

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Pembelajaran Matematika Sekolah

Matematika merupakan ilmu yang dapat didefinisikan berbeda-beda sesuai pertanyaan yang diajukan. Chambers (2008: 9) mengungkapkan matematika di dalam pandangan ilmu murni merupakan studi mengenai pola serta ide-ide yang saling berhubungan. Kemudian menurut *utilitarian* matematika didefinisikan sebagai alat untuk pemecahan masalah pada berbagai konteks. Ia juga menyebutkan karakteristik matematika antara lain (1) alat yang digunakan dalam pemecahan masalah, (2) dasar penelitian ilmiah dan teknologi, (3) memberikan cara untuk model situasi nyata.

Matematika sekolah memiliki perbedaan dengan matematika murni. Matematika sekolah sebagai berikut:

1. Kegiatan penelusuran pola serta hubungan

Pada kegiatan ini siswa diberikan kesempatan untuk menemukan, mencoba, serta menyelidiki pola, sehingga siswa mampu menarik kesimpulan dan paham akan hubungan antara pengertian satu dengan pengertian yang lainnya.

2. Kreativitas yang memerlukan intuisi, imajinasi, dan penemuan

Pada kegiatan ini siswa didorong untuk berpikir beda, memiliki inisiatif, meningkatkan rasa ingin tahu, mampu bertanya, dan mampu untuk menyanggah atau berpikir kritis dalam pembelajaran.

3. Kegiatan untuk memecahkan masalah

Pada kegiatan ini siswa didorong untuk memecahkan masalah dalam matematika menggunakan caranya sendiri, serta mendorong siswa untuk berpikir logis, sistematis, dan konsisten.

4. Alat komunikasi

Pada kegiatan ini siswa mendiskusikan berbagai permasalahan matematika sehingga siswa dapat menemukan sifat serta menjelaskannya, dan juga siswa mampu membaca dan menulis matematika.

Menurut Bell (1981: 108) objek dalam matematika dapat diklasifikasikan atas fakta, konsep, keterampilan, dan prinsip. Berikut merupakan penjelasan masing-masing dari objek matematika.

1. Fakta merupakan sebuah kesepakatan yang ada di dalam matematika, misalnya adalah seperti simbol-simbol yang ada pada matematika. Seseorang yang telah belajar dan paham akan fakta maka seseorang tersebut akan dapat menuliskan kembali dengan benar dan juga dapat menggunakannya dengan tepat pula pada situasi atau kondisi yang berbeda.
2. Konsep merupakan sebuah ide abstrak sehingga seseorang mampu mengklasifikasikan atau menggolongkan fenomena serta dapat menerangkan fenomena tersebut. Kemudian seseorang juga mampu untuk menentukan yang termasuk contoh atau bukan contoh dari ide yang ada. Groth (2013: 31) menyebutkan bahwa pengetahuan konseptual dapat dianggap sebagai sebuah jaringan pengetahuan yang saling terhubung. Jadi di dalam matematika antara satu

konsep dengan konsep lain dapat dikaitkan untuk menyelesaikan masalah matematika.

3. Keterampilan matematika yang dikemukakan oleh Bell (1981: 108) merupakan kemampuan untuk menjalankan operasi dan prosedur matematika secara tepat. Seseorang dikatakan terampil apabila ia dapat memecahkan berbagai masalah yang berbeda yang memerlukan algoritma atau dapat menerapkan keterampilan dalam berbagai situasi.
4. Prinsip dalam matematika merupakan sesuatu hal yang lebih kompleks. Bell (1981: 109) menyatakan prinsip merupakan sebuah rangkaian konsep bersama dengan hubungan antar konsep tersebut. Seseorang dikatakan telah memahami suatu prinsip apabila ia dapat mengidentifikasi konsep-konsep yang termuat dalam prinsip tersebut dan mengaplikasikan prinsip tersebut pada situasi tertentu.

Bell (1981: 109) menjelaskan bahwa objek-objek matematika tersebut di atas diajarkan pada matematika sekolah di setiap jenjang pendidikan, tetapi untuk fakta-fakta dan keterampilan cenderung lebih ditekankan di jenjang yang lebih rendah, sedangkan untuk konsep-konsep lebih ditekankan di jenjang menengah, dan untuk prinsip-prinsip lebih ditekankan pada jenjang yang lebih tinggi.

Pembelajaran matematika sekolah diselenggarakan dengan berbagai tujuan. Tujuan yang ingin dicapai siswa menurut Depdiknas (2006: 346) adalah agar siswa memiliki kemampuan antara lain: (1) memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep, dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes,

akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah, (2) menggunakan penalaran pada pola dan sifat, memanipulasi matematika dalam membuat generalisasi serta menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika, (3) memecahkan masalah, (4) mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas masalah, dan (5) memiliki sikap menghargai manfaat matematika dalam kehidupan. Tujuan pembelajaran matematika di sekolah menurut Haylock & Thangata (2007: 3) meliputi keberfungsian, penerapan, keterampilan penyampaian informasi, keindahan, dan cara memperoleh pengetahuan matematika. Selanjutnya guru hendaknya melakukan apa yang dapat membangun pengertian daripada pengajaran yang hanya sepintas.

Masa sekolah adalah masa di mana kognitif siswa berkembang secara aktif. Siswa SMA mengalami perkembangan kognitif tingkat akhir seperti yang dijelaskan dalam perkembangan kognitif Piaget. Tabel 2 berikut menunjukkan tahap perkembangan belajar siswa berdasarkan taksonomi Bloom yang direvisi dilihat dari dimensi pengetahuan dan dimensi kognitif.

Tabel 2 Taksonomi Bloom Revisi

Dimensi Pengetahuan	Dimensi Proses Kognitif
Pengetahuan Faktual 1) Pengetahuan tentang terminology 2) Pengetahuan tentang bagian detail dan unsur-unsur.	Mengingat (<i>remember</i>) 1) Mengenali (<i>recognizing</i>) 2) Mengingat kembali (<i>recalling</i>)
Pengetahuan konseptual 1) Pengetahuan tentang klasifikasi dan kategori 2) Pengetahuan tentang prinsip dan generalisasi 3) Pengetahuan tentang teori, model dan struktur.	Memahami (<i>understanding</i>) 1) Menafsirkan (<i>interpreting</i>) 2) Memberi contoh (<i>exemplifying</i>) 3) Meringkas (<i>summarizing</i>) 4) Menarik inferensi (<i>inferring</i>) 5) Membandingkan (<i>comparing</i>) 6) Menjelaskan (<i>explaining</i>)
Pengetahuan prosedural 1) Pengetahuan tentang keterampilan khusus yang berhubungan dengan suatu bidang tertentu dan pengetahuan algoritma. 2) Pengetahuan tentang Teknik dan metode 3) Pengetahuan tentang kriteria penggunaan suatu prosedur.	Mengaplikasikan (<i>apply</i>) 1) Menjalankan (<i>executing</i>) 2) Mengimplementasikan (<i>implementing</i>)
Pengetahuan metakognitif 1) Pengetahuan strategi 2) Pengetahuan tentang tugas-tugas kognitif. 3) Pengetahuan tentang diri sendiri	Menganalisis (<i>analyze</i>) 1) Menguraikan (<i>differentiating</i>) 2) Mengorganisir (<i>organizing</i>) 3) Menemukan makna tersirat (<i>attributing</i>)
	Mengevaluasi (<i>evaluate</i>) 1) Memeriksa (<i>checking</i>) 2) Mengkritik (<i>critiquing</i>)
	Mencipta (<i>create</i>) 1) Merumuskan (<i>generating</i>) 2) Merencanakan (<i>planning</i>) 3) Memproduksi (<i>producing</i>)

B. Kesalahan dalam Pembelajaran Matematika

Belajar merupakan proses yang berkelanjutan yang didalamnya melibatkan partisipasi aktif dari siswa dan jelas bahwa instruksi yang diberikan dalam pembelajaran akan mempengaruhi apa yang dipelajari siswa. Teori konstruktivis

menganggap dalam belajar pengetahuan bukanlah dikonstruksi dari pengalaman saja tetapi campuran antara pengalaman dan struktur pengetahuan yang sudah ada sebelumnya. Pada teori konstruktivis disebutkan bahwa dalam proses pembentukan informasi baru itu melalui proses asimilasi dan akomodasi. Jika siswa tidak mampu untuk mengasimilasi dan mengakomodasi informasi baru maka hal tersebut akan menyebabkan kesalahan konsep dan juga kesalahan prosedural. Kesalahan yang terjadi dapat dilihat dari pengerjaan siswa dalam menyelesaikan persoalan matematika.

Kesalahan adalah sebuah penyimpangan akan hal-hal benar yang bersifat konsisten, sistematis, ataupun insidental pada daerah tertentu. Tingkat penguasaan materi siswa yang belum optimal menyebabkan kesalahan yang terjadi bersifat konsisten dan sistematis, contohnya seperti siswa salah dalam memahami konsep atau bisa juga siswa salah dalam proses penyelesaian soal matematika. Kemudian yang dimaksud dengan kesalahan yang sifatnya insidental adalah kesalahan yang tidak disebabkan akan tingkat penguasaan materi tetapi disebabkan oleh hal lain, contohnya seperti ceroboh, kurang cermat dalam membaca atau menghitung, bekerja secara tergesa-gesa, dan lain-lain.

Menurut Hadler (Bahri & Sugeng, 2009: 3) kesalahan yang dilakukan siswa saat menyelesaikan soal memberikan bukti kepada guru tentang kesulitan yang dialami siswa belajar matematika. Lai (2012: 1) menyebutkan bahwa dengan mengetahui kesalahan siswa saat menyelesaikan soal, guru dapat memberikan

instruksi sesuai dengan kebutuhan siswa. Secara umum, siswa yang mengalami kesulitan belajar matematika tidak memiliki pengetahuan konseptual yang penting dikarenakan beberapa alasan, termasuk ketidakmampuan untuk memproses informasi untuk menyelesaikan masalah, kurangnya peluang siswa untuk latihan soal, kurangnya umpan balik dari guru tentang kesalahpahaman atau ketidakpahaman, kecemasan tentang matematika, dan kesulitan dalam pemrosesan baik secara visual maupun pendengaran. Rafi dan Retnawati (2018: 2) juga menyebutkan bahwa kesulitan dan kesalahan siswa dalam memecahkan masalah matematika muncul ketika konsep matematika tidak dikuasai sepenuhnya oleh siswa.

Kesalahan penyelesaian soal matematika diklasifikasikan ke dalam tiga jenis, yaitu: (1) kesalahan konsep (miskonsepsi), kesalahan terjadi pada saat siswa menafsirkan sebuah konsep, rumus, operasi, atau salah pada saat penerapannya; (2) kesalahan operasi, kesalahan yang terjadi karena siswa salah dalam melakukan operasi hitung atau aljabar beserta sifat-sifatnya; (3) kesalahan ceroboh, kesalahan yang terjadi karena kealpaan siswa saat proses penyelesaian tetapi pada dasarnya siswa mengetahui akan cara penyelesaiannya. Tetapi, kesalahan-kesalahan tersebut terkadang tidak disadari baik oleh siswa sendiri maupun guru.

Kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal harus segera diatasi secara tuntas, sebab bila kesalahan yang dilakukan siswa tetap dibiarkan maka siswa akan menganggap benar sehingga kesalahan yang dilakukan akan diulangi. Hal ini senada dengan hukum akibat teori Thorndike jika kekeliruan anak dibiarkan tanpa penjelasan

yang benar dari guru, ada kemungkinan anak akan menganggap benar dan kemungkinan mengulanginya. Rafi dan Retnawati menyebutkan bahwa analisis kesalahan merupakan penilaian diagnostik yang bertujuan untuk mendeteksi jenis kesalahan dan kesalahan sistematis yang dibuat oleh siswa, mengidentifikasi kesalahpahaman siswa, dan memilih metode pengajaran yang dapat memfasilitasi siswa untuk mengatasi kesalahan mereka dan memperoleh konsep atau prosedur yang benar. Oleh karena itu melalui analisis kesalahan penilaian ditekankan kepada jawaban akhir siswa dan juga proses penyelesaian masalah matematika.

Menurut Watson (Sofiyah, 2018: 83) kesalahan siswa saat mengerjakan soal matematika dapat digolongkan menjadi delapan tipe kesalahan. kesalahan yang pertama yaitu pengambilan data yang tak tepat, maksudnya adalah siswa untuk mengoperasikan langkah dengan benar tetapi salah dalam menentukan data yang dibutuhkan. Kesalahan yang kedua yaitu penggunaan prosedur yang tidak tepat. Tipe kesalahan ketiga adalah adanya data yang hilang, dalam penyelesaian masalah siswa kehilangan satu atau lebih data sehingga penyelesaian menjadi salah namun siswa berusaha melakukan langkah-langkah penyelesaian pada level yang tepat. Tipe kesalahan keempat adalah kesimpulan yang hilang, siswa menunjukkan alasan yang tepat namun gagal dalam penarikan kesimpulan. Tipe kesalahan kelima adalah konflik level respon. Tipe kesalahan keenam adalah manipulasi yang tidak tepat. Tipe kesalahan ketujuh adalah masalah hirarki keterampilan, siswa tidak dapat menyelesaikan permasalahan karena siswa belum terampil pada materi prasyarat.

Tipe kesalahan kedelapan adalah siswa melakukan pengopian data, atau siswa hanya menulis jawaban tanpa tahu makna dari jawaban yang dituliskannya.

Selanjutnya Newman (Clement,1980: 4) juga mengelompokkan beberapa tipe kesalahan. Tipe kesalahan yang pertama adalah *reading error* atau kesalahan siswa dalam membaca, siswa salah dalam membaca kata-kata atau informasi penting pada sebuah pertanyaan sehingga siswa tidak dapat menggunakan informasi tersebut untuk menyelesaikan soal. Tipe kesalahan kedua adalah *reading comprehension difficulty* atau kesalahan dalam memahami soal, siswa hanya sekedar memahami soal tetapi tidak benar-benar menangkap informasi yang terkandung dalam pertanyaan tersebut sehingga siswa tidak dapat memproses lebih lanjut solusi dari permasalahannya. Tipe kesalahan ketiga adalah *transform error* atau kesalahan informasi, yaitu di mana siswa gagal memahami soal untuk diubah ke dalam matematika yang benar. Tipe kesalahan keempat adalah *weakness in process skill* atau kesalahan dalam keterampilan proses, pada tipe kesalahan ini siswa menggunakan kaidah atau aturan penyelesaian soal dengan benar, tetapi melakukan kesalahan dalam perhitungan dan komputasi. Tipe kesalahan kelima adalah *encoding error* atau kesalahan dalam menggunakan notasi. Tipe kesalahan keenam adalah *careless error* atau kesalahan karena kecerobohan atau kurang cermat, terkadang siswa melakukan kesalahan tersebut dalam proses penyelesaian soal matematika.

Kemudian terdapat juga pengelompokan kesalahan dalam menyelesaikan soal cerita secara garis besar menurut Ahmad (2001: 174-175) yaitu yang pertama adalah

kesalahan dalam memahami soal, kesalahan dalam menentukan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dalam soal. Kedua adalah kesalahan dalam menyusun rencana penyelesaian yaitu kesalahan dalam menerjemahkan soal cerita ke dalam model matematika. Kesalahan ketiga adalah kesalahan dalam menyelesaikan rencana penyelesaian. Kesalahan keempat adalah kesalahan dalam melihat atau mengecek hasil yang telah diperoleh. Kemudian kesalahan yang kelima adalah kesalahan dalam menginterpretasikan jawaban tersebut dengan situasi yang ada pada soal.

Terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi siswa melakukan kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika. Faktor-faktor yang mempengaruhi proses belajar matematika adalah siswa, guru, sarana dan prasarana dan penilaian.

- a. Siswa, kegagalan atau keberhasilan belajar sangat bergantung pada siswa, misalnya kemampuan dan kesiapan siswa untuk mengikuti kegiatan belajar matematika, sikap dan minat terhadap matematika dan juga kondisi fisik maupun psikologis.
- b. Guru, kemampuan pengajar dalam menyampaikan materi sekaligus penguasaan terhadap materi, kepribadian dan motivasi dalam mengajar matematika berpengaruh terhadap efektivitas proses belajar matematika.
- c. Sarana dan prasarana, sarana yang lengkap seperti buku teks dan alat bantu, prasarana seperti ruang yang bersih dan nyaman. Semua itu akan menunjang proses belajar mengajar.

d. Penilaian, selain untuk melihat hasil belajar siswa juga untuk melihat interaksi antara pengajar dan peserta didik, misalnya tentang keberhasilan peserta didik apakah proses belajar mengajar di dominasi oleh pengajar atau terjadi komunikasi dua arah .

Dalam penelitian ini terdapat empat tipe kesalahan yang akan dianalisis diadaptasi berdasarkan kesalahan menurut Newman (Clement, 1980: 4) yaitu:

1. *Comprehension error* atau kesalahan memahami
2. *Transformation error* atau kesalahan mentransformasi
3. *Process skill error* atau kesalahan keterampilan proses
4. *Encoding error* atau kesalahan menuliskan jawaban

Reading error atau kesalahan membaca tidak diikutkan untuk dianalisis dikarenakan kesalahan ini tidak mengacu pada memahami makna tugas serta kesalahan membaca juga tidak dapat dicocokkan dengan tahap pemodelan matematika atau proses penyelesaian persoalan matematika. Berikut keterangan lebih lanjut mengenai klasifikasi kesalahan menurut Newman.

1. *Comprehension error* atau kesalahan memahami

Comprehension error atau kesalahan memahami soal yaitu siswa hanya sekedar memahami soal tetapi tidak benar-benar menangkap informasi yang terkandung dalam pertanyaan tersebut sehingga siswa tidak dapat memproses lebih lanjut solusi dari permasalahannya. Kesalahan memahami juga terjadi ketika siswa dapat membaca pertanyaan tetapi gagal memahami persyaratannya sehingga menyebabkan

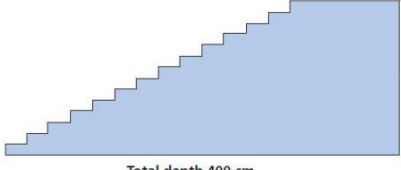
siswa melakukan kesalahan atau gagal dalam mencoba solusi (Singh, Rahman, & Hoon, 2010: 266).

Indikator dari *comprehension error* atau kesalahan memahami yang digunakan pada penelitian ini yaitu antara lain:

- Siswa salah menafsirkan apa yang diminta dari soal.
- Siswa salah memahami kata kunci yang berupa istilah matematika.
- Siswa tidak dapat membedakan antara informasi yang relevan dan tidak relevan.

Adapun contoh kesalahan memahami yang dilakukan oleh siswa ditunjukkan seperti pada tabel 3 berikut:

Tabel 3 Contoh Kesalahan Memahami yang dilakukan Siswa

Kalimat atau pertanyaan dalam soal	Kesalahan siswa
 Total height 252 cm Total depth 400 cm Gambar diatas mengilustrasikan tangga yang memiliki 14 anak tangga dengan total ketinggiannya adalah 252 cm. Berapakah tinggi dari tiap anak tangga tersebut?	Tinggi tiap anak tangga yaitu: $400 - 252 = 148$ $= \frac{148}{14}$ $= 10,4 \text{ cm}$

Dari tabel 3 dapat dilihat bahwa siswa sudah dapat menyimpulkan bahwa untuk mencari tinggi tiap anak tangga adalah membagi ketinggian dengan banyaknya anak tangga, namun siswa tidak membagi total ketinggian 252 cm dengan 14. Sebaliknya siswa mengurangkan 400 dengan 252 dan kemudian hasil pengurangannya yaitu 148 dibagi dengan banyaknya tangga yaitu 14, sehingga diperoleh nilai 10,4 cm. Jadi berdasarkan hal tersebut siswa membuat perhitungan dengan kedalaman total yang

diberikan tangga meskipun hal tersebut tidak relevan dengan yang ditanyakan dari soal.

2. *Transformation error* atau kesalahan transformasi

Transformation error atau kesalahan transformasi yaitu dimana siswa gagal memahami soal untuk diubah ke dalam matematika yang benar atau jika siswa telah mampu memahami pertanyaan dari soal yang diberikan tetapi tidak mampu mendefinisikan operasi atau urutan operasi yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah (Jha, 2012: 18). Dengan kata lain kesalahan transformasi adalah kesalahan yang dilakukan oleh siswa setelah siswa mampu memahami permasalahan yang terdapat pada soal, namun tidak dapat memilih pendekatan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

Indikator dari *transformation error* atau kesalahan transformasi yang digunakan pada penelitian ini yaitu antara lain:

- a. Siswa cenderung menggunakan prosedur matematika secara langsung tanpa memperhatikan prasyarat yang dibutuhkan.
- b. Jawaban siswa hanya merujuk kepada situasi dunia nyata tanpa melihat dari perspektif matematika.
- c. Siswa menggunakan prosedur atau konsep matematika yang tidak relevan dengan soal.

Adapun contoh kesalahan transformasi yang dilakukan siswa ditunjukkan pada tabel 4 sebagai berikut.

Tabel 4 Contoh Kesalahan Transformasi yang dilakukan Siswa

Kalimat atau pertanyaan dalam soal	Kesalahan siswa
Saat kembali ke Singapura setelah 3 bulan, Mei-Ling masih memiliki 3900 ZAR (mata uang Afrika Selatan). Dia akan menukarkan uang tersebut ke dolar Singapura. Diketahui bahwa nilai tukarnya adalah: 1 SGD = 4.0 ZAR Berapa banyak uang yang dimiliki Mei-Ling dalam dolar Singapura?	$3900 \times 4.0 = 15600$

Dari tabel 4 dapat dilihat bahwa soal yang diberikan merupakan soal mengenai konsep proporsi langsung yang terletak dalam konteks pertukaran uang. Pada soal siswa diminta untuk mengubah 3900 ZAR menjadi dolar Singapura dengan nilai tukar 1 SGD = 4,0 ZAR. Dalam penyelesaiannya siswa memilih prosedur matematika yang salah untuk menyelesaikan tugas, yaitu siswa memilih untuk mengalikan 3900 dengan 4,0 daripada membagi 3900 dengan 4,0.

3. *Process skill error* atau kesalahan keterampilan proses

Process skill error atau kesalahan keterampilan proses terjadi ketika siswa mampu menentukan kaidah atau prosedur penyelesaian dengan benar, tetapi melakukan kesalahan dalam perhitungan atau komputasi. Singh, Rahman, & Hoon (2010: 266) juga menyebutkan bahwa sebuah kesalahan akan disebut kesalahan keterampilan proses apabila siswa mampu memilih operasi yang diperlukan untuk menyelesaikan persoalan namun siswa tidak dapat menjalankan prosedur dengan benar.

Indikator dari *process skill error* atau kesalahan keterampilan proses yang digunakan pada penelitian ini yaitu antara lain:

- a. Siswa salah dalam menyelesaikan operasi aljabar.
- b. Siswa melakukan kesalahan dalam perhitungan.
- c. Siswa menggunakan rumus atau prosedur yang benar tetapi tidak menyelesaikannya.

Adapun contoh kesalahan keterampilan proses yang dilakukan siswa ditunjukkan pada tabel 5 sebagai berikut.

Tabel 5 Contoh Kesalahan Keterampilan Proses yang dilakukan Siswa

Kalimat atau pertanyaan dalam soal	Kesalahan siswa
Bagi pria diberikan formula, $\frac{n}{P} = 140$, yang menunjukkan hubungan antara n dan P dimana, n = banyak langkah tiap menit, dan P = panjang langkah kaki pria (meter) Pertanyaan 1: Jika formula tersebut berlaku untuk Heiko, dan Heiko melakukan 70 langkah per menit, maka berapa panjang langkah kaki Heiko?	$\frac{n}{P} = 140$ $\frac{70}{P} = 140$ $P = 140 - 70 = 70$

Dari tabel 5 dapat dilihat bahwa dari soal yang diberikan siswa diminta untuk menemukan panjang langkah pria (P) dengan rumus $\frac{n}{P} = 140$, dengan jumlah langkah per menit telah diketahui. Siswa sudah mampu menentukan prosedur yang tepat yaitu dengan mensubstitusikan nilai $n = 70$ ke dalam rumus sehingga diperoleh $\frac{70}{P} = 140$. Namun dalam perhitungannya siswa memilih untuk mengurangkan 140

dengan 70 daripada membagi 140 dengan 70. Hal tersebut menunjukkan bahwa siswa melakukan kesalahan dalam menyelesaikan persamaan yaitu dimana nilai yang tidak diketahui adalah pembagi dan yang dibagi lebih kecil dari hasil bagi.

4. *Encoding error* atau kesalahan menuliskan jawaban

Encoding error atau kesalahan menuliskan jawaban yaitu siswa tidak dapat menafsirkan dengan benar jawaban yang diperoleh. Jha (2012: 18) menyebutkan bahwa kesalahan menuliskan jawaban terjadi jika siswa tidak dapat menyatakan solusi sebuah masalah dalam bentuk tertulis. Sedangkan menurut Singh, Rahman, & Hoon (2010: 267) kesalahan menuliskan jawaban masih tetap bisa terjadi meskipun siswa selesai memecahkan permasalahan matematika yaitu bahwa siswa salah menuliskan apa yang ia maksud.

Indikator dari *encoding error* atau kesalahan menuliskan jawaban yang digunakan pada penelitian ini yaitu antara lain:

a. Siswa tidak dapat menginterpretasikan solusi matematika ke dalam dunia nyata.

Terkadang kesalahan ini dapat dilihat dari jawaban yang tidak realistis.

b. Siswa salah dalam memaknai jawaban.

c. Siswa salah dalam penggunaan satuan.

Adapun contoh kesalahan menuliskan jawaban dapat dilihat juga pada tabel 5. Jawaban siswa yang menyatakan hasil akhirnya adalah 70 meter merupakan jawaban yang tidak masuk akal atau tidak sesuai dengan dunia nyata. Panjang langkah kaki seseorang adalah 70 meter merupakan sebuah jawaban yang tidak realistis.

C. Tes Diagnostik

Tes adalah serentetan pertanyaan atau latihan serta alat lain yang akan digunakan untuk mengukur keterampilan, pengetahuan inteligensi, kemampuan dan juga bakat yang dimiliki oleh individual atau kelompok (Arikunto, 2006: 46). Tes juga merupakan perangkat atau prosedur dimana sampelnya adalah perilaku individu yang dikumpulkan, dievaluasi, dan diskor menggunakan prosedur standar (Reynolds, Livingstons, & Wilson, 2011: 3). Stiggins (2012: 3) menyatakan bahwa penilaian dengan tes dapat mengumpulkan informasi tentang belajar siswa untuk memberikan keputusan instruksional yang disesuaikan dengan proses apakah berjalan dengan baik atau tidak. Berdasarkan tujuannya, terdapat empat macam tes, yaitu tes penempatan, tes diagnostik, tes sumatif, dan tes formatif. Pengujian berbasis kompetensi salah satunya menggunakan tes diagnostik (Mardapi, 2012: 111).

Salah satu teknik yang dapat digunakan dalam mendeteksi adanya kesalahan siswa dalam menyelesaikan permasalahan matematika yaitu salah satunya menggunakan tes diagnostik. Diagnostik pada dasarnya adalah tindakan untuk menganalisis secara tepat masalah dan mengidentifikasi penyebabnya untuk tujuan pengambilan keputusan berdasarkan klasifikasi (Rupp & Henson, 2010: 1).

Perbedaan antara tes diagnostik dengan tes formatif dapat dilihat dari fungsinya serta waktu pelaksanaannya. Tes diagnostik berguna untuk mengungkapkan kesulitan belajar yang dialami siswa berdasarkan kesalahan yang dilakukan siswa saat mengerjakan tes pada mata pelajaran tertentu. Pada umumnya tes diagnostik

diberikan setelah tes formatif, yaitu apabila standar yang sudah ditetapkan tidak tercapai. Pertanyaan pada tes diagnostik cenderung memiliki tingkat kesukaran yang rendah dan mencakup materi yang dirasa sukar oleh siswa. Sedangkan untuk tes formatif dilaksanakan secara periodik selama proses belajar mengajar berlangsung. Tes ini berguna untuk memantau kemajuan belajar siswa dan hasilnya merupakan umpan balik bagi guru dan siswa. Hasil tes ini merupakan informasi tentang tujuan pelajaran yang sudah dicapai dan yang belum dicapai.

Gurel (2015) menyebutkan bahwa tes diagnostik didefinisikan tes yang dipergunakan untuk mengetahui kelemahan dan kekuatan dari kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah berupa matematika. Hal tersebut senada dengan pengertian tes diagnostik menurut Depdiknas (2007: 3) yang menyebutkan bahwa tes diagnostik merupakan tes untuk mendeteksi kelemahan-kelemahan atau kesalahan-kesalahan siswa sehingga berdasarkan hasil diagnostik tersebut dapat diberikan perlakuan yang tepat. Fungsi utama dari tes diagnostik, yaitu mengidentifikasi kesalahan yang dialami siswa serta merencanakan tindak lanjut yang berupa upaya untuk menangani kesalahan yang terjadi.

Kekuatan dan kelemahan siswa dalam belajar dapat diketahui melalui tes diagnostik. Tes diagnostik adalah untuk mencari kembali tentang kesulitan yang dialami siswa melalui kesalahan yang dilakukan siswa saat menyelesaikan soal tes yang muncul dan berkembang. Untuk menemukannya tidak dapat dilakukan dengan segera, diperlukan sebuah analisis kemampuan yang lengkap dan seksama.

Tes diagnostik dapat dikatakan baik jika tes tersebut dapat memberikan gambaran yang akurat tentang miskonsepsi yang dimiliki siswa berdasarkan informasi kesalahan yang dibuatnya. Gorin (Leighton & Gierl, 2007: 3) mengemukakan bahwa sebuah tes diagnostik yang disebut baik adalah tes yang dapat menunjukkan apakah seseorang telah menguasai ketrampilan atau belum. Hasil tes diagnostik dapat memberikan informasi kepada guru mengenai kemampuan awal dan miskonsepsi siswanya sebelum memulai aktivitas belajar.

Diagnostik dalam pendidikan dan diagnostik dalam dunia medis terdapat banyak persamaan, tetapi diagnostik lebih luas dalam dunia pendidikan. Diagnostik dalam dunia medis pada umumnya terkait dengan kondisi penyakit atau hal-hal secara fisik yang dapat dilihat dengan jelas dan penyebabnya merupakan hal yang spesifik. Berbeda dengan diagnostik dalam dunia pendidikan. Banyaknya kesalahan yang dilakukan siswa sebagai bukti kesulitan belajar tidak disebabkan oleh cacat struktural atau cacat fisik tetapi hal tersebut biasanya muncul tidak hanya dari satu sebab tetapi dari banyak faktor yang berlangsung bersamaan.

Diagnosis dalam pendidikan itu merupakan sebuah konsep yang lebih luas, meliputi identifikasi dan klasifikasi kekuatan serta kelemahan yang dialami oleh siswa. Diagnosis dilakukan agar dapat membantu guru dalam menentukan bagian mana proses dalam belajar mengajar yang telah dan atau belum dikuasai oleh siswa. Diagnosis kesalahan siswa dilakukan untuk memahami jenis, karakteristik, dan latar belakang kesulitan-kesulitan belajar dengan menghimpun, mempergunakan berbagai

data, informasi selengkap dan seobjektif mungkin sehingga memungkinkan untuk mengambil keputusan dan kesimpulan serta mencari alternatif kemungkinan pemecahannya.

D. Two-tier Multiple Choice

Tes diagnostik digunakan untuk menentukan elemen-elemen dalam suatu mata pelajaran yang mempunyai kelemahan-kelemahan khusus dan memberikan petunjuk untuk menemukan penyebab kekurangan tersebut. Tes yang dilakukan untuk keperluan diagnostik haruslah tes yang didasarkan pada analisa secara rinci dan tepat mengenai letak kelemahan atau juga tahap secara umum di mana letak kekurangan. Djamarah (2002: 249-250) menyebutkan bahwa tes diagnostik dimaksudkan untuk mengetahui kesulitan belajar yang dialami siswa berdasarkan kesalahan yang dilakukan siswa pada tes formatif sebelumnya. Diagnosis kesulitan belajar siswa lebih luas daripada pelaksanaan tes diagnostik, sehingga perlu dilakukan kegiatan lain seperti penelusuran jenis kesalahan, sumber serta penyebab kesalahan.

Salah satu bentuk tes diagnostik adalah *two-tier multiple choice* atau pilihan ganda dua tingkat. Dalam tes diagnostik *two-tier multiple choice*, pada tingkat pertama berisi pertanyaan dengan berbagai pilihan jawaban, dan pada bagian kedua berisi pilihan alasan-alasan yang mengacu pada tingkat pertama (Tan, 2005: 182). Alasan pada tingkat kedua terdiri atas pilihan alasan yang benar dan beberapa alasan yang mengandung pemahaman yang tidak lengkap, yang didapat dari identifikasi

awal terhadap siswa. Alasan bisa didapatkan dari pertanyaan dengan alasan terbuka dan beberapa informasi yang didapat dari literatur dan wawancara (Treagust, 2006: 3).

Tuysuz (2009: 627) menyebutkan bahwa tes diagnostik *two-tier multiple choice* memiliki dua keuntungan dibandingkan dengan pilihan ganda biasa, yaitu:

1. Mengurangi tingkat kesalahan pengukuran. Pada pilihan ganda biasa dengan lima pilihan jawaban ada 20% jawaban dipilih dengan benar. Jawaban benar yang dipilih secara acak akan dihitung juga dalam penilaian, hal ini menyebabkan kemampuan siswa tidak dapat diketahui secara pasti.
2. *Two-tier multiple choice* memungkinkan guru untuk menilai dua aspek dalam satu fenomena. Pada tingkat pertama siswa diminta untuk menjawab permasalahan yang terjadi, kemudian pada tingkat kedua siswa diminta untuk menjelaskannya. Hal ini memungkinkan guru menilai pengetahuan siswa dan pemahaman konsep siswa.

Question 20 ♦♦ total questions of the test is 25

Question	Where is the arrow pointing in the picture of the number line below ?	
Answer:	☐	2.4
	☐	$\frac{14}{15}$
	☐	$2\frac{4}{5}$
	☐	$2\frac{4}{15}$
Submit		

Step 2: According to the chosen answer, the student is required to choose a reason for the selection

My reason is

☐	Counting from 2, there are 4 marks. Therefore, the arrow is pointing at 2.4.
☐	The arrow indicates 2 plus 4 marks.
☐	I'm guessing.
Submit	

My reason is

☐	There are 15 intervals and the arrow points to the 14th interval.
☐	The arrow is positioned near 3. $\frac{14}{15}$ is the best answer because to make it an integer we just need $\frac{1}{15}$ more.
☐	I'm guessing.
Submit	

My reason is

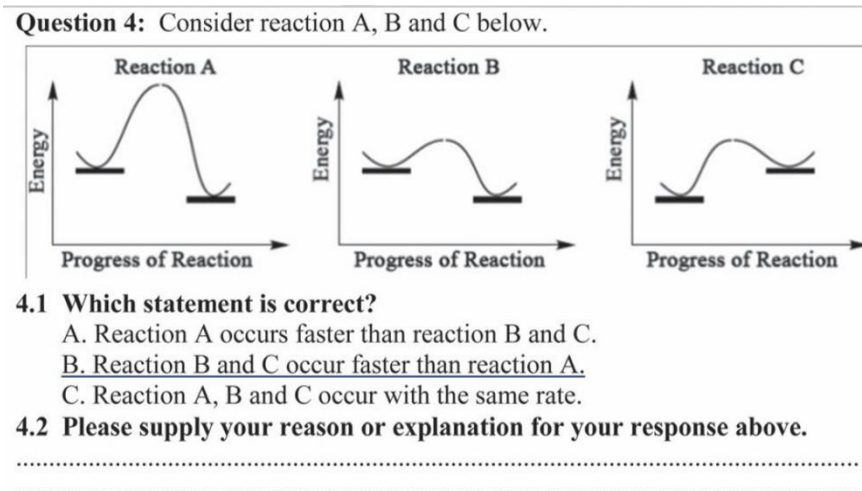
☐	The arrow is positioned at 2 plus 4 of the 5 intervals, so the answer is $2\frac{4}{5}$.
☐	$2\frac{4}{5} = 2.8$, but $2\frac{4}{15} \div 2.3$, so $2\frac{4}{5}$ is the only number near 3.
☐	I'm guessing.
Submit	

My reason is

☐	There are 15 intervals and the arrow is positioned at 2 plus 4 intervals.
☐	The arrow is positioned near 3, so $2\frac{4}{15}$ is the best choice.
☐	I'm guessing.
Submit	

Gambar 1
Contoh Soal *Two-tier Multiple Choice Tipe 1*

Gambar 1 merupakan contoh soal tipe *two-tier multiple choice* untuk mengungkap kesalahan mengenai *number sense* yang dikembangkan oleh Yung-Chi Lin, Der-Ching Yang, dan Mao-Neng Li (2015: 46) dalam penelitiannya yang berjudul '*Diagnosing students' misconceptions in number sense via a web-based two-tier test*'. Pada penelitian ini, secara umum tes diagnostik tipe *two-tier multiple choice* memiliki format yang sama, yaitu pada tingkat pertama merupakan soal pilihan ganda dengan lima pilihan jawaban, tetapi pada tingkat kedua siswa akan diminta untuk menuliskan cara mendapatkan jawaban pada tingkat pertama dan juga diminta untuk menyebutkan alasan siswa memilih cara tersebut untuk menyelesaikan soal pada tingkat pertama, sebagaimana yang digunakan oleh Supasorn dan Promarak (2015: 125) yaitu pada tingkat pertama siswa diberikan pertanyaan dengan lima pilihan jawaban, kemudian pada tingkat kedua siswa diminta untuk memberikan metode perhitungan atau prosedur penyelesaian berdasarkan jawaban yang mereka pilih pada tingkat pertama. Contohnya dapat dilihat pada gambar 2 berikut.



Gambar 2
Contoh Soal *Two-tier Multiple Choice* Tipe 2

E. Materi Kalkulus SMA

Kalkulus adalah salah satu cabang dari matematika yang sangat penting dan banyak diterapkan secara luas pada cabang-cabang ilmu pengetahuan yang lain, misalnya pada cabang sains, teknologi, pertanian, kedokteran, perekonomian, dan lain sebagainya. Secara garis besar, kalkulus dapat dikelompokkan menjadi dua cabang besar, yakni kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Sedangkan pada tingkat SMA kalkulus yang dipelajari siswa terbagi menjadi tiga kelompok besar yaitu limit fungsi, turunan atau diferensial fungsi, dan integral. Pada penelitian ini fungsi yang digunakan masih sebatas fungsi aljabar yang meliputi fungsi linear, fungsi polinomial, fungsi rasional, dan fungsi irasional. Selanjutnya akan dijelaskan lebih terperinci mengenai cakupan materi pada penelitian ini.

1. Limit Fungsi Aljabar

Sebagaimana yang disebutkan sebelumnya bahwa kalkulus secara garis besar terbagi menjadi kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Jika diperhatikan inti dari pelajaran kalkulus adalah memakai dan menentukan limit suatu fungsi. Bahkan secara ekstrim kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Oleh karena itu, pemahaman akan konsep limit fungsi serta pengetahuan akan sifat-sifat dan operasi limit fungsi merupakan syarat mutlak untuk memahami kalkulus diferensial dan kalkulus integral, sehingga menyebabkan limit fungsi hendaknya dikuasai dengan baik oleh siswa.

Terdapat dua cara untuk memahami pengertian limit fungsi yaitu secara intuitif dan secara formal. Untuk memahami limit fungsi secara intuitif dapat diperhatikan contoh soal berikut.

Contoh:

Pandanglah fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ dengan $D_f = \{x|x \in R, x \neq 2\}$. Untuk $x = 2$ jika dicari nilai fungsi maka diperoleh: $f(2) = \frac{0}{0}$ yang berarti nilai tersebut tak tentu atau tak terdefinisi.

Maka akan dicari nilai-nilai $f(x)$ untuk x mendekati 2. Untuk nilai fungsi $f(x)$ di sekitar $x = 2$ dapat dilihat pada tabel 6 berikut:

Tabel 6 Nilai Fungsi $f(x)$ di Sekitar $x = 2$

x	1,90	1,99	1,999	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,90	3,99	3,999	3,999	...	?	...	4,001	4,01	4,1

Berdasarkan tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk x mendekati 2 naik dari arah kiri ataupun dari arah kanan maka nilai fungsi $f(x)$ makin mendekati 4, sehingga dapat disimpulkan bahwa limit $f(x)$ untuk x mendekati 2 sama dengan 4, yang dapat ditulis dengan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Berdasarkan soal di atas dapat kita peroleh pengertian limit secara intuitif yaitu: “bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ artinya bahwa bilamana x dekat ke c tetapi tidak sama dengan c , maka $f(x)$ dekat ke L ”

Selanjutnya untuk pengertian limit fungsi secara formal sama halnya pengertian atau definisi limit fungsi secara matematika yang selanjutnya akan disebut dengan definisi formal limit fungsi.

Definisi Limit:

“ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapa pun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni dapat ditulis $0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ ”

Terdapat beberapa teorema pokok mengenai limit suatu fungsi, yaitu antara lain:

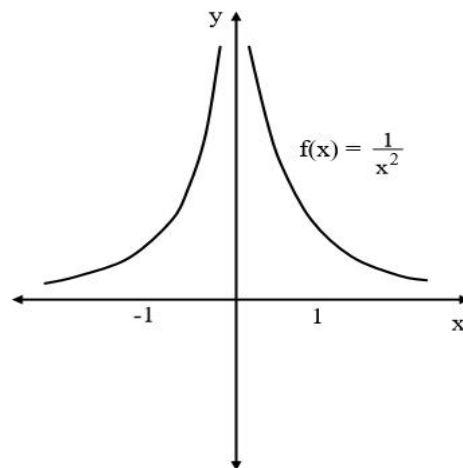
1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$, dengan k suatu konstanta.
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3. $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x). \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
7. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, dengan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$

9. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, dengan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ jika n genap.

Selanjutnya untuk pengertian limit di tak hingga dapat dilihat dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ yang domainnya semua bilangan real yang tidak 0. Jika dicari nilai-nilai fungsi $f(x)$ di sekitar 0 maka akan diperoleh tabel nilai dan gambar grafik sebagai berikut:

Tabel 7 Nilai Fungsi $f(x)$ di sekitar 0

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10.000
0,001	1000 10^6
0,0001	10.000 10^8
↓	↓
0	besar sekali disebut tak hingga
↑	↑
-0,0001	10.000 10^8
-0,001	1000 10^6
-0,01	100 10.000
-0,1	10 100
-1	1



Gambar 3

Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Apabila x suatu bilangan baik positif maupun negatif yang sangat kecil atau x semakin dekat dengan nol maka nilai fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar, dengan kata lain $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sehingga diperoleh definisi sebagai berikut:

“dikatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M terdapat sebuah $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga $0 < x - c < \delta \rightarrow f(x) > M$ ”

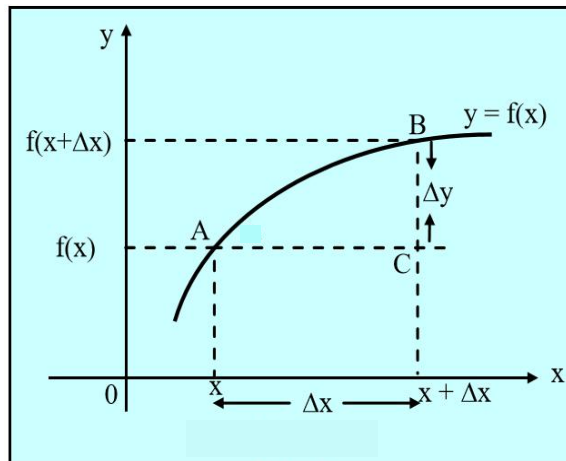
Selanjutnya untuk limit fungsi dengan x mendekati ∞ (tak hingga) dapat didefinisikan sebagai berikut:

“dikatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, apabila diberikan $\varepsilon > 0$ maka akan ditemukan suatu bilangan M sedemikian hingga dipenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x > M$ ”

2. Turunan Fungsi Aljabar

Tidak ada sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini, bahkan sesuatu yang bersifat tetap pada hakikatnya dia mengalami perubahan. Banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan, misalnya gerak suatu objek, pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, pertumbuhan dan peluruhan, dan lain sebagainya.

Studi mengenai garis singgung dan penentuan kecepatan benda bergerak yang dirintis oleh Archimedes (287-212 SM), Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) dan Leibniz (1646-1716) dapat dipandang sebagai peletak dasar kalkulus diferensial ini. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi (Setiawan, 2010: 18).



Gambar 4
Grafik Laju Perubahan Nilai Fungsi

Berdasarkan gambar 4 di atas, perhatikan $y = f(x)$ pada domain $(x, x + \Delta x)$ nilai fungsi berubah dari $f(x)$ pada x sampai dengan $f(x + \Delta x)$ pada $(x + \Delta x)$.

$$\begin{array}{rcl} y + \Delta y & = & f(x + \Delta x) \\ y & = & f(x) \\ \hline \Delta y & = & f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

Δy merupakan diferensi antara $f(x + \Delta x)$ dengan $f(x)$, sedangkan Δx adalah diferensi x , dan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ merupakan hasil bagi diferensi. Jika B bergerak sepanjang kurva $y = f(x)$ mendekati A , maka diperoleh limit sebagai berikut:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nilai limit ini disebut dengan derivatif atau turunan dari $y = f(x)$, dan biasa ditulis dengan $\frac{dy}{dx}$ (dikenal dengan notasi Leibniz) atau y' (baca: y aksen), sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sehingga diperoleh definisi formal dari turunan adalah sebagai berikut (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2011):

“Turunan sebuah fungsi f yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$, dengan limitnya ada dan bukan ∞ atau $-\infty$ ”

Terdapat beberapa aturan pada turunan fungsi aljabar polinomial, yaitu antara lain:

1. $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$, dengan c suatu konstanta.
2. $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
3. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, dengan n bilangan bulat positif.
4. $y = k.f(x) \rightarrow y' = k.f'(x)$, dengan k suatu konstanta.
5. $y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$
6. $y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$
7. $y = f(x).g(x) \rightarrow y' = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$
8. $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

3. Integral Fungsi Aljabar

Matematika memiliki banyak pasangan operasi balikan, seperti halnya penjumlahan dengan pengurangan, perkalian dengan pembagian, perpangkatan dengan penarikan akar, dan lain sebagainya. Integral juga merupakan pasangan

operasi balikan dari turunan, atau dapat disebut bahwa integral merupakan operasi balikan dari turunan atau antiturunan.

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, teknologi, biologi, dan ekonomi tidak dapat disangkal lagi. Orang yang tercatat dalam sejarah pertama kali mengemukakan ide tentang integral adalah Archimedes (287-212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah lingkaran, daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur, dan sebagainya. Sejarah juga mencatat orang yang paling berjasa dalam pengembangan kalkulus integral adalah George Friederich Benhard Riemann (1826-1866).

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai integral tak tentu. Definisi integral tak tentu:

“ F dikatakan suatu antiturunan dari f pada selang I jika $F'(x) = f(x)$ pada I , yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I (jika x suatu titik ujung I maka $F'(x)$ hanya perlu turunan sepihak)”

Notasi untuk integral atau anti turunan dari suatu fungsi $f(x)$ adalah “ $\int f(x)$ ”.

Sebagaimana pada limit fungsi dan turunan fungsi, pada integral juga terdapat beberapa aturan yang dapat membantu untuk menyelesaikan persoalan integral. Aturan tersebut antara lain:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a dx = ax + C$, dengan a suatu konstanta
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, dengan n sebarang bilangan rasional kecuali -1.

$$4. \int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$5. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$6. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$7. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Selanjutnya pada integral juga terdapat dua teknik integrase, yaitu pengintegralan dengan substitusi dan integral parsial.

1. Pengintegralan dengan substitusi

Andaikan g adalah fungsi yang terdiferensiasikan dan anggaplah F antiturunan dari f . Kemudian jika $u = g(x)$ maka,

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

2. Integral parsial

Jika integrase menggunakan substitusi gagal, dimungkinkan menggunakan substitusi ganda yang lebih dikenal dengan integral parsial. Metode ini didasarkan pada integrasi rumus untuk turunan hasil kali dua fungsi.

Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ maka:

$$[u(x).v(x)]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

$$u(x)v'(x) = [u(x).v(x)]' - v(x)u'(x)$$

$$\int u(x)v'(x) dx = \int [u(x).v(x)]' dx - \int v(x)u'(x) dx$$

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

Karena $dv = v'(x)$ dan $du = u'(x)$ maka persamaan di atas dapat kita tulis sebagai: $\int u dv = uv - \int v du..$

F. Konstruksi Instrumen Tes Diagnostik

Instrumen memegang peranan yang sangat penting dalam menentukan mutu suatu penelitian, karena validitas atau kesahihan data yang diperoleh akan sangat ditentukan oleh kualitas atau validitas instrumen yang digunakan, disamping prosedur pengumpulan data yang ditempuh. Instrumen berfungsi mengungkapkan fakta menjadi data, sehingga jika instrumen yang digunakan mempunyai kualitas yang memadai dalam arti valid dan reliabel maka data yang diperoleh akan sesuai dengan fakta atau keadaan yang sesungguhnya di lapangan. Instrumen dalam sebuah penelitian ada yang sudah tersedia atau instrumen baku ada pula instrumen yang harus dikonstruksi dan dikembangkan sendiri.

Terdapat beberapa teori untuk mengembangkan atau mengkonstruksi instrumen, termasuk instrumen tes diagnostik, salah satunya adalah teori konstruksi instrumen menurut Retnawati (2016: 3-6). Berikut merupakan langkah-langkah konstruksi atau pengembangan instrumen tes diagnostik:

1. Menentukan tujuan penyusunan instrumen, tujuan penyusunan instrumen disesuaikan dengan tujuan penelitian. Tujuan penyusunan instrumen digunakan sebagai acuan atau panduan teori untuk mengkonstruksi instrumen, bentuk instrumen, penskoran dan pemaknaan hasil penskoran pada instrumen yang akan

dikembangkan. Tujuan dari penyusunan instrumen tes diagnostik adalah untuk mengungkapkan kesulitan belajar yang dialami siswa berdasarkan kesalahan yang dilakukan siswa saat menyelesaikan permasalahan matematika.

2. Mencari teori yang relevan atau cakupan materi. Teori yang relevan digunakan untuk membuat konstruk dan untuk menentukan indikator variabel yang akan diukur. Kemudian cakupan materi digunakan sebagai batasan materi yang digunakan pada instrumen. Untuk instrumen tes diagnostik cakupan materi yang dipilih adalah materi yang sekiranya dirasa sukar atau sulit oleh siswa.
3. Menyusun indikator butir instrumen/soal. Indikator soal ditentukan berdasarkan kajian teori yang relevan dan cakupan materi. Indikator ini bersifat khusus, sehingga dengan menggunakan indikator dapat disusun menjadi butir instrumen. Aspek yang diukur dengan indikatornya akan dibuat dalam bentuk tabel yang nantinya disebut dengan kisi-kisi instrumen. Selain itu dengan tersusunnya indikator berdasarkan hasil tes diagnostik guru akan bisa mengetahui indikator-indikator mana yang siswa banyak melakukan kesalahan dalam menyelesaikannya.
4. Menyusun butir instrumen. Penyusunan butir instrumen dilakukan dengan melihat indikator yang sudah disusun pada kisi-kisi. Pada penyusunan butir ini, perlu dipertimbangkan bentuk dari instrumen. Pada penyusunan butir ini, peneliti telah mempertimbangkan penskoran untuk tiap butir sehingga akan memudahkan dalam proses analisis. Ketika menyusun butir instrumen untuk tes diagnostik perlu diperhatikan untuk tingkat kesukaran soal. Untuk tes diagnostik tingkat kesukaran

butir soal cenderung lebih rendah dibandingkan dengan tes formatif dikarenakan tujuannya yang ingin mengungkap kesulitan yang dialami siswa.

5. Validasi isi. Validasi isi dilakukan dengan menyampaikan kisi-kisi, butir instrumen, dan lembar diberikan kepada ahli untuk ditelaah secara kuantitatif dan kualitatif. Tugas ahli adalah melihat kesesuaian indikator dengan tujuan pengembangan instrumen, kesesuaian indikator dengan cakupan materi atau kesesuaian teori, melihat kesesuaian instrumen dengan indikator butir, melihat kebenaran konsep butir soal, melihat kebenaran isi, kebenaran kunci (pada tes), bahasa dan budaya. Proses ini disebut dengan validasi isi dengan mempertimbangkan penilaian ahli (*expert judgement*). Jika validasi isi akan dikuatifikasi, peneliti dapat meminta ahli untuk mengisi lembar penilaian validasi. Minimal terdapat tiga ahli yang dilibatkan untuk proses validasi isi instrumen penelitian.
6. Revisi berdasarkan masukan validator. Setelah validator atau para ahli melakukan validasi isi maka akan terlihat butir instrumen mana yang perlu diperbaiki dan mana yang sudah sesuai. Jika ada yang perlu diperbaiki maka peneliti memperbaiki butir instrumen tersebut sesuai berdasarkan masukan dari validator dan mengkonsultasikannya sehingga mendapatkan butir instrumen yang lebih baik.
7. Melakukan ujicoba kepada responden yang bersesuaian untuk memperoleh data respons peserta. Ujicoba ini dilakukan dalam rangka memperoleh bukti empiris.

Ujicoba ini dapat dilakukan kepada responden yang bersesuaian dengan subjek penelitian.

8. Melakukan analisis (reliabilitas, tingkat kesulitan, dan daya pembeda). Setelah ujicoba dilakukan peneliti akan mendapatkan data respon peserta ujicoba yang kemudian berdasarkan data tersebut akan dilakukan penskoran. Kemudian hasil penskoran akan digunakan untuk melakukan analisis reliabilitas skor perangkat tes dan juga analisis karakteristik butir.
9. Merakit instrument. Setelah karakteristik butir diketahui, peneliti dapat merakit ulang perangkat instrument. Pemilihan butir-butir dalam merakit perangkat ini mempertimbangkan karakteristik tertentu yang dikehendaki peneliti. Setelah diberi instruksi pengerjaan maka kemudian peneliti dapat menggunakan instrumen tersebut untuk mengumpulkan data penelitian.

G. Penelitian yang Relevan

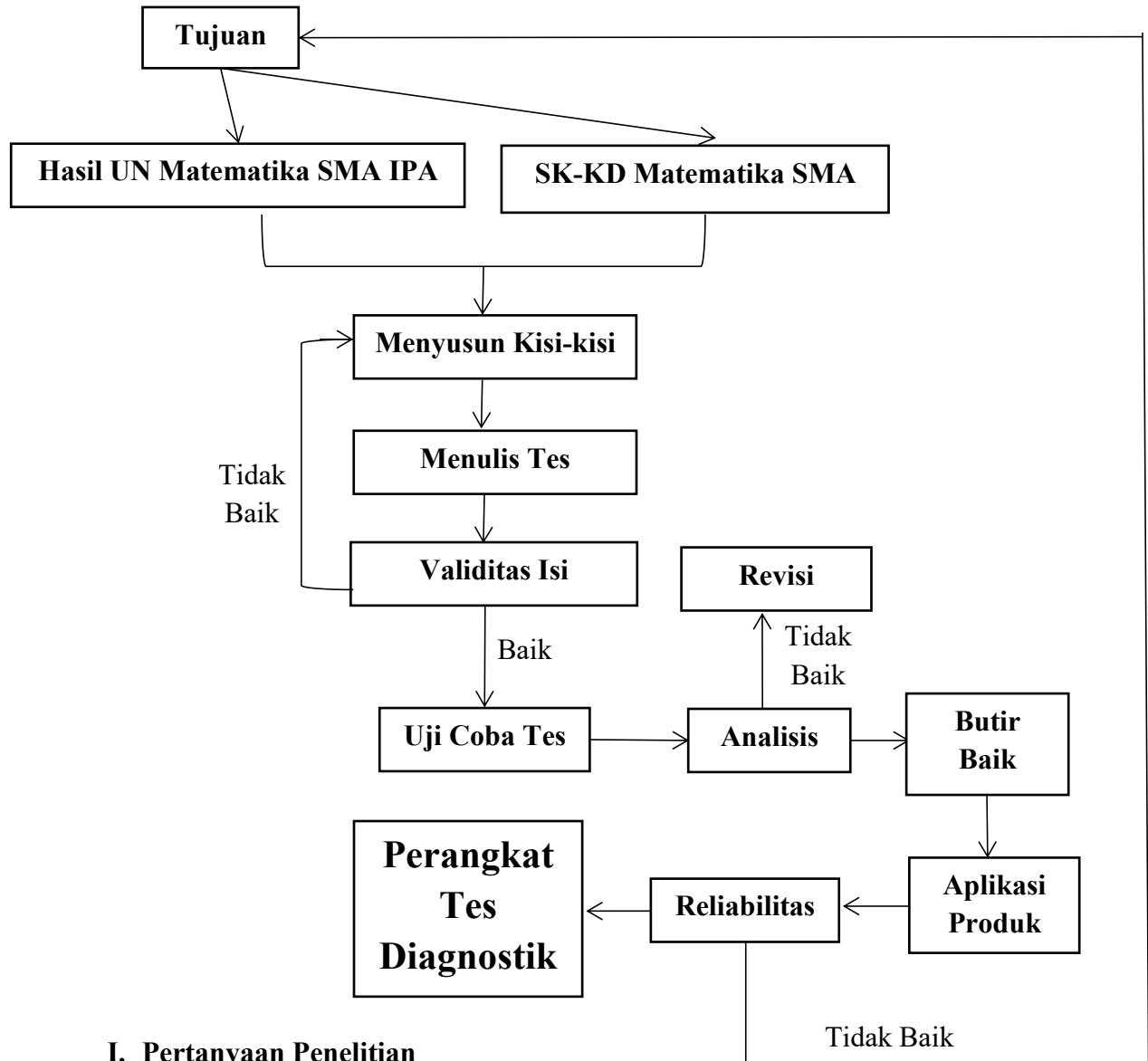
Haslam dan Treagust (1987: 208) juga pernah melakukan penelitian di bidang biologi menggunakan tes diagnostik *two-tier multiple choice* untuk menyelidiki miskonsepsi siswa terhadap fotosintesis dan respirasi. Hasil penelitian Haslam dan Treagust (1987: 208) menunjukkan bahwa miskonsepsi yang dialami siswa berhubungan dengan kurangnya pemahaman siswa tentang hubungan antara fotosintesis dan respirasi, serta kurangnya pemahaman siswa akan waktu respirasi tumbuhan. Odom dan Barrow (1995: 55) juga mengembangkan tes diagnostik *two-tier multiple choice* untuk mengukur pemahaman siswa tentang konsep difusi dan

osmosa. Hasilnya menunjukkan bahwa penting untuk mengidentifikasi miskonsepsi difusi dan osmosa, hal tersebut diperlukan untuk mengembangkan strategi untuk memberikan siswa pengetahuan konsep yang akurat yang diperlukan untuk pemecahan masalah.

Franklin (1992: 69) mengembangkan suatu tes diagnostik *two-tier multiple choice* yang terdiri dari 40 butir soal untuk mengidentifikasi konsep pada materi kekuatan, cahaya, panas, dan listrik. Pemaknaan kualitatif dan kuantitatif telah digunakan untuk menentukan reliabilitas tes, validitas tes, dan kegunaan tes. Analisa butir juga dilakukan untuk menentukan diskriminasi butir dan reliabilitas tes. Wawancara dilakukan kepada 27 siswa untuk mengesahkan tes diagnostik tersebut. Kemudian enam guru diamati dan diwawancarai untuk menentukan pendapat guru sehubungan dengan kegunaan tes tersebut.

Selain itu ada pula penelitian yang dilakukan oleh Amry, Rahayu, dan Yahmin (2016: 721) yaitu pengembangan instrument tes diagnostik *two-tier* pada materi asam basa. Instrument terdiri dari 27 butir soal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa instrument tes diagnostik yang dikembangkan termasuk ke dalam kategori soal yang baik ditinjau dari validitas dan reliabilitasnya. Hasil analisis butir soal menunjukkan validitas dengan kategori rendah sebesar 6%, kategori cukup sebesar 41%, dan kategori tinggi sebesar 35%. Tes yang dikembangkan memiliki reliabilitas sebesar 0,869.

H. Kerangka Berpikir



I. Pertanyaan Penelitian

Inti pokok kajian penelitian ini dapat digambarkan dalam pertanyaan penelitian sebagai berikut:

1. a. Bagaimana konstruksi tes diagnostik *two-tier multiple choice* berdasarkan validitas isi?

- b. Bagaimana konstruksi tes diagnostik *two-tier multiple choice* berdasarkan validitas konstruk?
2. Bagaimana kualitas tes diagnostik *two-tier multiple choice* berdasarkan nilai reliabilitas?
3. a. Bagaimana kualitas butir soal tes diagnostik *two-tier multiple choice* berdasarkan indeks kesukaran?
- b. Bagaimana kualitas butir soal tes diagnostik *two-tier multiple choice* berdasarkan daya pembeda?
- c. Bagaimana kualitas butir soal tes diagnostik *two-tier multiple choice* berdasarkan efektivitas pengecoh?
4. Kesalahan apa saja yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal tes diagnostik *two-tier multiple choice* pada materi kalkulus?
5. Apa saja penyebab kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal tes diagnostik *two-tier multiple choice* pada materi kalkulus?
6. Rekomendasi apa saja yang dapat dilakukan untuk mengatasi kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal tes diagnostik *two-tier multiple choice* pada materi kalkulus?