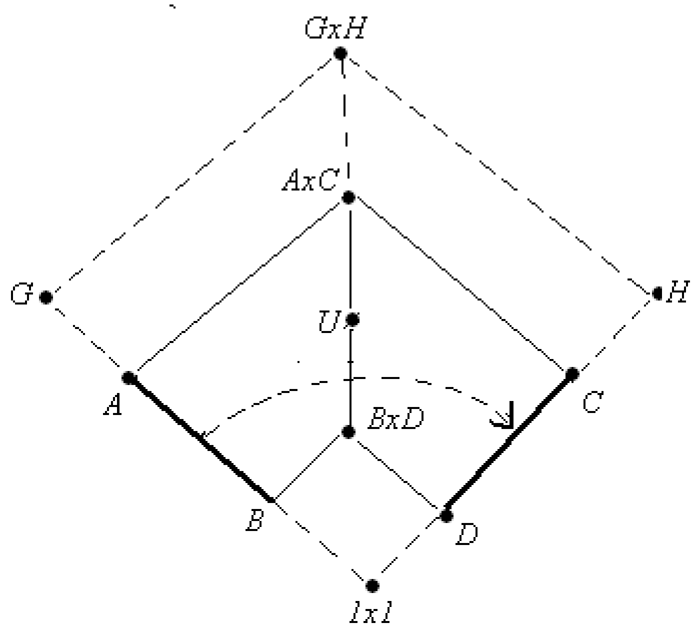
Teorema Goursat. Misal *G* dan *H* adalah grup. Maka terdapat bijeksi antara himpunan *S* yang terdiri dari subgrup dari $G \times H$ dan himpunan *T* yang terdiri dari semua tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana A/B adalah kuosien dalam G, C/D adalah kuosien dalam H, dan $\varphi : A/B \to C/D$ adalah isomorfisma.

Atau secara sederhana, Teorema Goursat mengatakan bahwa struktur subgrup dari darab langsung bergantung pada struktur kuosien dari grup faktor. Penting dicatat

ISBN : 978-979-16353-3-2

bahwa, di samping isomorfisma identitas, isomorfisma yang lain mungkin ada antara kuosien-kuosien tak trivial yang isomorfis, masing-masing berkorespondensi dengan subgrup tunggal dalam darab langsung. Alasan mengapa $Z_3 \times Z_3$ memuat subgrup yang tidak dapat diperoleh dari Teorema 1 dan 2 (lihat paragraf di bawah Teorema 2) adalah bahwa kedua teorema tersebut hanya meneliti subgrup-subgrup yang berkorespondensi dengan isomorfisma trivial atau identitas.

Alat yang dipakai untuk membantu menggambarkan struktur subgrup dari suatu grup adalah diagram Hasse. Dalam diagram Hasse, subgrup dinyatakan dengan titik, dan relasi termuat dinyatakan dengan garis yang menghubungkan subgrup-subgrup. Dengan ketentuan bahwa subgrup yang memuat subgrup yang lain digambar lebih tinggi. Diagram Hasse dalam Gambar 1 menunjukkan subgrup-subgrup yang relevan dengan subgrup *U* dari $G \times H$. Subgrup-subgrup antara dua subgrup di sana tidak digambar.



Gambar 1. Visualisasi subgrup *U* dari $G \times H$.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

2.2.Pembuktian Teorema Goursat

Misal *G* dan *H* adalah grup, misal *S* adalah himpunan semua subgrup dari $G \times H$, dan misal T adalah himpunan semua tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana $B \lhd A \leq G$, $D \lhd C \leq H$, dan $\varphi : A/B \to C/D$ adalah isomorfisma grup.

Teorema 3. Misal $(A/B, C/D, \varphi)$ adalah tripel dalam *T*, dan didefinisikan

$U_\varphi = \{(g,h) \in A \times C \mid \varphi(gB) = hD\}$.

Maka U_φ adalah subgrup dari $G \times H$.

Teorema 4. Untuk subgrup *U* dalam *S*, misalkan

$A_U = \{g \in G \mid (g,h) \in U$ untuk suatu $h \in H\}$,

$B_U = \{g \in G \mid (g,1) \in U\}$,

$C_U = \{h \in H \mid (g,h) \in U$ untuk suatu $g \in G\}$, dan

$D_U = \{h \in H \mid (1,h) \in U\}$,

dan didefinisikan pemetaan $\varphi_U : A_U / B_U \to C_U / D_U$ dengan

$\varphi_U(gB_U) = hD_U$ bila $(g,h) \in U$.

Maka

(a). A_U adalah subgrup dari *G* dan C_U adalah subgrup dari *H*. (Subgrup ini kadang disebut *proyeksi* dari *U* pada grup faktor .)

(b). B_U adalah subgrup normal dari D_U adalah subgrup normal dari C_U .

(c). φ_U adalah isomorfisma grup.

Teorema 5. Didefinisikan pemetaan $\alpha : S \to T$ dan $\beta : T \to S$ dengan

$\alpha(U) = (A_U / B_U, C_U / D_U, \varphi_U)$

dan

$\beta(A/B, C/D, \varphi) = U_\varphi$.

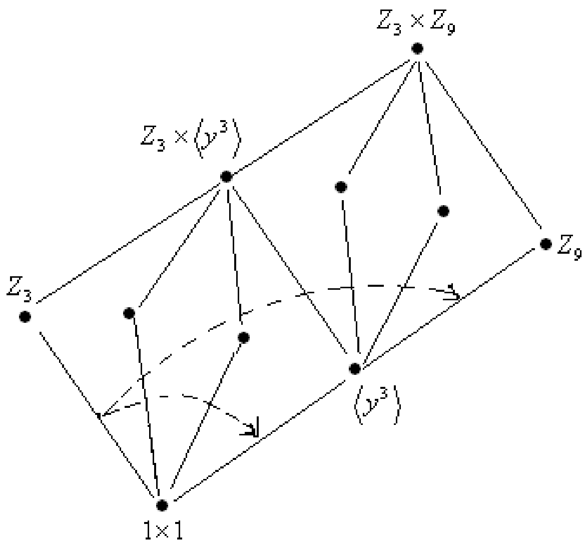
Maka α adalah bijeksi dengan invers β.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Teorema 3 dan 4 menunjukkan bagaimana membentuk subgrup dalam *S* bila diberikan suatu tripel dalam *T*, dan sebaliknya.Yaitu, bila diberikan tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ dalam T, kita tentukan bayangan dari koset gB terhadap φ. Maka U_φ tidak lain adalah himpunan semua pasangan terurut elemen-elemen dari gB dan *hD* . Sebaliknya, bila diberikan subgrup *U*, himpunan koordinat pertamanya membentuk *A*, dan himpunan koordinat pertamanya yang dipasangkan dengan elemen identitas membentuk *B*; subgrup *C* dan *D* dibentuk dengan cara sama. Isomorfisma φ kemudian dapat ditentukan. Contoh-contoh di bawah ini menunjukkan langkah-langkah tersebut.

2.3.Contoh-contoh

Contoh 1. Misal *G* = Z_3= $\langle x \rangle$,dan misal *H* =Z_9= $\langle y \rangle$. Dalam $G \times H$, enam subgrup 1×1, $1\times\langle y^3 \rangle$, $1\times Z_9$, $Z_3 \times 1$, $Z_3 \times \langle y^3 \rangle$, dan $Z_3 \times Z_9$ diperoleh dari kuosien trivial. Satu-satunya kuosien tak trivial dari Z_3 adalah $Z_3/1$, yang isomorfis dengan kedua kuosien $Z_9/\langle y^3 \rangle$ dan $\langle y^3 \rangle/1$ dalam Z_9. Masing-masing pasangan ini berkorespondensi dengan dua subgrup, yaitu yang diperoleh dari dua isomorfisma yang berbeda dari grup siklik berorde 3 ke dirinya sendiri. Diagram Hasse untuk $Z_3 \times Z_9$ lengkapnya ditunjukkan dalam Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Hasse dari $Z_3 \times Z_9$

Contoh 2. Misal *G* = Z_{6_3} = $\langle x \rangle$, dan misal *H* adalah grup yang terdiri dari enam simetri dari segitiga samasisi di mana dua rotasi berorde 3 dinyatakan dengan *r* dan r^2, dan pencerminan berdorde 2 dengan s_1, s_2, dan s_{3_1}. Tabel 1 mendaftar kuosien-kuosien yang dipakai.

Tabel 1. Kuosien-kuosien untuk Contoh 2

Kuosien dalam *G*	Orde	Kuosien dalam *H*	Orde
G/G	1	H/H	1
$\langle x^2 \rangle / \langle x^2 \rangle$	1	$\langle r \rangle / \langle r \rangle$	1
$\langle x^3 \rangle / \langle x^3 \rangle$	1	$\langle s_1 \rangle / \langle s_1 \rangle$	1
1/1	1	$\langle s_2 \rangle / \langle s_2 \rangle$	1
		$\langle s_3 \rangle / \langle s_3 \rangle$	1
		1/1	1
$G/\langle x^2 \rangle$	2	$H/\langle r \rangle$	2
$\langle x^3 \rangle /1$	2	$\langle s_1 \rangle /1$	2
		$\langle s_2 \rangle /1$	2
		$\langle s_3 \rangle /1$	2
$G/\langle x^3 \rangle$	3	$\langle r \rangle /1$	3
$\langle x^2 \rangle /1$	3		
G/1	6	H/1	6

Misalkan kita akan mencari subgrup U yang berkorespondensi dengan tripel ($G/\langle x^3 \rangle, \langle r \rangle/1, \varphi$), di mana $\varphi : G/\langle x^3 \rangle \to \langle r \rangle/1$ didefinisikan dengan $\varphi(x\langle x^3 \rangle) = r^2 1$. Karena

$$\varphi(\{e_G, x^3\}) = \{e_H\},$$

$\varphi(\{x,x^4\})=\{r^2\}$,

$\varphi(\{x^2,x^5\})=\{r\}$,

maka $U=\{(e_G,e_H),(x^3,e_H),(x,r^2),(x^4,r^2),(x^2,r),(x^5,r)\}$.

Sebaliknya, misal diberikan subgrup *V*, akan dicari tripel yang berkorespondensi dengan subgrup tersebut. Sebagai contoh, bila

$V=\{(e_G,e_H)$, (e_G,r), (e_G,r^2), (x,s_1), (x,s_2), (x,s_3), (x^2,e_H), (x^2,r), (x^2,r^2), (x^3,s_1), (x^3,s_2), (x^3,s_3), (x^4,e_H), (x^4,r), (x^4,r^2), (x^5,s_1), (x^5,s_3), $(x^5,s_3)\}$,

maka *A* adalah himpunan semua koordinat pertama, *B* adalah himpunan semua koordinat petama yang dipasangkan dengan e_H, *C* adalah himpunan semua koordinat kedua, dan *D* adalah himpunan semua koordinat kedua yang dipasangkan dengan e_G. Dngan demikian

$A=\{e_G, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}=G$

$B=\{e_G, x^2, x^4\}=\langle x^2\rangle$

$C=\{e_H, r, r^2, s_1, s_2, s_3\}=H$

$D=\{e_H, r, r^2\}$.

Karena *A*/*B* dan *C*/*D* berorde 2, isomorfisma φ harus isomorfisma identitas. Maka, subgrup V berkorespondensi dengan tripel (G / $\langle x^2\rangle$, H / $\langle r\rangle$, φ) , di mana φ : G / $\langle x^2\rangle$ $\to$ H / $\langle r\rangle$ didefinisikan dengan $\varphi(x\langle x^2\rangle)=s_1\langle r\rangle$.

Perhatikan bahwa kuosien yang berorde 6 hanyalah $G/1$ dan $H/1$, yang tidak isomorfis, sehingga $G\times H$ tidak mempunyai subgrup yang berkorespondensi dengan kuosien-kuosien ini.

2.4.Aplikasi Teorema Goursat

Kita dapat membentuk subgrup dari suatu darab langsung bila diberikan dua kuosien yang isomorfis yaitu dengan mencari semua pasangan terurut yang mungkin yang koordinat pertamanya diambil dari *A* dan koordinat keduanya diambil dari bayangan koset *A* / *B* dalam *C* / *D*. Cara tersebut mempermudah kita untuk mencari

ISBN : 978-979-16353-3-2

orde dan indeks subgrup dari suatu darab langsung berhingga, seperti yang dinyatakan dalam Teorema 6 berikut, yang diambil dari buku [**1**].

Teorema 6. Misal *G* dan *H* adalah grup berhingga, dan misal *U* adalah subgrup dari $G \times H$. Maka :

(a). $|A_U|.|D_U|$ = | *U* | = $|B_U|.|C_U|$.

(b). $[G : A_U].[H : D_U]$ = $[G \times H : U]$ = $[G : B_U].[G : C_U]$.

Teorema 7. Misal $G = H_1 \times ... \times H_n$ adalah grup berhingga di mana orde subgrup H_i dan H_{j_i} adalah relatif prima bila $i \neq j$. Bila U adalah subgrup dari G, maka $U = U \cap H_1 \times ... \times U \cap H_n$.

3.Kesimpulan dan Saran

Bila *A* adalah subgrup dari *G* dan *C* adalah subgrup dari *H*, maka $A \times C$ adalah subgrup dari $G \times H$. Selain itu diagonal dari $G \times G$, yang didefinisikan dengan *D* = $\{(g, g) \mid g \in D\}$, juga merupakan subgrup dari $G \times G$. Akan tetapi subgrup dari suatu darab langsung belum tentu merupakan darab langsung dari subgrup-subgrup.

Teorema Goursat yang intinya mengatakan bahwa struktur subgrup dari suatu darab langsung bergantung pada struktur kuosien dari grup faktor, memberikan prosedur yang sistematis untuk mencari semua subgrup dari suatu darab langsung. Dan secara persisnya diperoleh bahwa bila $G = H_1 \times ... \times H_n$ adalah grup berhingga di mana orde subgrup H_i dan H_{j_i} adalah relatif prima bila $i \neq j$. Bila U adalah subgrup dari G, maka $U = U \cap H_1 \times ... \times U \cap H_n$.

Disarankan mengingat keterbatasan waktu dalam perkuliahan, materi tersebut dibahas dalam bentuk kumpulan soal-soal latihan dan dijadikan tugas kelompok — dengan maksud agar pada akhir semester, teorema tersebut dapat dipahami dan dibuktikan tanpa banyak kesulitan.

ISBN : 978-979-16353-3-2

Daftar Pustaka

Crawford, R.R. and Wallace, K.D., *On the number of subgrup of index two—an application of Goursat's theorem,* Math.Mag.48 (1975) 172-174.

Gallian, J.A., *Contemporary Abstract Algebra*, 4th ed., Houghton Mifflin, Boston, 1998.

Hungerford, T.W., *Abstract Algebra*: *An Introduction*, 2nd ed., Brooks/Cole, Pacific Grove CA, 1997.

Petrillo, J., *Goursat's Other Theorem*, The College Mathematics Journal, Vol.40, No.2 (2009) 119-124