ISBN : 978-979-17763-3-2

PERLUASAN KETAKSAMAAN HILBERT DENGAN KONSTANTA TERBAIK(*)

Oleh

Ahmadin

Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,

Universitas Airlangga, Surabaya, Indonesia

e-mail: cak_ahmadin@yahoo.com

ABSTRAK

Pada makalah ini akan dibuktikan bahwa:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy < C\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\int_0^\infty g^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

dengan C adalah konstanta terbaik, yang mana dapat dipandang sebagai perluasan dari ketaksamaan Hilbert.

Kata Kunci : Perluasan Ketaksamaan Hilbert, Konstanta Terbaik.

(*) Disajikan dalam acara Seminar Nasional Pendidikan Matematika yang diselenggarakanoleh HIMATIKA FMIPA UNY pada hari Sabtu tanggal 16 April 2011.

ISBN : 978-979-17763-3-2

1. PENDAHULUAN

Jika f, g fungsi bernilai real sedemikian sehingga $0 < \int_0^\infty f^2(x)\,dx < \infty$ dan $0 < \int_0^\infty g^2(x)\,dx < \infty$, maka berlaku:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx\,dy < \pi \left\{ \int_0^\infty f^2(x)\ dx \int_0^\infty g^2(x)\ dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

yang mana dikenal dengan ketaksamaan Hilbert. [Hardy ,*et.al.*, 1934]**.**

Pada makalah ini akan dibuktikan bahwa:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\ dx\,dy < C \left\{ \int_0^\infty f^2(x)\ dx \int_0^\infty g^2(x)\ dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

dengan C adalah suatu konstanta positif.

2. PEMBAHASAN

Lemma 2.1 Misalkan

$$\omega(u) = \int_0^\infty \frac{1}{A(u+v)+B|u-v|} (\frac{u}{v})^{\frac{1}{2}}\ dv \tag{3}$$

dengan $A > 0$ dan $B > -A$, maka $\omega(u) = C(A, B)$ adalah konstan.

Khususnya $C(1,0) = \pi$ dan $C(1,1) = 2.$

Bukti: Misalkan $t = \dfrac{v}{u}$ berarti $dv = u\,dt$ maka (3) menjadi

$$\begin{aligned}
\omega(u) &= \int_0^\infty \frac{1}{A(u+tu)+B|u-tu|} (\frac{u}{tu})^{\frac{1}{2}}\ u\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{u\{A(1+t)+B|1-t|\}} (\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}\ u\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{A(1+t)+B|1-t|}\ t^{-\frac{1}{2}}\ dt.
\end{aligned}$$

Oleh karena $|1-t| = \begin{cases} 1-t\ ,\ 0 \le t < 1 \\ t-1\ ,\ t > 1 \end{cases}$, maka diperoleh

ISBN : 978-979-17763-3-2

$$\omega(u) = \int_0^1 \frac{1}{A(1+t)+B(1-t)}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt + \int_1^\infty \frac{1}{A(1+t)+B(t-1)}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt + \int_1^\infty \frac{1}{(A-B)+(A+B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

Jika pada integral yang kedua, dimisalkan $t = \frac{1}{x}$, maka $dt = -\frac{1}{x^2}dx$ dan

$$\omega(u) = \int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt + \int_1^\infty \frac{1}{(A-B)+(A+B)\frac{1}{x}}\, x^{\frac{1}{2}}\, (-\frac{1}{x^2})\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt - \int_1^\infty \frac{1}{(A+B)+(A-B)x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

Jika t menuju 1, maka x menuju 1 dan jika t menuju tak berhingga , maka x menuju 0. Sehingga

$$\omega(u) = \int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt - \int_1^0 \frac{1}{(A+B)+(A-B)x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt + \int_0^1 \frac{1}{(A+B)+(A-B)x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

Misalkan $t^{\frac{1}{2}} = x$, maka $dt = 2x\,dx$, dan

$$\omega(u) = 2\int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)\,x^2}\, \frac{1}{x}\, 2x\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \frac{1}{A+B+(A-B)\,x^2}\, dx$$

$$= \frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{A-B}{A+B}x^2}\, dx$$

Dari fakta di atas, kita memandang kasus-kasus berikut.

(i) Untuk $A = B$, maka

ISBN : 978-979-17763-3-2

$$\omega(u)=\frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{A-B}{A+B}x^2}\,dx=\frac{4}{2A}\int_0^1 dx=\frac{2}{A}$$

(ii) Untuk $-A<B<A$, diperoleh

$$\omega(u)=\frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{A-B}{A+B}x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\,x\right)^2}\,d\left(\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\,x\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{A^2-B^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\,x\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{4}{\sqrt{A^2-B^2}}\arctan\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}$$

(iii) Untuk $0<A<B$, diperoleh

$$\omega(u)=\frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{A-B}{A+B}x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{B-A}{A+B}x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{A+B}\int_0^1 \frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}}\,d\left(\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{B^2-A^2}}\int_0^1 \frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right)^2}\,d\left(\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right),$$

Karena

ISBN : 978-979-17763-3-2

$$\frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right)^2}=\frac{P}{1-\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x}+\frac{Q}{1+\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x}$$

$$1\equiv P\left(1+\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right)+Q\left(1-\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right),$$

maka $P=\frac{1}{2}$, untuk $x=\sqrt{\frac{A+B}{B-A}}$,

Sedangkan jika $x=-\sqrt{\frac{A+B}{B-A}}$, maka $Q=\frac{1}{2}$. Oleh karena itu

$$\omega(u)=\frac{4}{\sqrt{B^2-A^2}}\int_0^1\left(\frac{1/2}{1+\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}}+\frac{1/2}{1-\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}}\right)d\left(\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\left\{\ln\left|1+\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right|-\ln\left|1-\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}\,x\right|\right\}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}}{1-\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\ln\left|\frac{1+2\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}+\frac{B-A}{A+B}}{1-\frac{B-A}{A+B}}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\ln\left|\frac{A+B+2(A+B)\sqrt{\frac{B-A}{A+B}}+B-A}{A+B-B+A}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\ln\left|\frac{2B+2\sqrt{B^2-A^2}}{2A}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\ln\frac{B+\sqrt{B^2-A^2}}{A}$$ adalah konstan.

Khususnya

ISBN : 978-979-17763-3-2

Jika $A=1,\ B=0,$ maka $\omega(u)=\dfrac{4}{\sqrt{1^2-0^2}}\ \arctan\sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}}=4\arctan 1=4(\pi/4)=\pi$

, dan $\omega(u)=\dfrac{2}{1}=2$, untuk $A=B=1.$ □

Lemma 2.2 Misalkan $\varepsilon>0,\ A>0$ dan $B>-A$, maka

$$\int_1^{\infty} x^{-\varepsilon-1}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{A(1+t)+B|1-t|}\,t^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}\,dt\,dx=O(1)\ (\varepsilon\to 0^+) \qquad (4)$$

Bukti: Untuk $x\geq 1$, ada $\varepsilon>0$ yang cukup kecil sehingga $1+\dfrac{-1-\varepsilon}{2}>0$.

Kita punya

$$\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{A(1+t)+B|1-t|}\,t^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}\,dt<k\int_0^{\frac{1}{x}}t^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}\,dt=\frac{k}{1-(1+\varepsilon)/2}\,t^{1-\frac{1+\varepsilon}{2}}\Bigg]_0^{\frac{1}{x}}=\frac{k}{\beta}\,x^{-\beta}.$$

dengan $k=\dfrac{1}{A}$ atau $k=\dfrac{1}{A+B}$ dan $\beta=1-\dfrac{1+\varepsilon}{2}$. Jika dipilih $a=\dfrac{1}{4}$ dan $\varepsilon<\dfrac{1}{2}$,

diperoleh $\dfrac{x^{-\beta}}{\beta}<\dfrac{x^{-a}}{a}$. Sehingga:

$$\int_1^{\infty} x^{-\varepsilon-1}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{A(1+t)+B|1-t|}\,t^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}\,dt\,dx<\int_1^{\infty}x^{-\varepsilon-1}\frac{k}{\beta}x^{-\beta}dx<\int_1^{\infty}x^{-\varepsilon-1}\frac{k}{a}x^{-a}dx$$

$$=\frac{k}{a}\int_1^{\infty}x^{-\varepsilon-1-a}dx=\frac{k}{a}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\varepsilon-1-a}dx=\frac{k}{a}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{-\varepsilon-a}x^{-\varepsilon-a}\Bigg|_1^b=\frac{k}{a}\left(\frac{1}{-\varepsilon-a}\right)(0-1)$$

$$=\frac{k}{a}\left(\frac{1}{\varepsilon+a}\right)<\frac{k}{a^2}=16k.$$

□

Teorema 2.3 Misalkan $f(x)\geq 0,\quad g(x)\geq 0,\ 0<\int_0^{\infty}f^2(x)\,dx<\infty$,

$0<\int_0^{\infty}g^2(x)\,dx<\infty,\ A>0$ dan $B>-A$. Maka

ISBN : 978-979-17763-3-2

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy < C\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\int_0^\infty g^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

dengan C adalah suatu konstanta terbaik.

Bukti: Dengan ketaksamaan Hölder , diperoleh

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{f(x)}{\left[A(x+y)+B|x-y|\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}\times\left\{\frac{g(y)}{\left[A(x+y)+B|x-y|\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}dx\,dy$$

$$\leq\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f^2(x)}{\left[A(x+y)+B|x-y|\right]}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}dx\,dy\times\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{g^2(y)}{\left[A(x+y)+B|x-y|\right]}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx\,dy$$

Didefinisikan fungsi bobot $\omega(u)$ sebagai

$$\omega(u):=\int_0^\infty\frac{1}{A(u+v)+B|u-v|}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}dv\,.$$

Maka ketaksamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy\leq\left[\int_0^\infty\varpi(x)\,f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.\left[\int_0^\infty\varpi(y)\,g^2(y)\,dy\right]^{\frac{1}{2}}$$

Dengan lemma 2.1, diperoleh $\varpi(u)=C$, sehingga diperoleh:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy\leq\left\{\int_0^\infty C\,f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty C\,g^2(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=C\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

$$=C\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ISBN : 978-979-17763-3-2

Untuk $0<\varepsilon<1$, misalkan:

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases} x^{\frac{-\varepsilon-1}{2}} &, \ untuk \ \ x\in[1,\infty) \\ 0 &, \ untuk \ \ x\in(0,1) \end{cases} \quad \text{dan} \quad g_\varepsilon(y)=\begin{cases} y^{\frac{-\varepsilon-1}{2}} &, \ untuk \ \ y\in[1,\infty) \\ 0 &, \ untuk \ \ y\in(0,1) \end{cases}.$$

Asumsikan C bukan konstanta terbaik, maka ada bilangan positif M dengan $M<C$, sehingga persamaan (5) tetap berlaku dengan menukar C dengan M. Oleh karena itu:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy < M\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\int_0^\infty g^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= M\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{\varepsilon}$$

Karena $\int_0^\infty \frac{1}{A(1+t)+B|1-t|}\,t^{\frac{-1-\varepsilon}{2}}\,dt = C+o(1)\ (\varepsilon\to 0^+)$,

misalkan $y=xt$, maka dengan persamaan (4), diperoleh:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy = \int_1^\infty\int_1^\infty \frac{x^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}\,y^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(x+y)+B|x-y|}\,dx\,dy$$

$$= \int_1^\infty\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{x^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}\,(tx)^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(1+t)+B|1-t|}\,dx\,dt$$

$$= \int_1^\infty x^{-\varepsilon-1}\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{t^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(1+t)+B|1-t|}\,dx\,dt$$

$$= \int_1^\infty x^{-\varepsilon-1}\left\{\int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{t^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(1+t)+B|1-t|}\,dt + \int_0^\infty \frac{t^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(1+t)+B|1-t|}\,dt\right\}dx$$

$$= \int_1^\infty x^{-\varepsilon-1}\left\{\int_0^\infty \frac{t^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(1+t)+B|1-t|}\,dt - \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t^{\frac{-\varepsilon-1}{2}}}{A(1+t)+B|1-t|}\,dt\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\{C+o(1)\}$$

ISBN : 978-979-17763-3-2

Karena $\varepsilon > 0$ cukup kecil, maka $C + o(1) < M$. Sehingga $C \leq M$ yang mana bertentangan dengan hipotesis. Sehingga C adalah konstanta terbaik.

□

3. KESIMPULAN

Kataksamaan Hilbert bentuk $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y} dx\,dy < \pi \left\{ \int_0^\infty f^2(x)\,dx \int_0^\infty g^2(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}$

dapat diperluas ke dalam bentuk

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{A(x+y) + B|x-y|}\,dx\,dy < C\left\{ \int_0^\infty f^2(x)\,dx \int_0^\infty g^2(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dengan C adalah konstanta terbaik.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada KK Analisis atas dukungannya dalam penulisan makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmadin. 2010. Extension of Hilbert’s Inequality. Seminar Nasional Pendidikan Matematika UNY 2010.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya. 1934. *Inequalities.* Cambridge University Press.

Li , Yongjin. Lin, Yu. He, Bing. 2008. On Certain Extension of Hilbert’s Integral Inequality with Best Constants. *Kyungpook Math* . J. 48: 457-463.

Purcell J. Edwin, Varberg. D., Rigdon. E. Steven. 2003. *Kalkulus,*, edisi kedelapan . Penerbit Erlangga.