ISBN : 978-979-17763-3-2

# MODEL MATEMATIKA UNTUK STRATEGI MENGUNGSI-RELOKASI PADA BERPELITA (Buku cERdas PEnduduk Lereng gunung apI Tergolong Aktif)[1)2)]

*Oleh: Nabih Ibrahim Bawazir*[3]

## ABSTRAK

Meletusnya Gunung Merapi pada tahun 2010 mengakibatkan terhentinya aktivitas warga selama lebih dari dua minggu. Besarnya gangguan yang ditimbulkan diakibatkan jumlah material vulkanik yang telah dikeluarkan sejak erupsi pada 26 Oktober 2010 hingga penghujung tahun 2010 telah mencapai 150 juta meter kubik (Kompas.com:2010). Pemerintah menginstruksikan warga untuk mengungsi. Sayangnya, belum ada sistem pengungsian yang terkoordinir dengan baik. Selain itu, biaya transportasi pengungsian dan relokasi menjadi sangat besar. Berdasarkan uraian masalah di atas, masalah dapat dirumuskan dengan "Bagaimana menyusun rute antara lokasi pengungsian dan lokasi relokasi agar biaya transportasi relokasi minimum?"

Model matematika cocok untuk mengatasi masalah ini. Model matematika adalah model yang menggunakan simbol matematika atau logika untuk menyederhankan bahkan memcahkan masalah (Maki,1973:8). Penulisan ini diawali dari pengamatan terhadap permasalahan biaya relokasi yang relatif besar. Dengan mengacu pada aturan metode ilmiah permodelan matematika, studi ini disusun. Dari studi tersebut diketahui beberapa faktor yang berpengaruh langsung pada biaya tempuh. Faktor-faktor tersebut yaitu faktor lokasi pengungsian, lokasi relokasi, efektifitas jalan, tingkat kemacetan jalan, hambatan cuaca, biaya angkutan dan satuan angkutan. Model ini bertujuan untuk mencari hubungan matematis antar faktor-faktor, sehingga dapat diprediksi biaya relokasi yang akurat dan minimum. Model ini tidak hanya berlaku untuk masalah relokasi pengungsi Merapi, tetapi juga manajemen pengungsiannya (jika diasumskan graf menjadi 2 arah). Penggunaan model dengan peta gunung berapi aktif lain (contoh: Gunung Bromo), maka model dapat kembali digunakan.

**Kata Kunci**: Minimalisasi biaya mengungsi relokasi, Optimasi rute transportasi.

---

[1]Makalah ini pernah dipresentasikan pada seleksi Mahasiswa Berprestasi tingkat FMIPA UNY, 3 Maret 2011

[2]Makalah disampaikan pada Seminar Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, 16 April 2011

[3]Mahasiswa Jurdik Matematika FMIPA UNY

ISBN : 978-979-17763-3-2

## A. PENDAHULUAN

Meletusnya Gunung Merapi pada tahun 2010 mengakibatkan terhentinya aktivitas warga selama lebih dari dua minggu. Awan panas menghanguskan kawasan puncak gunung Merapi dan sekitarnya, lahar dingin dan debu vulkanik-pun menjalar pada raius yang tidak sempit. Jumlah material vulkanik yang telah dikeluarkan oleh Gunung Merapi sejak erupsi pada 26 Oktober 2010 hingga penghujung tahun 2010 diperkirakan telah mencapai 150 juta meter kubik (Kompas.com:2010). Pemerintah menginstruksikan warga untuk mengungsi. Sayangnya, belum ada sistem pengungsian yang terkoordinir dengan baik.

Banyak warga yang kurang menyadari bahwa pada masa itu, Gunung Merapi sangat berbahaya. Menurut catatan modern, Gunung Merapi telah mengalami erupsisetiap dua sampai lima tahun sekali, sedangkan Gunung Merapi dikelilingi oleh pemukiman yang sangat padat. Sejak tahun 1548, gunung ini sudah erupsi sebanyak 68 kali. Meskipun demikian, masih ada warga yang bermukim di ketinggian 1700 meter di atas permukaan air laut. (Wikipedia:2011)

Erupsi Merapi tahun 2010 yang cukup besar mengakibatkan luasnya radius zona bahaya. Kondisi ini mengakibatkan besarnya jumlah pengungsi, dan tentunya mengakibatkan kebutuhan lokasi pengungsian yang tidak sedikit. Ini mengakibatkan biaya transportasi pengungsian dan relokasi menjadi sangat besar. Berdasarkan uraian masalah di atas, diperlukan permodelan matematika untuk meminimalkan biaya transportasi.

## B. MODEL NYATA

Sebelum melakukan optimasi biaya, definisi biaya tempuh (variabel terikat pada studi ini) perlu ditentukan secara jelas. Karena model ini bertujuan menyusun rute maka akan didefinisikan terlebih dahulu biaya tempuh masing-masing satuan rute.

ISBN : 978-979-17763-3-2

**Definisi (Biaya tempuh satuan rute)**

Biaya tempuh masing-masing satuan rute $(C_{mn})$adalah biaya yang dikeluarkan untuk membiayai seseorang dari suatu ujung ruas jalan (titik M) ke ujung lain ruas jalan (titik N), $C_{mn}$ memiliki satuan Rupiah (Rp).

Tidak hanya variabel terikat, pendefinisian dan analisis variabel bebas juga sangat perlu untuk diidentifikasi. Berdasarkan hasil identifikasi, terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi biaya tempuh masing-masing satuan rute, yaitu:

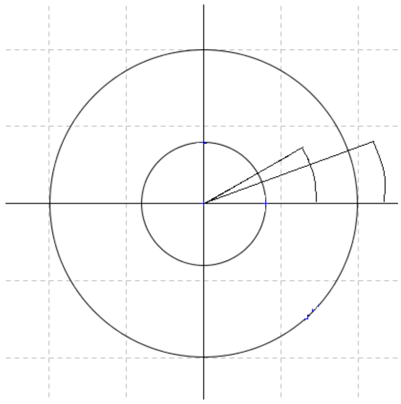
1. Lokasi pengungsian

   Lokasi pengungsian adalah titik-titik di mana para pengungsi diungsikan untuk sementara waktu. Jika diasumsikan bahwa puncak merapi terletak di O(0,0), pada koordinat polar, maka lokasi pengungsian memiliki koordinat $(a,\theta_1)$. (Purcell, 1987:106). Jika kita digunakan radius bahaya $c$ km, dan 1 satuan panjang pada koordinat polar 1km, maka $|a| \geq c$. Pada kasus ini, lokasi pengungsian digunakan sebagai titik sumber *(origin)*.

2. Lokasi relokasi

   Lokasi relokasi adalah titik-titik di mana para pengungsi direlokasi. Jika kita menggunakan asumsi yang sama dengan asumsi pada lokasi pengungsian, dapat diperoleh koordinat lokasi relokasi $(b,\theta_2)$. Jika kita menggunakan radius bahaya $d$ km, dan satu satuan panjang pada koordinat polar mewakili 1km, maka $d \leq |b| \leq c$. Pada kasus ini, lokasi pengungsian digunakan sebagai titik tujuan *(destination)*. Origin dan destination dapat digambarkan dengan gambar berikut:

ISBN : 978-979-17763-3-2



**Gambar 1.** Ilustrasi *origin* dan *destination*

Jika jarak tempuh semakin mahal maka biaya transportasi akan semkin tinggi, sehingga dapat diasumsikan biaya tempuh berbanding lurus dengan jarak antara $(a,\theta_1)$ dan $(b,\theta_2)$. Menurut ilmu ukur analitik bidang, jarak antara $(a_m, b_m)$ dan $(a_n, b_n)$ dapat dihitung dengan rumus $jarak = \sqrt{(a_n \quad a_m)^2 + (b_n \quad b_m)^2}$. Pada ilmu ukur analitik dijelaskan bahwa $(a,\theta_1)$ dan $(b,\theta_2)$ pada koordinat polar ekuivalen dengan $(a\cos\theta_1, a\sin\theta_1)$ dan $(b\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$ pada koordinat kartesius (Purcell, 1987:108). Sehingga jarak antara $(a,\theta_1)$ dan $(b,\theta_2)$ dapat dirumuskan

$$jarak = \sqrt{(b\cos\theta_2 - a\cos\theta_1)^2 + (b\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)^2},$$

sehingga dapat disimpulkan:

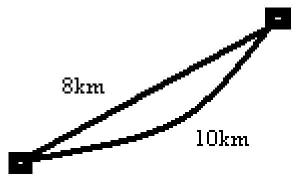
| |
|---|
| *Biaya tempuh dari masing-masing dari lokasi pengungsian menuju ke lokasi relokasi sebanding dengan jarak antara lokasi pengungsian dan lokasi relokasi…………………..(1.1)* |

3. Efektivitas jalan ( $\varepsilon$ )

Efektivitas jalan didefinisikan sebagai hasil bagi antara jarak *origin* dan *destination* dengan panjang lintasan. Efektivitas jalan disimbolkan dengan $\varepsilon$ (dalam %). Sebagai contoh: misal jarak tempuh antara *origin* dan *destination* 8 km, dan panjang lintasan 10 km. Efektivitas

**ISBN : 978-979-17763-3-2**

jalan ($\varepsilon$) sebesar 80%. Berikut akan diilustrasikan contoh efektivitas jalan:




**Gambar 2**. Ilustrasi Variabel Efektivitas Jalan

Berdasarkan pengamatan, Jarak tempuh akan semakin panjang jika jalan semakin berkelak-kelok (efektifitas jalan rendah), sehingga dapat disimpulkan bahwa biaya tempuh masing-masing satuan rute berbanding terbalik dengan efektivitas jalan, dengan kata lain dapat diperoleh model nyata sebagai berikut:

| |
|---|
| *Biaya tempuh dari masing-masing dari lokasi pengungsian menuju ke lokasi relokasi berbanding terbalik dengan efektivitas jalan…………………………………………………..(1.2)* |

4. Tingkat kemacetan jalan ($\delta$)

   Tingkat kemacetan jalan didefinisikan sebagai hasil bagi antara waktu tempuh dan waktu tempuh jika lancar. Tingkat kemacetan jalan disimbolkan dengan $\delta$ merupakan suatu konstanta statistik). Sebagai contoh: misal waktu tempuh suatu ruas jalan 10 menit, dan waktu tempuh jika lancar 5 menit, sehingga $\delta$ =2. Diketahui bahwa waktu tempuh akan semakin panjang jika jalan semakin macet, sehingga dapat disimpulkan biaya tempuh masing-masing satuan rute berbanding lurus dengan tingkat kemacetan jalan, sehingga dapat disusun model nyata berikut:

| |
|---|
| *Biaya tempuh dari masing-masing dari lokasi pengungsian menuju ke lokasi relokasi sebanding dengan tingkat kemacetan jalan…………………………………………………(1.3)* |

5. Hambatan cuaca ($\phi$)

ISBN : 978-979-17763-3-2

Hambatan cuaca didefinisikan sebagai hasil bagi antara waktu tempuh saat itu dan waktu tempuh jika cuaca cerah. Hambatan cuaca disimbolkan $\phi$ (suatu konstanta statistik). Sebagai contoh: misal waktu tempuh suatu ruas jalan pada saat hujan intnsitas sedang 15 menit, dan waktu tempuh jika cerah 10 menit, sehingga $\phi$ =1,5. Diketahui bahwa waktu tempuh akan semakin lama jika hambatan cuaca makin besar, sehingga dapat disimpulkan biaya tempuh masing-masing satuan rute berbanding lurus dengan hambatan cuaca, dan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

*Biaya tempuh dari masing-masing dari lokasi pengungsian menuju ke lokasi relokasi sebanding dengan hambatan cuaca……………………………………………………………(1.4)*

6. Biaya angkutan ( $c$ ) dan Muatan angkutan ( $n$ )

   Biaya angkutan adalah biaya yang diperlukan untuk membiayai 1 km perjalanan jika kondisi ideal, satuan dari biaya angkutan adalah Rupiah (Rp).Muatan angkutan adalah muatan efektif suatu kendaraan (suatu bilangan). Semakin besar biaya perorangan, makin besar biaya total, begitu pula sebaliknya. Karena jika muatan banyak maka keoefisen pembagi besar. Dapat diasumsikan bahwa biaya total berbanding lurus dengan biaya angkutan dan berbanding terbalik dengan muatan angkutan, sehingga dapat diperoleh model nyata:

   *Biaya tempuh dari masing-masing lokasi pengungsian ke lokasi relokasi sebanding dengan biaya angkutan dan berbanding terbalik dengan muatan angkutan…………………………(1.5)*

## C. MODEL MATEMATIKA

Dari model nyata (1.1) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$C_{mn} = K_1\sqrt{(b\cos\theta_2 - a\cos\theta_1^{\,2} + (b\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2} \qquad (2.1)$$

ISBN : 978-979-17763-3-2

Dengan $C_{mn}$ adalah biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp, dan $\sqrt{(b\cos\theta_2 - a\cos\theta_1)^2 + (b\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)^2}$ adalah panjang satuan rute, dalam km, Sehingga $K_1$ adalah konstanta biaya tempuh per km, yang memiliki satuan rupiah per kilometer (Rp/km)

Dari model nyata (2) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$C_{mn} = \frac{K_2}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

Dengan:

$C_{mn}$ = biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp.

$\varepsilon$ = tingkat efektivitas jalan (suatu konstanta statistik)

Sehingga $K_2$ adalah konstanta biaya jika jalan efektif yang memiliki satuan rupiah (Rp).

Dari model nyata (3) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$C_{mn} = K_3\delta \tag{2.3}$$

Dengan:

$C_{mn}$ = biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp.

$\delta$ = hambatan cuaca (suatu konstanta statistik)

Sehingga $K_3$ adalah konstanta biaya jika perjalanan lancer (tidak terjebak macet sma sekali), yang memiliki satuan rupiah.

Dari model nyata (4) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$C_{mn} = K_4\phi \tag{2.4}$$

Dengan:

$C_{mn}$ = biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp.

$\delta$ = hambatan cuaca (suatu konstanta statistik)

ISBN : 978-979-17763-3-2

Sehingga $K_4$ adalah konstanta biaya tempuh jika tidak ada hambatan cuaca, yang memiliki satuan rupiah.

Dari model nyata (5) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$C_{mn} = K_5 \frac{c}{n} \tag{2.5}$$

Dengan:

$C_{mn}$ = biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp.

$c$ = biaya angkutan, memiliki satuan Rp/km.

$n$ = muatan angkutan, suatu konstanta

Sehingga $K_5$ adalah konstanta jarak tempuh yang memiliki satuan km

## D. PENYELESAIAN MODEL

1. Mendapatkan $C_{mn}$

   Karena $\varepsilon, \delta$, dan $\phi$ merupakan konstanta statistik, maka kita dapat menggabungkan persamaan (2), (3), dan (4) menjadi:

$$C_{mn} = \frac{K_{2.3.4}\delta\phi}{\varepsilon} \tag{2.6}$$

   Dengan:

   $C_{mn}$ = biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp.

   $\varepsilon$ = efektivitas ruas jalan (dalam %)

   $\delta$ = tingkat kemacetan jalan (suatu konstanta statistik)

   $\phi$ = hambatan cuaca (suatu konstanta statistik)

   $K_{2.3.4}$ = konstanta yang memiliki satuan Rp

   Selanjutnya, dilakukan substitusi persamaan (1) ke (6) maka diperoleh:

$$C_{mn} = \frac{K_{1.2.3.4}\sqrt{(b\cos\theta_1 - a\cos\theta_2)^2 + (b\sin\theta_1 \quad a\sin\theta_2)^2}\,\delta\phi}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

   Dengan:

**ISBN : 978-979-17763-3-2**

$\sqrt{(b\cos\theta_2 \quad a\cos\theta_1)^2 + (b\sin\theta_2 \quad a\sin\theta_1)^2}$ adalah panjang satuan rute, dalam km

$K_{1.2.3.4}$ = konstanta yang memiliki satuan Rp/km

Selanjutnya, dilakukan substitusi persamaan (5) ke (7) maka diperoleh:

$$C_{mn} = \frac{c \bullet \sqrt{(b\cos\theta_1 \quad a\cos\theta_2)^2 \quad (b\sin\theta_1 \quad a\sin\theta_2)^2} \bullet \delta \bullet \phi}{\varepsilon \bullet n} \qquad (2.8)$$

Dengan:

$C_{mn}$ = biaya tempuh satuan rute, memiliki satuan Rp.

$\varepsilon$ = efektivitas ruas jalan (dalam %)

$\delta$ = tingkat kemacetan jalan (suatu konstanta statistik)

$\phi$ = hambatan cuaca (suatu konstanta statistik)

$a$ = jarak lokasi pengungsian dengan pusat bencana

$b$ = jarak lokasi relokasi dengan pusat bencana

$\theta_1$ =sudut lokasi pengungsian pada koordinat polar

$\theta_2$ =sudut lokasi pengungsian pada koordinat polar

$c$ = biaya angkutan, memiliki satuan Rp/km.

$n$ = muatan angkutan, suatu konstanta

2. Mendapatkan $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{mn}$ (total biaya)

Untuk mendapatkan minimum total biaya minimum kita dapat menggunakan graf berbobot, dengan simpul yang bermakan ujung jalan dan rusuk yang telah diboboti $C_{mn}$. Misalkan G adalah graf berarah berbobot dengan titik-titik

$V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. (Maki, 1973:278)

$L$ = Himpunan titik-titik $\in V(G)$ yang sudah terpilih dalam jalur path terpendek.

$D(j)$ = Jumlah bobot path terkecil dari $v_1$ ke $v_j$.

$w(i, j) = C_{ij}$ = Bobot garis dari titik $v_i$ ke $v_j$.

**ISBN : 978-979-17763-3-2**

$w^*(i, j)$ = Jumlah bobot path terkecil dari $v_1$ ke $v_j$.

Secara formal, algoritma untuk mencari path terpendek adalah sebagai berikut:

1. Menyusun Matriks Hubung
2. Menuliskan $L$ dan $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.
3. Untuk $i = 2, ..., n$ lakukan $D(i) = W(1, i)$
4. Selama $v_n \notin L$, lakukan:
    a. Pilih titik $v_k \in V - L$ dengan $D(k)$ terkecil, $L = L \cup \{v_k\}$
    b. Untuk setiap $v_j \in V \quad L$ lakukan:
    Jika $D(j) > D(k) + W(k, j)$ maka ganti $D(j)$ dengan $D(k) + W(k, j)$
5. Untuk setiap $v_j \in V$, $w^*(i, j) = D(j)$

(Siang,2009:306-307)

ISBN : 978-979-17763-3-2

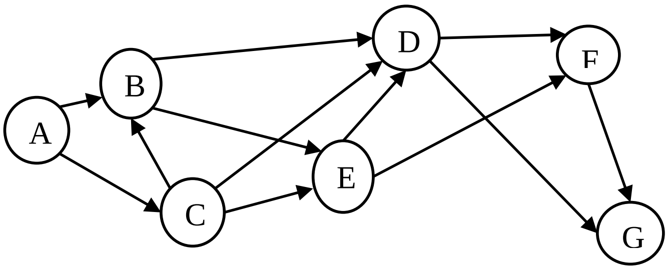
## E. EVALUASI MODEL

Untuk memudahkan penggunaan model, dapat digunakan flowchart sebagai berikut:


**Gambar 3**. Diagram alir penggunaan model

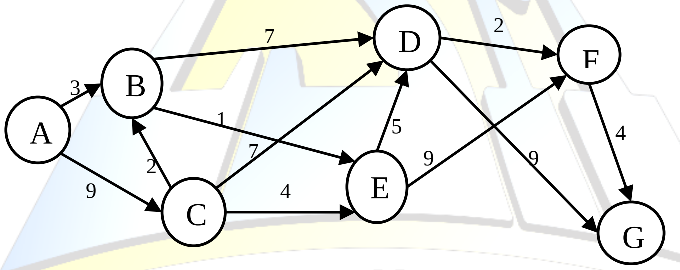
Misal Lokasi Pengungsian A, dan salah satu lokasi relokasi G, dan mungkin melalui titik B, C, D, E dan F, yang akan divisualisasikan ke dalam Graf berikut:

ISBN : 978-979-17763-3-2




**Gambar 5.** IlustrasiMasalah dalam Bentuk Graf Searah

Setelah itu kita dapat mencari bobot graf. Sebagai contoh, misalkan koordinat lokasi salah satu akhir ruas jalan A(-8,-90$^0$) dan awal ruas jalan B(-28,-90$^0$), sehingga jaraknya 20 satuan, dan $\varepsilon =$ 80%, $\delta =$ 1,2, dan $\phi =$1,33 $c =$ Rp9.000,00/km dan $n =$ 40, sehingga diperoleh biaya Rp 9.000,00 untuk sebuah ruas jalan setiap orang, Misal rute yang ditempuh dari sebuah tempat pengungsian ke lokasi relokasi, dapat disajikan kedalam Graf berikut:




**Gambar 6**. Graf Searah yang Telah Mengalami Pembobotan

Selanjutnya Graf tersebut dapat dibawa ke dalam tabel jarak

**Tabel 1.** Tabel Jarak sebagai penafsiran dari Gambar 7

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **G** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | - | 3 | 9 | - | - | - | - |
| B | - | - | - | 7 | 1 | - | - |
| C | - | 2 | - | - | - | - | - |
| D | - | - | - | - | - | 2 | 8 |
| E | - | - | 4 | - | - | 9 | - |
| F | - | - | - | - | - | - | 4 |
| G | - | - | - | - | - | - | - |

Dengan menggunakan teknik perhitungan algoritma di atas, diperoleh rute $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$, sehingga biaya yang diperlukan Rp.15.000,00 per orang.

ISBN : 978-979-17763-3-2

## F. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari permasalahan hasil pembahasan model, kesimpulan yang dapat diambil sebagai berikut:

a. Biaya transportasi relokasi merapi sebanding dengan biaya satuan, jarak tempuh, hambatan cuaca dan tingkat kemacetan
b. Biaya transportasi relokasi berbanding terbalik dengan tingkat efektivitas jalan.
c. Graf dapat digunakan untuk menggambarkan rute, sehingga dapat mempermudah proses algoritma dan pencarian biaya minimumnya.

Tidak ada model yang salah, yang ada hanya model yang kurang baik. Jika model ini perlu diperbaiki, peneliti selanjutnya dapat menjalankan saran sebagai berikut:

a. Dalam penentuan hubungan antar variabel lebih baik menggunakan analisis regresi atau analisis korelasi, meyesuaikan dengan keadaan.
b. Pada proses permodelan yang lebih teliti dimunginkan sistem persamaan yang muncul adalah sistem persamaan trensenden, differensial, bahkan integral.
c. Dalam pembuatan simpul dan keterhubungan dibuat sejelas mungkin sehingga tidak terjadi kesalahan dalam membuat model matematika.
d. Lebih baik jika model disajikan dengan tampilan yang lebih menarik semisal Visual Basic™ ataupun Macromedia Flash™
e. Dengan hasil studi ini disarankan pemerintah DIY dan Jawa Tengah menggunakan teknik Graf dalam membuat manajemen relokasi sehingga dapat lebih menghemat waktu maupun biaya.

## G. DAFTAR PUSTAKA

Kompas. 9 November 2010. *Erupsi Merapi 2010 Lebih Besar dari 1872*, diakses dari http://regional.kompas.com/read/2010/11/09/15573541/Erupsi.Merapi.2010.Lebih.Besar.dari.1872, pada 14 Januari 2010, pukul 19.57 WIB

Maki, Daniel P dan Maynard Thomson. 1973. Mathematical Models and Aplications. Prentice-Hall.Inc: New Jersey.

ISBN : 978-979-17763-3-2

Purcell, Edwin J dan Dale Verberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Erlangga: Jakarta

Siang, Jong Gek. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Andi: Yogyakarta

Wikimapia.2011. diakses dari http://www.wikimapia.org/#lat=7.5748826&lon=110. 4826355&z=10&l=0&m=t, pada 7 Februari 2011, pukul 19.15 WIB

Wikipedia.2011.*Gunung Merapi,* diakses dari http://id.wikipedia.org/Gunung_ Merapi/, pada 3 Januari 2011, pukul 20.04 WIB