MODEL SIS DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK

Eti Dwi Wiraningsih[1], Widodo[2], Lina Aryati[2], Syamsuddin Toaha[3]

[1]Universitas Negeri Jakarta
[2]Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
[3]Universitas Hassanudin Makassar

ABSTRAK

Dalam paper ini akan dibahas model interaksi satu spesies yang dipengaruhi oleh penyakit, dimana spesies tidak mengalami kekebalan setelah terinfeksi, sehingga kelas rentan berpindah ke kelas terinfeksi ketika terjadi penginfeksian dan akan kembali ke kelas rentan setelah penyembuhan (SIS). Lebih khusus model ini dibatasi dengan asumsi penyakit mengurangi reproduksi dan penyakit berelasi dengan kematian. Jika tidak ada penyakit, maka model merupakan persamaan logistik biasa, dengan pertumbuhan terbatas.

Selanjutnya akan akan dianalisa kestabilan dan perilaku asimtotis di sekitar titik ekuilibriumnya.

***Kata kunci** : Model SIS, Model pertumbuhan logistik*

I. Latar Belakang

Patogen seperti virus, bakteri dan protozoa memberikan pengaruh terhadap dinamika populasi induk (Anderson dan May, 1978, 1986; May dan Anderson, 1978; Hethcote dan Lewin, 1989; Begon dan Bowers, 1995; Grenfell dan Dobson, 1995). Sebagai contoh, infeksi penyakit dapat merubah ukuran atau densitas dari populasi induk.

Infeksi penyakit disebut tipe SIS jika spesies tidak mengalami kekebalan setelah terinfeksi, sehingga kelas rentan berpindah ke kelas terinfeksi ketika terjadi penginfeksian dan akan kembali ke kelas rentan setelah penyembuhan. Jika spesies mengalami kekebalan sementara setelah sembuh, maka penyakit dikatakan bertipe SIRS. Model SIR adalah kasus khusus dari model SIRS dimana kekebalan bersifat permanen, sehingga spesies yang telah sembuh tidak akan pernah kehilangan kekebalannya. Disini akan dibahas modifikasi SIS pada populasi induk dengan penyakit berhubungan dengan kematian dan penyakit mengurangi reproduksi.

Selengkapnya bahasan dalam makalah ini meliputi formulasi baru dan analisis model untuk penyakit tipe SIS dalam satu populasi induk dengan pertumbuhan logistik dengan kedua jenis tipe insiden, yaitu insiden *frequency-dependent* dan insiden *mass-action*. Untuk model dengan insiden *frequency-dependent*, dua kuantitas threshold menentukan tiga kemungkinan perilaku asimtotik dari solusinya. Kemungkinan yang pertama adalah bahwa penyakit pergi dari populasi induk dan ukuran populasi mendekati kapasitas batas. Kemungkinan kedua adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik dan ukuran populasi mendekati suatu titik ekuilibrium baru di bawah kapasitas batas. Kemungkinan ketiga adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik, tetapi kematian yang disebabkan oleh infeksi lebih kuat daripada angka pertumbuhan populasi maksimum, sehingga ukuran populasi induk menuju nol (kepunahan). Ketiga kemungkinan ini beralasan secara intuitif, tetapi tidak terjadi dalam suatu populasi induk dengan insiden mass-action.

II. Rumuan Masalah, Tujuan dan Manfaat Penelitian

Berdasarkan latar belakang diatas, permasalahan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana membentuk model SIS dengan pertumbuhan logistik.
2. Bagaimana menentukan titik-titik ekuilibrium dari model SIS dengan pertumbuhan logistik.
3. Bagaimana perilaku asimtotis model SIS dengan pertumbuhan logistik.

Sesuai dengan rumusan masalah, tujuan dari penelitian adalah:

1. Membentuk model SIS dengan pertumbuhan logistik.
2. Menentukan titik-titik ekuilibriumnya.
3. Menganalisa perilaku asimtotis di sekitar titik ekuilibriumnya.

Penelitian ini merupakan kajian dalam matematika terapan khususnya bidang pemodelan matematika, sehingga adanya penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan bagi penelitian-penelitian selanjutnya di bidang terkait.

III. Dasar Teori

Kestabilan Dinamik

Teorema 3.1.(Willems, 1970).

Titik ekuilibrium *x=0* dari sistem linier $\dot{x} = f(x) = Ax$ adalah stabil jika semua nilai eigen dari matrik *A* mempunyai bagian real tak positif dan stabil asimtotik jika semua nilai eigen dari matrik *A* mempunyai bagian real negatif. Titik ekuilibrium tersebut tidak stabil jika paling tidak satu nilai eigen mempunyai bagian real positif. Dan tidak stabil secara lengkap jika semua nilai eigen dari matrik A mempunyai bagian real positif.

Mari kita pikirkan suatu sistem dua dimensi tak linier

$$\dot{x} = f_1(x, y) \qquad (3.1)$$
$$\dot{y} = f_2(x, y),$$

yang mana f_1 dan f_2 memenuhi syarat Lipschitz lokal dalam kedua *x* dan *y*.

Teorema 3.2 Poincare – Bendinxson, (lihat Coddington dan Levinson (1955), Burton (1985) dan Glendening (1994)).

Diberikan $\phi(t)$ solusi dari sistem (3.1) yang terbatas untuk $t \geq 0$. Salah satu dipenuhi

(i) ϕ periodik

(ii) ϕ konvergen ke solusi periodik, atau

(iii) ada barisan $\{t_n\} \to \infty$ sedemikian hingga $\phi(t_n) \to (x_0, y_0)$ dan $f_1(x_e, y_e) = f_2(x_e, y_e) = 0$, i.e., (x_e, y_e) adalah titik ekuilibrium dari sistem (3.1).

Teorema 3.3 Kriteria Bendixson, (lihat Wiggin (1990)).

Diberikan f_1 dan f_2 mempunyai turunan parsial pertama yang kontinyu dalam dmain yang terhubung sederhana G dan andaikan bahwa $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ tidak berubah tanda dalam G dan tidak menghilangkan identitas dalam subhimpunan terbuka G. Maka tidak ada lintasan tertutup dalam G.

Teorema 3.4 Bendixson – Dulac, (lihat Wiggins (1990) dan Glendening (1994)).
Andaikan ada suatu fungsi smooth B(x,y) sedemikian hingga

$$\frac{\partial(B(x,y)\,f_1(x,y))}{\partial x}+\frac{\partial(B(x,y)\,f_2(x,y)}{\partial y}$$

tidak merubah tanda atau menghilangkan identitas dalam subhimpunan terbuka yang terhubung sederhana dalam domain G. Maka tidak ada lintasan tertutup di seluruh G.

3.2. Model Logistik

Model Logistik, kadangkala disebut model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik. Model ini kontinyu terhadap waktu yang dinyatakan oleh persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right).$$

Konstanta *r*, diasumsikan positif, disebut rata-rata pertumbuhan intrinsik, karena proporsi rata-rata pertumbuhan untuk *x* kecil akan mendekati *r*. Konstanta positif *K* dimaksudkan sebagai kapasitas batas lingkungan yaitu ketahanan populasi maksimum. Populasi pada tingkat *K* kadang juga disebut tingkat kejenuhan, karena untuk populasi besar lebih banyak kematian daripada kelahiran. Solusi model logistik dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ adalah

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}.$$

Model Logistik mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu x = 0 dan *x* = *K*. Titik ekuilibrium pertama tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium kedua stabil asimtotik global.

IV. Insiden *frequency-dependent* dan insiden *mass-action*

Insiden penyakit didefinisikan sebagai jumlah individu terinfeksi baru dari individu rentan yang disebabkan adanya kontak dengan individu terinfeksi. Seringkali disebut juga sebagai insiden horizontal untuk membedakannya dari insiden vertikal, yaitu jumlah kelahiran baru yang mendapatkan infeksi dari induknya. Pandang $X(t)$ sebagai jumlah individu rentan dalam waktu *t*, $Y(t)$ jumlah individu terinfeksi pada waktu t dan $N(t)$ ukuran populasi induk pada waktu t. Bentuk insiden dalam persamaan untuk dY/dt sering dituliskan sebagai $\lambda X = crpX$, dimana efisiensi penginfeksian λ adalah perkalian dari rata-rata kontak c, probabilitas kontak dengan penginfeksi r, dan probabilitas bahwa rata-rata kontak dengan penginfeksi cukup untuk mentranmisikan infeksi ρ. Biasanya probabilitas pentransmisian ρ diasumsikan konstan. Probabilitas r adalah bagian kelompok terinfeksi secara lokal, yang sering diasumsikan sama dengan bagian terinfeksi Y/N dalam seluruh populasi. Sehingga titik insidensi dapat dinyatakan dengan $cpXY/N$ dengan rata-rata kontak c khusus.

Asumsi umum adalah bahwa rata-rata kontak lokal c proporsional terhadap densitas lokal yang sama dengan densitas global N/A, dimana A adalah area tetap yang digunakan oleh populasi tersebut. Dengan konstanta k yang proporsional, insiden diatas menjadi $kpXY/A = \eta XY$. Bentuk insiden ini sering disebut sebagai insiden *mass-action* yang telah digunakan secara luas dalam pemodelan epidemik (Anderson dan May,1991).

Dilain pihak jika β menyatakan jumlah rata-rata cukup kontak (kontak cukup untuk transmisi) dari binatang rentan persatuan waktu. Karena Y/N adalah proporsi binatang terinfeksi persatuan waktu dari satu binatang rentan maka $\beta Y/N$ adalah jumlah rata-rata cukup kontak dari satu binatang rentan dengan binatang terinfeksi. Jumlah kasus baru persatuan waktu $(\beta Y/N)X$ adalah jumlah rata-rata cukup kontak dari semua binatang rentan dengan binatang terinfeksi persatuan waktu. Hethcote menyebut bentuk $\beta XY/N$ insiden standar**.** Karena insiden ini bergantung pada frekuensi penginfeksian Y/N, Begon et al menyebut bentuk $\beta XY/N$ sebagai *insiden frequency-dependent***.**

Kedua hukum tersebut sering digunakan dalam model infeksi penyakit. Dalam kasus insiden *mass-action*, parameter η tidak mempunyai interpretasi epidemiologis, tetapi jika dibandingkan dengan rumus insiden *frequency-dependent* menunjukkan bahwa $\beta = \eta N$ yang secara implicit memberikan asumsi bahwa rata-rata kontak β merupakan fungsi linear naik dari ukuran populasi. Tetapi kebergantungan linier ini tidak didukung oleh data, karena transmisi antara dua binatang ditentukan terutama oleh interaksi lokal diantara binatang yang biasanya bebas atau hanya bergantung lemah pada ukuran populasi. Dari berbagai kajian ditemukan juga bahwa insiden (standar) *frequency-dependent* lebih realistik daripada insiden *mass-action*.

V. Model SIS dengan pertumbuhan logistik.

Model SIS satu populasi induk dengan pertumbuhan terbatas dirumuskan dengan

$$\begin{aligned}
dN/dt &= \left[a - \frac{\chi rN}{K}\right]\left[X + (1-f)Y\right] - \left[b + \frac{(1-\chi)rN}{K}\right]N - \alpha_0 Y \\
&= r(1 - N/K)N - (\alpha_0 + af)Y + f\chi rYN/K, \\
dX/dt &= \left[a - \frac{\chi rN}{K}\right]\left[X + (1-f)Y\right] - \left[b + \frac{(1-\chi)rN}{K}\right]X - g(X,Y,N) + \gamma Y, \qquad (5.1) \\
dY/dt &= g(X,Y,N) - \left[\gamma + b + \alpha_0 + \frac{(1-\chi)rN}{K}\right]Y,
\end{aligned}$$

Dimana a adalah angka kelahiran per kapita individu rentan pada ukuran populasi yang sangat rendah dan f adalah penurunan angka kelahiran yang disebabkan adanya penginfeksian, sehingga $a(1-f)$ adalah angka kelahiran per kapita untuk individu terinfeksi pada ukuran populasi yang sangat rendah. Disini b adalah angka kematian alami per kapita pada ukuran populasi yang sangat rendah, $r = a - b$ adalah angka pertumbuhan per kapita net positif, χ adalah konstanta kombinasi konveks dengan $0 \le \chi \le 1$, K adalah kapasitas batas lingkungan, γ adalah angka kesembuhan per kapita, dan α_0 adalah angka kematian berhubungan dengan penginfeksian per kapita. Insiden $g(X,Y,N)$ adalah insiden frequency-dependent $\beta XY/N$ atau insiden mass-action βXY. Model SIS ini dan model SIRS yang analog dengan insiden *frequency-dependent* (standard) dan transmisi vertical, tetapi tanpa pengaruh infeksi mengurangi reproduksi, telah dipelajari oleh Gao dan Hethcote (1992).

Tanpa kehadiran penyakit persamaan dN/dt adalah persamaan diferensial logistic untuk pertumbuhan terbatas, sehingga solusi-solusinya dengan $N(0) > 0$ mendekati kapasitas batas *K*. Untuk $0 < \chi < 1$, angka kelahiran per kapita $a - \chi rN/K$ menurun dan angka kematian per kapita $b + (1-\chi)rN/K$ meningkat sebagaimana naiknya ukuran populasi *N*; hal ini konsisten dengan sumber-sumber terbatas bersesuaian dengan kebergantungan densitas. Angka kelahiran bebas densitas ketika $\chi = 0$ dan angka kematian bebas densitas ketika $\chi = 1$. Angka kelahiran tidak mudah dianalisa untuk ukuran populasi *N* yang sangat besar, sehingga dipikirkan invarian positif subset dari kuadran pertama dengan $N < aK / \chi r$. Karena $N' < 0$ untuk $N > K$, semua lintasan solusi dalam subset diatas mendekati, masuk, atau menetap dalam subset tersebut dengan $N \le K$. Dari sini dianalisa lintasan solusi dengan $N = X + Y \le K$.

Model (5.1) dapat direduksi dengan menggunakan $I = Y / N$ dan $X / N = 1 - I$ menjadi system berikut

$$dN / dt = \left[r(1 - N / K) - (af + \alpha_0) I + f\chi r I N / K \right] N ,$$
$$dI / dt = g^*(I, N) - \left[\gamma + a + \alpha_0 - (af + \alpha_0) I - \chi r (1 - fI) N / K \right] I . \qquad (5.2)$$

Disini insiden $g^*(I, N) = g(X, Y, N) / N$ adalah insiden *frequency-dependent* $\beta I(1 - I)$ atau insiden *mass-action* $\beta I(1 - I) N$. Model ini terletak dalam $D = \{(N, I) : 0 \le N \le K,\ 0 \le I \le 1\}$. Perilaku asimtotik diringkas dalam table 1 dengan definisi kuantitas threshold dan buktinya diberikan dalam bagian berikut.

5.1 Model SIS Logistik dengan insiden *frequency-dependent*

Dengan insiden *frequency-dependent* model (5.2) menjadi

$$dN / dt = \left[r(1 - N / K) - (af + \alpha_0) I + f\chi r I N / K \right] N .$$
$$dI / dt = \left[\beta(1 - I) - (\gamma + a + \alpha_0) + (af + a_0) I + \chi r (1 - fI) N / K \right] I . \qquad (5.3)$$

Perilaku dari sistem ini dikontrol oleh tiga kuantitas threshold:

$$R_2 = \beta / (\gamma + a + \alpha_0 - \chi r) ,$$
$$R_1 = \beta / (\gamma + a + \alpha_0) ,$$

$$\phi = \frac{r}{(af + \alpha_0)[1 - (\gamma + b + \alpha_0)\beta]}. \tag{5.4}$$

Catat bahwa $R_2 \geq R_1$. Sistem ini selalu mempunyai titik-titik equilibrium $E_1 = (0,0)$ dan $E_2 = (K,0)$. Jika $R_1 > 1$, maka titik equilibrium $E_3 = (0, I_3)$ berada dalam *D*, dimana

$$I_3 = \frac{\beta - (\gamma + a + \alpha_0)}{\beta - (af + \alpha_0)}. \tag{5.5}$$

Suatu titik equilibrium dalam interior *D* harus memenuhi persamaan-persamaan

$$r(1 - N/K) - (af + \alpha_0)I + f\chi rIN/K = 0,$$
$$\beta(1 - I) - (\gamma + a + \alpha_0) + (af + \alpha_0)I + \chi r(1 - fI)N/K = 0. \tag{5.6}$$

Tabel 1. Perilaku asimtotik dari model SIS logistic.

Insiden frequency-dependent	$g = \beta XY/N \Rightarrow g^* = \beta(1 - I)I$
Kasus 1: $1 \geq R_2 \geq R_1$	$N(0) > 0 \Rightarrow (N, I) \to E_2 = (K,0)$
Kasus 2: $R_2 > 1 \geq R_1$	$N(0) > 0,\ I(0) > 0 \Rightarrow (N, I) \to E_4 = (N_4, I_4)$
Kasus 3: $R_1 > 1$ & $\phi < 1$	$I(0) > 0 \Rightarrow (N, I) \to E_3 = (0, I_3)$
Kasus 4: $R_1 > 1$ & $\phi > 1$	$N(0) > 0,\ I(0) > 0 \Rightarrow (N, I) \to E_4 = (N_4, I_4)$

Insiden mass-action	$g = \beta XY \Rightarrow g^* = \beta(1 - I)IN$
Kasus 1: $R_3 \leq 1$	$N(0) > 0 \Rightarrow (N, I) \to E_2 = (K,0)$
Kasus 2: $R_3 > 1$	$N(0) > 0,\ I(0) > 0 \Rightarrow (N, I) \to E_3 = (N_3, I_3)$

Menjumlah persamaan-persamaan ini menghasilkan persamaan linier

$$\beta(1 - I) - (\gamma + b + \alpha_0) - r(1 - \chi)N/K = 0. \tag{5.7}$$

Penyelesaikan (5.7) untuk rN/K dan substitusi ke dalam persamaan pertama dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_4(I) = f\chi\beta I^2 - cI + (\gamma + a + \alpha_0 - \chi r) = 0$, dimana $c = \beta(1 + f\chi) - (1-\chi)(af + \alpha_0) - f\chi(\gamma + b + \chi_0)$. Karena $Q_4(1)$ selalu lebih kecil dari 0 dan $Q_4(0) > 0$ jika dan hanya jika $R_2 > 1$, ada solusi positif tunggal I_4 dalam interval $(0,1)$ jika dan hanya jika $R_2 > 1$. Penyelesaian (5.7) untuk *I* dan substitusi ke dalam persamaan kedua dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_5(N) = 0$ dengan $Q_5(0) = r - (af + \alpha_0)[1 - (\gamma + b + \alpha_0)/\beta]$, yang positif jika dan hanya jika $\phi > 0$. Juga $Q_5(K) = -[f(a - r\chi) + \alpha_0](1 - 1/R_2)$, yang negatif jika dan hanya jika $R_2 > 1$, sehingga ada solusi N_4 dalam interval $(0, K)$ jika $\phi > 1$ dan $R_2 > 1$. Dari sini kita punya titik equilibrium $E_4 = (N_4, I_4)$ dalam interior *D* jika $R_2 > 1$ dan $\phi > 1$.

Titik equilibrium $E_1 = (0,0)$ selalu repulsif dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I* jika dan hanya jika $R_1 \le 1$. Titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ selalu atraktif dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I* jika dan hanya jika $R_1 \le 1$. Pada sisi $I = 0$ dari *D* dengan $N(0) > 0$, $N(t) \to K$ jika $t \to \infty$. Ketika titik equilibrium I_3 berada dalam *D*, ini selalu atraktif dalam arah *I* dan atraktif dalam arah *N* jika $\phi < 1$.

Ada kemungkinan empat kasus. Dalam kasus 1 dengan $1 \ge R_2 \ge R_1$, hanya titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)$ yang merupakan titik saddle dan titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ adalah titik ekuilibrium yang atraktif. Dengan teori Poincare-Bendixson (Strogatz, 1994), semua solusi dalam *D* dengan $N(0) > 0$ mendekati titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ jika $t \to \infty$.

Perhatikan kasus 2 dengan $R_2 > 1 \ge R_1$. Secara epidemik, periode penginfeksian rata-rata $1/\gamma$ seharusnya lebih kecil daripada rata-rata panjang waktu populasi yang rendah $1/a$, sehingga $\gamma > a > r = a - b$. Asumsi bahwa $\gamma > r$ dan $R_2 > 1$ berakibat bahwa $\beta > \gamma + a + \alpha_0 - \chi r > af + \alpha_0$. Sekarang $1 \ge R_1$ berakibat bahwa $1 > \frac{r\beta}{(af + \alpha_0)[\gamma + a + \alpha_0 - (\gamma + b + \alpha_0)]} = \frac{\beta}{af + \alpha_0} > 1$.

Dari sini titik-titik ekuilibrium dalam D adalah titik sadel $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ dan titik interior equilibrium $E_4 = (N_4, I_4)$. Dengan menggunakan kriteria Dulac dengan pengali $1/(IN)$ dalam system (5.3), kita dapatkan bahwa *D* tidak mempunyai solusi periodic (Strogatz,1994). Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam *D* dengan $I(0) > 0$ dan $N(0) > 0$ mendekati ekuilibrium interior $E_4 = (I_4, N_4)$. Penjelasan secara intuisi dari kasus 2 adalah bahwa penyakit jarang meninggalkan endemic karena $R_2 > 1 \geq R_1$, tetapi angka pertumbuhan per kapita alami *r* mendominasi angka kematian perkapita yang dibangkitkan oleh adanya penginfeksian diberikan oleh $af + \alpha_0$ karena $\phi > 1$, sehingga ukuran populasi menuju *steady state* N_4 yang lebih kecil daripada kapasitas batas *K*.

Dalam kasus 3 dengan $R_1 > 1$ dan $\phi < 1$, titik-titik equilibrium dalam *D* adalah node tak stabil $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ (repulsive dalam arah *I*) dan node atraktif $E_3 = (0, I_3)$. Disini $R_1 > 1$ berakibat bahwa $\beta > af + \alpha_0$, sehingga criteria Dulac diatas masih dapat digunakan. Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam *D* dengan $I(0) > 0$ mendekati titik equilibrium $E_3 = (0, I_3)$. Penjelasan intuisi dari kasus 3 adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik (i.e. $\liminf_{t\to\infty} I(t) > 0$) karena $R_2 > 1$ dan angka kematian yang bisebabkan oleh infeksi per kapita yang diberikan oleh $af + \alpha_0$ secara kuat mempengaruhi angka pertumbuhan alami per kapita *r* karena $\phi < 1$, sehingga populasi mengalami kepunahan.

Dalam kasus 4 dengan $R_1 > 1$ dan $\phi > 1$, titik-titik equilibrium dalam *D* adalah node tak stabil $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ (repulsif dalam arah *I*), titik sadel $E_3 = (0, I_3)$ (repulsif dalam arah *N*), dan titik equilibrium $E_4 = (N_4, I_4)$. Dengan criteria Dulac diatas dan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam *D* dengan $N(0) > 0$ dan $I(0) > 0$ mendekati titik equilibrium interior $E_4 = (N_4, I_4)$. Penjelasan intuisi dari kasus 4 adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik karena $R_2 > 1$ dan angka kematian per kapita yang disebabkan adanya infeksi diberikan oleh $af + \alpha_0$ didominasi oleh angka pertumbuhan alami per kapita *r* karena $\phi > 1$, sehingga ukuran populasi menuju *steady state* N_4 yang lebih kecil daripada kapasitas batas *K*.

Catat bahwa I_3 adalah serupa dengan I_e dalam model SIS dengan pertumbuhan exponensial, sehingga $r-(af+\alpha_0)I_3=\rho$, dimana

$$\rho = r-(af+\alpha_0)I_e = \frac{r\beta-(af+\alpha_0)[\beta-(\gamma+b+\alpha_0)]}{\beta-(af+\alpha_0)} \ .$$

Dari sini untuk model SIS dengan insiden *frequency-dependent*, dan salah satu pertumbuhan exponensial atau pertumbuhan logistik, tanda dari ρ menentukan apakah populasi menjadi punah ($(\rho<0 \Leftrightarrow \phi<1)$ atau bertahan hidup $(\rho>0 \Leftrightarrow \phi>1)$.

5.2. Model SIS dengan insiden *mass-action*

Untuk insiden mass-action sistem (5.2) menjadi

$$dN/dt = [r(1-N/K)-(af+\alpha_0)I + f\chi rIN/K]N \ ,$$
$$dI/dt = [\beta(1-I)N-(\gamma+a+\alpha_0)+(af+\alpha_0)I+\chi r(1-fI)N/K]I \qquad (5.8)$$

Perilaku dari system ini dinyatakan oleh threshold quantity

$$R_3 = \beta K/(\gamma+a+\alpha_0-\chi r) \ .$$

Sistem tersebut selalu mempunyai titik-titik equilibrium $E_1=(0,0)$ dan $E_2=(K,0)$. Suatu titik equilibrium dalam interior D harus memenuhi persamaan-persamaan serupa pada (5.6) dan (5.7), tetapi dengan $\beta(1-I)$ digantikan oleh $\beta(1-I)N$. Penyelesaian analog dengan (5.7) untuk N/K dan substitusi ke dalam persamaan pertama dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_6(1)=0$ dengan $Q_6(1)<0$ dan $Q_6(0)>0$ jika dan hanya jika $R_3>1$. Dari sini ada solusi positif I_3 dalam interval $(0,1)$ jika dan hanya jika $R_3>1$. Penyelesaian analog dengan (5.7) untuk I dan substitusi modifikasi persamaan kedua dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_7(N)=0$ dengan $Q_7(0)<0$ dan $Q_7(K)<0$ jika $R_3>1$, sehingga terdapat suatu solusi N_3 dalam interval

$(0,K)$ jika $R_3 > 1$. Untuk alasan ini kita punya titik ekuilibrium $E_3 = (N_3, I_3)$ dalam interior *D* jika $R_3 > 1$.

Titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)$ adalah titik sadel yang repulsive dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I*. Titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ selalu atraktif dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I* jika $R_3 < 1$. Pada sisi $I = 0$ dari *D* dengan $N(0) > 0$, $N(t) \to K$ untuk $t \to \infty$. Menggunakan persamaan simultan untuk titik ekuilibrium $E_3 = (N_3, I_3)$, matriks Jacobian pada E_3 adalah

$$J = \begin{bmatrix} -[r-(af+\alpha_0)I_3] & -r\left(1-\dfrac{N_3}{K}\right)\dfrac{N_3}{I_3} \\ \dfrac{[(\gamma+a+\alpha_0)+(af+\alpha_0)I_3]}{N_3} & -\left[\beta N_3 - (\gamma+a+\alpha_0) + \dfrac{\chi r N_3}{K}\right] \end{bmatrix}.$$

Menggunakan $Q_6(0) > 0$ jika $R_3 > 1$ dan $Q_6(r/(af+\alpha_0)) < 0$, kita lihat bahwa $I_3 < r/(af+\alpha_0)$ dan entri Jacobian $j_{11} < 0$. Menggunakan $Q_7(K) < 0$ jika $R_3 > 1$ dan $Q_7\left((\gamma+a+\alpha_0)/(\beta+\chi r/K)\right) > 0$, kita lihat bahwa $N_3 > (\gamma+a+\alpha_0)/(\beta+\chi r/K)$ dan $j_{22} < 0$. Dari sini matriks Jacobian mempunyai tanda negatif dan determinan positif, sehingga titik ekuilibrium $E_3 = (N_3, I_3)$ selalu stabil asimtotik lokal jika $R_3 > 1$.

Disini ada dua kasus. Dalam kasus 1 dengan $R_3 < 1$, titik ekuilibrium di *D* yang sadel $E_1 = (0,0)$ dan titik ekuilibrium atraktif $E_2 = (K,0)$. Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam *D* dengan $N(0) > 0$ mendekati titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ untuk $t \to \infty$. Dalam kasus 2 dengan $R_3 > 1$, titik-titik ekuilibrium di *D* adalah titik sadel $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ (repulsif dalam arah *I*), dan titik ekuilibrium atraktif interior local $E_3 = (N_3, I_3)$. Menggunakan criteria Dulac dengan pengali $C = 1/[IN(1-I)]$ dalam system (7.8), kita menemukan bahwa daerah *D* tidak mempunyai solusi periodik. Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam *D* dengan $I(0) > 0$ dan $N(0) > 0$ mendekati titik ekuilibrium interior $E_3 = (I_3, N_3)$.

VI. Kesimpulan dan Saran

Tujuan dari makalah ini adalah untuk menambah pengetahuan bahwa perbedaan bentuk insiden penyakit dalam model infeksi penyakit seringkali mengakibatkan perbedaan threshold dan perilaku asimtotik yang signifikan. Untuk model dengan infeksi penyakit dalam satu populasi induk tanpa regulasi diri, tetapi dengan infeksi mengurangi reproduksi, infeksi berelasi dengan kematian, dan insiden frequency-dependent, terdapat jumlah reproduksi yang menentukan perilaku asimtotik. Untuk model analog dengan insiden mass-action, perilaku asimtotik ditentukan oleh nilai dari angka pertumbuhan maximum dan infeksi berhubungan dengan angka kematian, sehingga tidak ada threshold jumlah reproduksi.

Penelitian selanjutnya dapat meninjau perilaku asimtotik model SIS dengan pertumbuhan eksponensial atau memodifikasi model SIS dengan dua populasi induk.

Daftar Pustaka

H. W. Hethcote, Three Basic Epidemiological Models, Biomathematics, Vol. 18, 119-144, (1989)

H. W. Hethcote, W. Wang dan Y. Li, Species Coexistence and Periodicity in Host-Host-Pathogen Models, J. Math. Biol. 51, 629-660, (2005).

M. Begon, R. G. Bowers, N. Kadianakis, D. E. Hodgkinson, Disease and Community Structure: The Importance of Host Self-Regulation in a host host-pathogen model. Am. Nat. 139, 1131-1150, (1992)

R. M. Anderson, R. M. May, Regulation and Stability of Host-Parasite Population Interaction I: Regulatory Processes, J. Animal Ecology 47, 219-247, (1978)

R. M. Anderson, R. M. May, Population Biology of Infectious Diseases: Part I. Nature 280, 361-367, (1979)

R. A. Saenz dan H. W. Hethcote, Competing Species Models with an Infectious Disease, Math. Biosciences and Engineering, Vol. 3, 219-235, (2006)