 ISBN : 978-979-16353-3-2

A.1

SPECTRUM PADA GRAF STAR (S_n) DAN GRAF BIPARTISI KOMPLIT ($K_{(m,n)}$) DENGAN $m,n \in \mathbb{N}$

Oleh
Imam Fahcruddin
Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Jln. Gajayana 50 Malang

ABSTRAK

Misalkan λ_1, λ_2, …, λ_n adalah nilai – nilai eigen berbeda dari matrik adjacent graf G dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing – masing λ_n, maka matrik berordo (2 *x* *n*) yang memuat λ_1, λ_2, …, λ_n pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G dan dinotasikan dengan Spec(G). Pada makalah ini akan dibahas spectrum graf star (S_n) dan graf bipartisi komplit ($K_{(m,n)}$) dengan *m,n* bilangan asli.

KATA KUNCI: spectrum, graf bipartisi komplit, graf star, nilai eigen, vektor eigen.

Graf G adalah pasangan (*V, E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *p*(*G*), dan banyaknya unsur di *E* disebut *ukuran* dari *G* dan dilambangkan dengan *q*(*G*). Jika yang dibicarakan hanya satu graf, maka order dan ukuran dari graf tersebut masing-masing ditulis *p* dan *q*. [1]

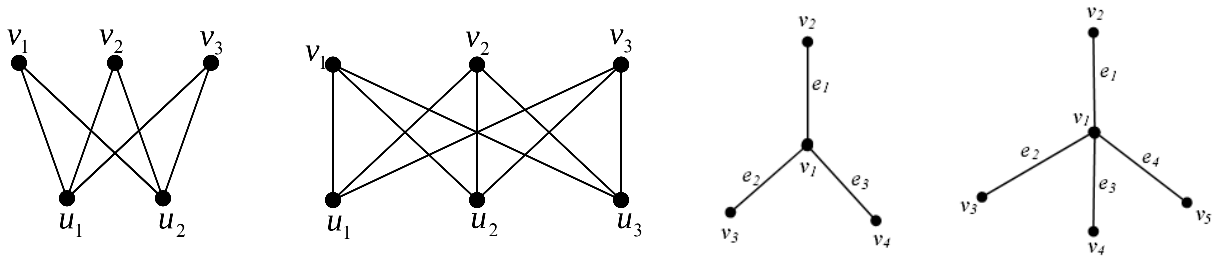
Sisi *e* = (*u, v*) dikatakan menghubungkan titik *u* dan *v*. Jika *e* = (*u, v*) adalah sisi di graf *G*, maka *u* dan *v* disebut *terhubung langsung* (*adjacent*), *v* dan *e* serta *u* dan *e* disebut *terkait langsung* (*incident*), dan *u, v* disebut *ujung* dari *e*. *Derajat dari titik v* di graf *G*, ditulis $\deg_G v$, adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung dengan *v*. Titik yang berderajat satu disebut *titik ujung*. Untuk selanjutnya, sisi *e* = (*u, v*) akan ditulis *e* = *uv*.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi dari graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y; X dan Y disebut himpunan partisi.

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{(m,n)}$. Graf Star adalah graf bipartisi komplit yang berbentuk $K_{(1,n)}$ yang ditulis dengan S_n .[2]

Misalkan $A(G)$ adalah matrik $n \times n$, $A(G)$ dikatakan sebagai matrik adjacent dari graf G apabila elemennya terdiri dari $a_{ij} = 1$ jika v_i dan v_j adjacenct, 0 untuk yang lainya. [3,7] Berikut ini adalah beberapa contoh dari graf bipartisi komplit dan graf star beserta matrik adjacent dari graf tersebut.



(a) $K_{2.3}$ (b) $K_{3,3}$ (c) S_3
(d) S_4

$$A(K_{(2,3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(K_{(3,3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } A(S_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan A adalah sebuah matriks adjacent dari graf G, maka suatu vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen *(eigen vektor)* dari A jika Ax adalah suatu kelipatan skalar dari x; yakni, $Ax = \lambda x$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matrik $n \times n$, kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ dengan

$(A - \lambda I)x = 0$. (1)

Agar λ menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan (1). Persamaan (1) akan memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$det(A - \lambda I)x = 0$. (2)

Persamaan (2) disebut persamaan karakteristik dari matrik *A*, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai – nilai eigen dari *A*. [4,5]

Misalkan λ_1, λ_2, …, λ_n adalah nilai – nilai eigen berbeda dari matrik adjacent graf *G* dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing – masing λ_n, maka matrik berordo (2 *x n*) yang memuat λ_1, λ_2, …, λ_n pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf *G* dan dinotasikan dengan Spec(G) [6]. Jadi, spectrum graf *G* dapat ditulis

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Pada makalah ini dibahas bentuk umum spectrum graf star (S_n) dan graf bipartisi komplit ($K_{(m,n)}$) dengan $m, n \in \mathbb{N}$. Bentuk umum spectrum dinyatakan sebagai teorema dan disertai buktinya. Dengan makalah ini, dapat diketahui pula penerapan konsep aljabar linier pada teori graf serta penemuan pola – pola tertentu khususnya spectrum suatu graf.

PEMBAHASAN

Pembahasan bentuk umum spectrum dari graf bipartisi komplit ($K_{(m,n)}$) dan graf star (S_n) dengan $m, n \in \mathbb{N}$ disajikan dalam teorema berikut beserta buktinya.

Teorema

Misal S_n adalah graf star dengan $m, n \in \mathbb{N}$, maka spectrum S_n adalah

$$\text{Spec}\,(S_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0^{n-1} & -\sqrt{n} \\ 1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti

Misalkan $A(S_{(n)})$ adalah matrik adjacent dari graf star $(S_{(n)})$, maka

$$A(S_{(n)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertama akan ditentukan nilai eigen dari $A(S_{(n)})$, dengan persamaan

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\det\left(A\left(S_{(n)}\right) - \lambda I\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Melalui operasi baris matrik $(A(S_n) \quad \lambda I)$ direduksi menjadi matrik segitiga atas diperoleh,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-1)}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \cdots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-2)}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \cdots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2-2)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} & \cdots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-4)}{(\lambda^2-3)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-(n-2))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-n)}{(\lambda^2-(n-1))} \end{pmatrix}$$

$\det\left(A(S_n) - \lambda I\right)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matrik segitiga atas tersebut. Jadi $\det\left(A(S_n) - \lambda I\right) = \frac{(-\lambda)}{\lambda^2}(-1)^n(\lambda)^n(\lambda^2 - n)$

$$0 = (-1)^{n+1}(\lambda)^{n-1}(\lambda^2 - n)$$

$$(-1)^{n+1}(\lambda)^{n-1} = 0 \quad \text{atau} \quad (\lambda^2 - n) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen atau .

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuain dengan .

Untuk diperoleh dengan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan persamaan - persamaan,

$x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0$ ... (i)

$x_1 = 0$ ... (ii)

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Sehingga vektor eigennya adalah

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 - \cdots - x_n \\ -x_2 - x_4 - \cdots - x_n \\ -x_2 - x_3 - x_5 - \cdots - x_n \\ -x_2 - x_3 - x_4 - x_6 - \cdots - x_n \\ \vdots \\ -x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi basis pada matrik diatas adalah $m(\lambda_1) = n - 1$

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{n}$, vektor eigennya diperoleh dengan ;

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \sqrt{n} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan persamaan - persamaan,

$\sqrt{n}x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0$

$x_1 = -\sqrt{n}x_2$

$x_1 = -\sqrt{n}x_3$

$\vdots$

$x_1 = -\sqrt{n}x_k$ untuk k = 2, 3, …, n

Sehingga vektor eigennya adalah

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_2 - x_3 - \cdots - x_n}{\sqrt{n}} \\ \dfrac{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \\ \vdots \\ \dfrac{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \end{pmatrix}$$

ISBN : 978-979-16353-3-2

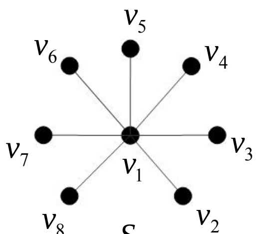
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \\ -\frac{\theta}{n} \\ \vdots \\ -\frac{\theta}{n} \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{n} \\ \vdots \\ -\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$ dengan $\theta = -x_2 - x_3 - \cdots - x_n$

Jadi basis pada matrik diatas adalah $m(\lambda_2) = 1$.

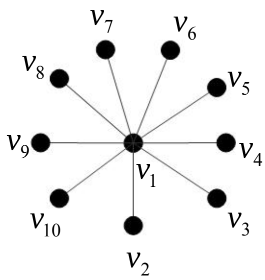
Dengan cara yang sama dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$. Jadi, terbukti bahwa

Spec $(S_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0^{n-1} & -\sqrt{n} \\ 1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

Berikut ini contoh spectrum dari graf S_7 dan S_9 dengan menggunakan teorema diatas.



S_7



S_9

Spec $S_7 = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & -\sqrt{7} \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ Spec $S_9 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema

Misal $K_{(m,n)}$ adalah graf bipartisi komplit dengan $m, n \in \mathbb{N}$, maka spectrum $K_{(m,n)}$ adalah

Spec $(K_{(m,n)}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0^{m+n-2} & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$

Bukti

Misalkan $A(K_{(m,n)})$ adalah matrik adjacent dari graf bipartisi komplit $(K_{(m,n)})$.

$$A(K_{(m,n)}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{ki} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2i} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3i} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{ki} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

dimana
$a_{ij} = 0$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, m$
$b_{kl} = 1$ dengan $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan $l = 1, 2, 3, \ldots, n$
Akan ditentukan nilai eigen $A(K_{(m,n)})$ dengan persamaan $det(A(K_{(m,n)}) - \lambda I) = 0$.

Melalui operasi baris matrik $(A(K_{(m,n)}) - \lambda I)$ direduksi menjadi matrik segitiga atas diperoleh,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & -\lambda & \ddots & \vdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)(\lambda^2-m)}{\lambda^2} & \frac{m\lambda}{\lambda^2} & \frac{m\lambda}{\lambda^2} & \cdots & \frac{m\lambda}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)(\lambda^2-2m)}{(\lambda^2-m)} & \frac{m\lambda}{(\lambda^2-m)} & \cdots & \frac{m\lambda}{(\lambda^2-m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)(\lambda^2-3m)}{(\lambda^2-2m)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \frac{m\lambda}{(\lambda^2-m(n-2))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)(\lambda^2-mn)}{(\lambda^2-m(n-1))} \end{pmatrix}$$

$det(A(K_{(m,n)}) - \lambda I)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matrik segitiga atas tersebut.

$$det(A(K_{(m,n)}) - \lambda I) = \frac{(-1)^m(\lambda)^m}{\lambda^2}(-1)^n(\lambda)^n(\lambda^2 - mn)$$

$$0 = \frac{(-1)^m(\lambda)^m(-1)^n(\lambda)^n}{\lambda^2}(\lambda^2 - mn)$$

$$0 = \frac{(-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n}}{\lambda^2}(\lambda^2 - mn)$$

$$0 = (-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n-2}(\lambda^2 - mn)$$

$$(-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n-2} = 0 \quad \text{atau} \quad (\lambda^2 - mn) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen atau .

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuain dengan .

Untuk λ_1 diperoleh dengan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan persamaan - persamaan,

$y_1 + y_2 + \cdots + y_{(n-1)} + y_n = 0$ ... (i)

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{(m-1)} + x_m = 0$ ...(ii)

Persamaan (i) dan (ii) dapat kita tulis

$y_1 = -y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n$ dan $x_1 = -x_2 - \dots - x_{(m-1)} - x_m$

Sehingga vektor eigennya adalah

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - \dots - x_{(m-1)} - x_m \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ -y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{(m-1)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + y_{(n-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Jadi basis pada matrik diatas adalah

$m(\lambda_1) = m - 1 + n - 1 = m + n - 2$

Misalkan $\lambda_2 = \sqrt{mn}$, vektor eigennya diperoleh dengan ;

$$\begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \sqrt{mn} & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{mn} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \sqrt{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \sqrt{mn} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \sqrt{mn} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan persamaan - persamaan pertama,

$$\sqrt{mn}\, x_1 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{(n-1)} + y_n = 0$$

$$\sqrt{mn}\, x_2 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{(n-1)} + y_n = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{mn}\, x_m + y_1 + y_2 + \cdots + y_{(n-1)} + y_n = 0$$

Dapat ditulis dengan

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_{(m-1)} = x_m = \frac{-y_1 - y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n}{\sqrt{mn}}$$

Persamaan – persamaan kedua,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{(m-1)} + x_m + \sqrt{mn}\, y_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{(m-1)} + x_m + \sqrt{mn}\, y_2 = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{(m-1)} + x_m + \sqrt{mn}\, y_n = 0$$

Dapat ditulis dengan

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_{(n-1)} = y_n = \frac{-x_1 - x_2 - \dots - x_{(m-1)} - x_m}{\sqrt{mn}}$$

Akhirnya didapatkan vektor eigennya adalah

ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y_1 - y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-y_1 - y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ \frac{-y_1 - y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-y_1 - y_2 - \dots - y_{(n-1)} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-x_1 - x_2 - \dots - x_{(m-1)} - x_m}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ \frac{-x_1 - x_2 - \dots - x_{(m-1)} - x_m}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-x_1 - x_2 - \dots - x_{(m-1)} - x_m}{\sqrt{mn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ \vdots \\ -s \\ -s \\ \frac{-ms}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ \frac{-ms}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-ms}{\sqrt{mn}} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \\ \frac{-m}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ \frac{-m}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-m}{\sqrt{mn}} \end{pmatrix}$$

dengan $s = \dfrac{y_1 + y_2 + \dots + y_{(n-1)} + y_n}{\sqrt{mn}}$

sehingga didapatkan $m(\lambda_2) = 1$ dan dengan cara yang sama dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$

Berdasarkan pernyataan diatas, maka terbukti bahwa

Spec $\left(K_{(m,n)}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0^{m+n-2} & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa spectrum dari graf bipartisi komplit $(K_{(m,n)})$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$ adalah

$$\text{Spec } \left(K_{(m,n)}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0^{m+n-2} & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

dan graf star (S_n) dengan $n \in \mathbb{N}$ adalah

$$\text{Spec } (S_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0^{n-1} & -\sqrt{n} \\ 1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Disarankan kepada pembaca untuk menentukan spectrum graf lainya misalnya graf roda, graf kipas, dan graf buku.

ISBN : 978-979-16353-3-2

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graf and Digraf 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc. (4)

[2] Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graf Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd. (1-4)

[3] Evans, R, James. 1992. *Optimization Algorithms for Networks and Graphs.* New York: Marcel Dekker, INC. (28)

[4] Anton, Howard. & Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga. (384-387)

[5] Meyer, D, Carl. 2009. *Matrix Analysis and Applied Linier Algebra.* Siam Organization. (490-492)

[6] Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory.* London: Cambridge University Press. (9,50)

[7] Harary, Frank. 1969. *Graph Theory.* Canada: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (150)