ISBN : 978-979-17763-3-2

ANALISIS KESTABILAN SISTEM GERAK PESAWAT TERBANG DENGAN MENGGUNAKAN METODE NILAI EIGEN DAN ROUTH - HURWITZ(*)

Oleh
Ahmadin
Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Airlangga, Surabaya, Indonesia
e-mail: cak_ahmadin@yahoo.com

ABSTRAK

Kestabilan sistem gerak pesawat terbang adalah mutlak diperlukan terutama ketika sedang terbang. Oleh karena itu diperlukan pengujian kestabilan modelnya, diantaranya adalah dengan menggunakan Metode Nilai Eigen dan Routh-Hurwitz. Dari hasil pengujian diperoleh bahwa sistem gerak pesawat terbang adalah stabil asimtotik

Kata Kunci : Kestabilan, Sistem Gerak Pesawat Terbang, Nilai Eigen, Routh-Hurwitz, Stabil Asimtotik.

(*) Disajikan dalam acara Seminar Nasional Pendidikan Matematika yang diselenggarakan oleh HIMATIKA FMIPA UNY pada hari Sabtu tanggal 16 April 2011

ISBN : 978-979-17763-3-2

1. PENDAHULUAN

Kestabilan sistem gerak pesawat terbang merupakan hal penting yang harus ditentukan. Jika sistemnya linier dan parameternya (koefisiennya) konstan dapat digunakan beberapa metode, diantaranya adalah dengan menggunakan Metode Nilai Eigen dan Routh-Hurwitz.

1.1. Kestabilan Nilai Eigen

Definisi 1.1 Diberikan P.D. $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$, penyelesaian dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0}$,diberi notasi $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x_0})$. Suatu vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut suatu titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}$ disebut stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $\|\boldsymbol{x_0} - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}$ disebut stabil asimtotik jika stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \bar{x}\| = 0$ untuk $\|\boldsymbol{x_0} - \bar{x}\| < \delta_1$.

Teorema 1.2 Diberikan PD $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dengan A matrik n x n dan nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$ $(k \leq n)$. Titik asal $\boldsymbol{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $R_e\, \lambda_i < 0$ untuk $i = 1,2, \cdots, k$. Titik asal $\boldsymbol{x} = 0$ adalah stabil jika $R_e\, \lambda_i \leq 0$ dan jika setiap nilai eigen $R_e\, \lambda_i = 0$ berkorespondensi sebanyak vektor eigen bebas linier sebagai kelipatan dari λ_i.

1.2. Kestabilan Routh-Hurwitz

Nilai eigen dari A adalah akar dari polinomial karakteristik

$\det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Dengan kriteria Routh - Hurwitz kestabilan A dapat dicek langsung dengan mempertimbangkan koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar dari polinomial secara eksplisit.

Prosedur dan kriteria Routh-Hurwitz adalah sebagi berikut :

1. Tulislah polinomial dalam λ sesuai dengan bentuk berikut :

   $$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad \text{(1)}$$

   dimana koefisien-koefisien tersebut konstanta riil.

ISBN : 978-979-17763-3-2

2. Jika ada koefisien-koefisien bernilai nol atau negatif dimana paling tidak terdapat satu koefisien bernilai positif maka terdapat satu atau lebih akar kompleks yang mempunyai bagian riil positif, oleh karena itu pada kasus ini sistem tidak stabil. Agar diperoleh akar yang mempunyai bagian riil negatif, maka semua koefisiennya harus positif. Harus diingat bahwa kondisi semua koefisien bernilai positif adalah belum cukup untuk menjamin kesatabilan.
3. Jika semua koefisien bernilai positif, susunlah koefisien polinomial tersebut dalam baris dan kolom sesuai dengan pola berikut :

λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
λ^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
λ^2	e_1	e_2			
λ	f_1				
λ^0	g_1				

koefisien-koefisien b_1, b_2, b_3 dan seterusnya di hitung sebagai berikut :

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1};\ b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1};\ b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1};\ \cdots$$

Perhitungan koefisien b_i dilanjutkan sampai dengan nilai $b_i = 0$, untuk semua i = 1,2,… . Pola yang sama dari perkalian silang koefisisen - koefisien, dan baris diatasnya digunakan dalam menghitung koefisien c_i , d_i , e_i dan seterusnya.

Jadi :

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1};\ c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1};\ c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1a_4}{b_1};\ \cdots$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1};\ d_1 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1};\ d_3 = \frac{c_1b_4 - b_1c_4}{c_1};\ \cdots$$

Proses ini berlangsung sampai baris ke-n telah diselesaikan. Perhatikan bahwa dalam membuat susunan tersebut, suatu baris dapat dibagi atau dikalikan dengan

ISBN : 978-979-17763-3-2

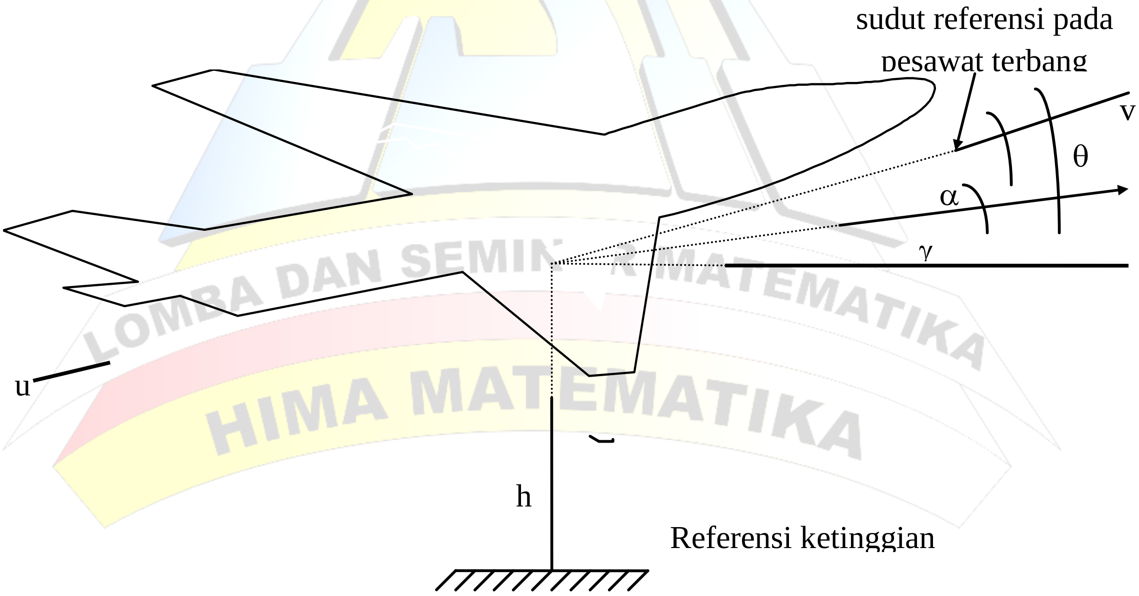
suatu bilangan positif untuk menyederhanakan perhitungan numerik berikutnya tanpa mengubah kesimpulan kestabilan. Perlu diperhatikan bahwa harga eksak dari suku-suku pada kolom pertama tidak perlu diketahui, hanya diperlukan tandanya saja.

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz menyatakan bahwa syarat perlu dan cukup semua akar-akar persamaan (1) mempunyai bilangan riil negatif adalah bahwa semua koefisen persamaan (1) bernilai positif dan semua suku pada kolom pertama dari susunan tersebut harus bertanda positif.

2. PEMBAHASAN

2.1. Model Sistem Gerak Pesawat Terbang

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 1.

Pendekatan persamaan sistem gerak pesawat terbang dalam posisi mendongak dan menukik bagi suatu pesawat terbang dalam keadaan mendekati tunak arah terbang horisontal dapat ditunjukkan dengan :

Pandang persamaan gerak lurus berbentuk : $s = v\ t$ .... (2)

ISBN : 978-979-17763-3-2

Karena kecepatan merupakan laju perubahan jarak terhadap waktu maka (2) dapat ditulis sebagai : $s = \frac{ds}{dt} t = \dot{s} t$

Untuk gerak melingkar analog.

$\gamma = \dot{\gamma} t$ dan $\alpha = \dot{\alpha} t$

Karena laju perubahan sudut γ terhadap waktu sebanding dengan laju perubahan sudut α terhadap waktu, maka :

$\dot{\alpha} = m\dot{\gamma}$, $m \in [0, \infty]$

$$\alpha = m\dot{\gamma} t = \dot{\gamma}\ \psi \qquad (3)$$

Pandang persamaan gerak linier berbentuk :

$$v^2 = v_0^2 + 2\ a\ s \qquad (4)$$

Untuk gerak melingkar analog :

$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\ \ddot{\theta}\ \theta$

$\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 / (2\theta) - \dot{\theta}_0^2\ / (2\theta)$

Jika $\dot{\theta}^2 / (2\theta) = \omega_0^2\ Q\ \delta$ dan $\dot{\theta}_0^2\ / (2\theta) = \omega_0^2 \alpha$,

Maka : $\ddot{\theta} = \omega_0^2\ Q\ \delta - \omega_0^2 \alpha$

$$= -\ \omega_0^2\ (\alpha - Q\ \delta) \qquad (5)$$

Tinggi pesawat terbang dengan tanah yaitu :

$h = h_0 + \sin \gamma\ s$

Karena hampir stabil maka $\gamma \approx 0$, berarti $\sin \gamma = \gamma$ sehingga :

$h = h_0 + \gamma\ v\ t$

$$\dot{h} = v\ \gamma \qquad (6)$$

Dari gambar 1 jelas bahwa : $\gamma = \theta - \alpha$ .... (7)

dengan:

γ = Sudut jalur penerbangan relatif terhadap horisontal

θ = Gangguan sudut mendongak

α = Gangguan sudut serangan

v = Besar kecepatan terhadap permukaan tanah (konstan)

u = Sudut pengendali defleksi elevator (kontrol)

ISBN : 978-979-17763-3-2

Q = Keefektifan elevator (konstan)

ψ = Tetapan waktu lift

ω_0 = Frekuensi alami yang tak teredam dalam mendongak dan menukik (konstan).

Sebuah autopilot dirancang untuk mempertahankan $\Delta h \approx 0$ (stabil) terhadap ganguan-gangguan angin yang bersifat vertikal.

Dengan menggunakan sebuah gyro untuk mengukur θ , akan ditunjukkan bahwa sistem loop tertutup adalah stabil dapat dibangun dengan umpan balik

$u = -k_1h - k_2\theta$ .... (8)

2.2. Sistem Persamaan Diferensial Linier $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

Dari Persamaan (3),(5),(6), dan (7) dibawa ke sistem persamaan diferensial linier $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\psi\dot{\gamma} = \alpha$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2(\alpha - Q\,\delta)$$

$$\dot{h} = v\,\gamma$$

$$\gamma = \theta - \alpha$$

$$u = -k_1h - k_2\theta$$

Selanjutnya ,

Misalkan : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ maka $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$

berarti :

$\dot{x}$ $\dot{h}$

$$\dot{x}_1 = \dot{\gamma} = \alpha/\psi = 1/\psi\,(\theta - \gamma) = 1/\psi\,(x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta} = -\omega_0^2(\alpha - Q\,\delta)$$

$$= -\omega_0^2(\theta - \gamma - Q\,\delta)$$

$\ddot{\theta}$

ISBN : 978-979-17763-3-2

$$= -\omega_0^2 (x_2 - x_1 - Q\,\delta)$$

$$= -\omega_0^2 (x_2 - x_1) + \omega_0^2 Q\,\delta, \text{ karena } Q\delta = u \text{ , maka :}$$

$$= -\omega_0^2 (x_2 - x_1) + \omega_0^2 u$$

$$\dot{x}_4 = \dot{h} = v\,\gamma = v\,x_1$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial linier berbentuk :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1/\psi & 1/\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix} u$$

Jika diambil nilai $\psi = 1$, $\omega_0^2 = 1$, dan $v = 1$, maka :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Jika h dan θ kuantitas yang diukur maka fungsi ouputnya adalah :

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

2.3. Kestabilan Sistem GerakPesawat Terbang

Kestabilan adalah hal yang sangat penting yang perlu diperhatikan untuk mempertahankan ketinggian sebuah pesawat terbang dengan menggunakan autopilot. Pada kali ini kestabilan sistem gerak pesawat terbang akan di uji dengan menggunakan Metode Nilai Eigen dan Routh-Hurwitz.

2.3.1. Metode Nilai Eigen

ISBN : 978-979-17763-3-2

Pandang sistem persamaan diferensial :

$\dot{x} = Ax + B\boldsymbol{u}$ .... (9)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-k_1 h - k_2 \theta)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-k_1 \boldsymbol{x_4} - k_2 \boldsymbol{x_2})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1-k_2 & 0 & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Sehingga persamaan (10) dapat di tulis dalam bentuk :

$\dot{x} = Ax$

Dari teorema 1.2 berlaku :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+k_2 & \lambda & k_1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\ [\lambda(\lambda^2+1+k_2)]\ + 1[1(-\lambda+k_1)]$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + (1+k_2)\,\lambda^2 + k_2\lambda + k_1 = 0$$

Jika diambil nilai $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$ maka :

ISBN : 978-979-17763-3-2

$\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

Pandang persamaan : $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ dan

$y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$

Berarti $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$

Misalkan y_1 adalah akar riil dari persamaan pangkat tiga dari :

$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_4)y + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4) = 0$

$y^3 - 3y^2 - 2y + 7 = 0$

Berarti : $b_1 = -3$, $b_2 = -2$, $b_3 = 7$

Misalkan : $Q = (3b_2 - b_1^2) / 9 = -5/3$

$R = (9b_1b_2 - 27b_3 - 2b_1^3) / 54 = -3/2$

Diskriminan dari persamaan pangkat tiga di atas adalah :

$D = Q^3 + R^2 = -257 / 108$

Karena diskriminan dari persamaan pangkat tiga di atas lebih kecil dari nol maka persamaan pangkat tiga di atas mempunyai tiga akar riil.

diperoleh : $y_1 = 2\sqrt{-Q} \cos(\theta/8) - b_1 / 8$ dimana : $\cos\theta = R/\sqrt{-Q^3}$

$y_1 = 2{,}847$ $= -0{,}697$

$\theta = 134{,}187$

Penyelesaian empat akar persamaan semula adalah :

$\lambda^2 + 1/2 \, [\, a_1 \pm \sqrt{(a_1^2 - 4a_2 + 4y_1)}\,]\lambda + 1/2 \, [\, y_1 \pm \sqrt{(y_1^2 - 4a_4)}\,] = 0$

Kemungkinan 1 : $\lambda^2 + 0{,}811\lambda + 2{,}436 = 0$

2 : $\lambda^2 + 0{,}188\lambda + 0{,}410 = 0$

Diperoleh nilai : $\lambda_1 = -0{,}4055 + 1{,}507\ i$

$\lambda_2 = -0{,}4055 - 1{,}507\ i$

$\lambda_3 = -0{,}094 + 0{,}6335\ i$

$\lambda_4 = -0{,}094 - 0{,}6335\ i$

dimana : $i = \sqrt{-1}$ adalah bilangan imajiner .

Karena semua nilai eigen mempunyai bagian riil kurang dari nol , maka sistem gerak pesawat terbang stabil asimtotik .

ISBN : 978-979-17763-3-2

2.3.2. Metode Routh - Hurwitz

Nilai eigen dari *A* adalah akar dari polinomial karakteristik :

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 + \lambda^3 + (1+k_2)\,\lambda^2 + k_2\lambda + k_1 = 0$$

Dengan kriteria Routh-Hurwitz kestabilan *A* dapat dicek langsung dengan mempertimbangkan koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar dari polinomial secara eksplisit sebagai berikut :

$$\lambda^4 + \lambda^3 + (1+k_2)\,\lambda^2 + k_2\lambda + k_1 = 0 \quad \text{...} \quad (11)$$

dimana :

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1+k_2$, $a_3 = k_2$, $a_4 = k_1$

Agar semua koefisien(32) bertanda positif, maka :

$1+k_2 > 0$ dan $k_2 > 0$ dan $k_1 > 0$,

berarti $k_2 > -1$ dan $k_2 > 0$ dan $k_1 > 0$,

Sehingga : $k_1 > 0$ dan $k_2 > 0$

Selanjutnya dibuat susunan sebagai berikut :

λ^4	1	$1+k_2$	k_1	0
λ^3	1	k_2	0	
λ^2	1	k_1	0	
λ^1	k_2-k_1	0		

Agar semua suku pada kolom pertama dari susunan tersebut bertanda positif, maka :

$k_2 - k_1 > 0$ dan $k_1 > 0$, berarti :

$k_2 > k_1$ dan $k_1 > 0$ .... (12)

Menurut kriteria Routh - Hurwitz agar sistem gerak pesawat terbang stabil asimtotik maka diambil nilai $k_1 > 0$ dan $k_2 > k_1$.

3. KESIMPULAN

ISBN : 978-979-17763-3-2

1. Pengujian kestabilan model sistem gerak pesawat terbang dengan menggunakan metode Nilai Eigen dan Routh-Hurwitz adalah stabil asimtotik
2. Sistem gerak pesawat terbang adalah stabil artinya gaya ke atas hampir sama dengan gaya gravitasi sehingga perubahan ketinggiannya mendekati nol ($\Delta h \approx 0$).
3. Sistem gerak pesawat terbang adalah stabil asimtotik artinya gaya ke atas sama dengan gaya gravitasi sehingga perubahan ketinggiannya sama dengan nol ($\Delta h = 0$).

DAFTAR PUSTAKA

Ahmadin. 2001. *Analisis Kestabilan Sistem Linier Waktu Kontinu*. Skripsi. Universitas Airlangga. Surabaya.

Halliday and Resnick. 1978. *Physics*. Third Edition. John Wiley & Sons. Inc.

Kailath, T. 1980. *Linear System*. Prentice Hall. Englewood Cliffts. N.J.

Ogata, K.1970. *Modern Control Enginering*. Prentice Hall. Englewood Cliffts. N.J.

Olsder, G.J. 1994. *Mathematical System Theory*. First Edition. T.U. Delf. Netherlands.

Spiegel, Murray R. 1968. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. McGraw-Hill. Inc.

Zill, Dennis G. 1993. *A First Diferential Equations*. Fifth Edition. PWS-KENT. Publishing Company. Boston.