MINIMAL EDGE DARI GRAF 2-CONNECTED DENGAN CIRCUMFERENCE TERTENTU

(On Edge Minimal 2-Connected Graphs with Prescribed Circumference)

Tri Atmojo Kusmayadi
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta 57126
e-mail : trikusma@uns.ac.id

Abstrak

Misal G adalah graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $c \geq .4$. Dalam makalah ini ditentukan banyaknya minimum edge dari graf 2-connected G dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $c \geq .4$.

Kata kunci : *circumference, graf 2-connected*

Abstract

Let G be a 2-connected graph on n vertices and m edges having circumference $c \geq .4$. In this paper, we give the minimum number of edges of a 2-connected graph G on n vertices and m edges having circumference $c \geq .4$

Key words *: circumference, 2- connected graph*

PENDAHULUAN

Hampir tiga abad lamanya teori graf telah berkembang dengan pesat. Terutama dalam tiga puluh tahun terakhir, banyak buku-buku ataupun artikel-ertikel penelitian tentang teori graf yang telah dipublikasikan. Alasan utama pertumbuhan yang cepat ini adalah disebabkan teori graf dapat diterapkan ke berbagai disiplin ilmu seperti dalam sains, teknik, komputer, bisnis moderen dan masih banyak lagi. Pembicaraan lengkap tentang terapan teori graf dapat diacu dalam artikel yang ditulis oleh Caccetta (1989) serta Caccetta dan Vijayan (1987). Sasaran dalam artikel ini adalah mempelajari aspek teoritis dari teori graf.

Banyak penulis yang menyelidiki sifat-sifat graf terhadap parameter teoritik graf tertentu. Terutama menentukan batas-batas dari graf dengan parameter yang diberikan. Masalah ini pertama kali diselidiki oleh Nordhaus dan Gaddum (1956) dengan paremeter bilangan kromatik.

Dalam artikel ini dibicarakan masalah yang sama dengan hasil Nordhaus dan Gaddum tetapi dengan parameter circumference.

NOTASI DAN TERMINOLOGI

Sebagian notasi dan terminologi yang digunakan dalam artikel ini mengacu pada Bondy dan Murty (1976). Sehingga suatu graf G (V, E) terdiri dari suatu himpunan tidak kosong vertex-vertex V dan himpunan E (disjoint dari V) terdiri atas edge dari G. Banyaknya vertex dan edge dari graf G masing-masing dinotasikan dengan $\nu(G)$ dan $\varepsilon(G)$, masing-masing ditulis ν dan ε. Suatu graf G disebut **connected** jika ada path di antara sebarang dua vertex dari G, selain itu G dikatakan **disconnected**. Suatu maximal connected subgraph dari G disebut suatu **component** dari G. Oleh karena itu suatu connected graph hanya mempunyai satu component. Sebuah **vertex cut set** (atau **vertex cut**) dari suatu connected graph G adalah suatu proper subset V(G) yang mana kalau diambil menghasilkan suatu disconnected atau trivial graph. **Vertex-connectivity** (atau **connectivity**) dari suatu graf G, dinyatakan oleh $\kappa(G)$, adalah banyaknya vertex terkecil dari G yang mana kalau diambil dari menghasilkan suatu disconnected graph atau a trivial graph; didefinisikan $\kappa(G) = 0$ jika G disconnected atau trivial graph. Untuk suatu bilangan bulat positif k, graf G dikatakan k-connected jika $\kappa(G) \geq k$. Komplemen dari graf G, ditulis $\overline{G}$, adalah graf dengan himpunan vertex yang sama dengan G serta dua vertex adjacent dalam $\overline{G}$ jika dan hanya jika vertex-vertex itu tidak adjacent dalam G. **Circumference** c(G) dari suatu graf G adalah panjang dari cycle terpanjang dalam G. P_n dan C_n masing-masing menyatakan path dan cycle dengan orde n.

PERMASALAHAN

Masalah yang dibahas dalam artikel ini adalah menentukan berapakah banyaknya minimum edge dari suatu graf 2-connected G dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $c \geq .4$?

HASIL-HASIL AWAL

Sebelum sampai pada hasil utama, di bawah ini diberikan beberapa hasil awal yang diberikan oleh Woodall (1976) dan Kusmayadi (1995). Misal $\mathcal{G}$(n, m) adalah kelas graf dengan n vertex dan m edge.

Teorema 1 (Woodall, 1976) :

Misal G $\in$ $\mathcal{G}$(n, m) dengan m $\geq$ n dan c(G) = t. Maka

$$m \leq w(n, t),$$

dimana $w(n,t) = \frac{(n-1)t}{2} - \frac{r(t-r-1)}{2}$, dan $r = (n-1) - (t-1)\left\lfloor \frac{n-1}{t-1} \right\rfloor$. □

Teorema 2 (Kusmayadi, 1995)

Misal G adalah graf 2-connected berorde n dengan c(G) = t, $c(\overline{G}) = n - 1$, $5 \leq t \leq n - 1$, dan $\overline{G}$ terhubung. Maka $\varepsilon(G) \geq n + t - 4$. □

Teorema 3 (Kusmayadi, 1995)

Misal G $\in$ $\mathcal{G}$(n, m) adalah graf terhubung dengan c(G) = t, $c(\overline{G}) = n - 1$ dan $\kappa(G) = 1$. Maka untuk $n \geq 6$, berlaku $m \geq 2n - 5$. □

Dari hasil-hasil awal di atas, maka sekarang sudah siap untuk membuktikan hasil-hasil utama di bawah ini.

HASIL-HASIL UTAMA

Berikut ini diberikan hasil-hasil utama. Yang pertama adalah mencari batas bawah dari banyaknya edge dalam suatu graf jika diketahui circumference dari graf genap.

Sedangkan hasil utama yang kedua adalah hampir sama dengan yang pertama, khususnya untuk circumference ganjil.

Teorema 4 :

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $2\ell \geq 6$. Maka

$$m \geq n + \frac{n-2\ell}{\ell-1} \qquad (1)$$

Bukti :

Misal C = {1, 2, ..., 2ℓ } adalah cycle dalam G dengan panjang 2ℓ**.** Pandang graf H = G – V(C). Misal H_1, H_2, ..., H_t adalah komponen-komponen dari G – V(C). Dari semua edge minimal graph, pilih G sebagai graf yang mempunyai maksimum t. Sekarang karena G 2-connected, maka harus ada sekurang-kurangnya dua edge yang mengawankan tiap H_i dan V(C). Akibatnya, $m \geq n + t$.

Sehingga tidak ada yang perlu dibuktikan jika $t \geq \frac{n-2\ell}{\ell-1}$. Misal bahwa $t < \frac{n-2\ell}{\ell-1}$. Maka H memuat suatu komponen, sebut H_1, yang mempunyai sekurang-kurangnya ℓ vertex. Karena G 2-connected dan $c(G) = 2\ell$, maka H_1 tidak mungkin menjadi suatu path.

Misal P = i, x_1, x_2, ..., x_k, j adalah (i, j)-path terpanjang yang semua vertex internal nya dalam H_1 dan i, j $\in$ V(C). Karena G edge-minimal, maka $i \neq j$ dan tidak ada x_p, $2 \leq p \leq k - 1$, dikawankan ke sebarang vertex dari C. Tentu saja $k \leq \ell - 1$. Sehingga H_1 memuat suatu vertex, katakan u_1, tidak dalam P, yang dikawankan ke suatu x_q , $1 \leq q \leq k$. Misal Q = x_q, u_1, u_2, ..., u_r, y adalah (x_q, y)-path yang vertex internal nya dalam H – V(P) dan $y \in V(P) \cup V(C)$. Pemilihan dari P menjamin bahwa $r \leq k$. Sekarang pandang graf G′ yang dibentuk dari G dengan menghapus semua edge di antara {u_1, u_2, ..., u_r} dan $V(P) \cup V(C)$ serta dengan menambahkan edge u_1i dan u_rj dan mungkin beberapa edge dari vertex-vertex $H_1 \backslash V(Q)$ yang sebelumnya dikawankan ke Q. Jelas $c(G) = 2\ell$, $\varepsilon(G') \leq \varepsilon(G)$ dan $G' - V(C)$ mempunyai sekurang-kurangnya t + 1 komponen, yang mana kontradiksi dengan pemilihan dari G. Terbukti. □

Catatan 1 : Bukti di atas dapat digunakan untuk membuktikan bahwa ada edge-minimal graph G dengan n vertex dan $m \geq n + \frac{n-2\ell}{\ell-1}$ edge yang mempunyai circumference 2ℓ dan suatu cycle C dengan panjang 2ℓ sedemikian sehingga tiap komponen dari $G - V(C)$ adalah suatu path.

Catatan 2 : Graf G* yang terdiri dari $\left\lceil \frac{n-2\ell}{\ell-1} \right\rceil + 2$ disjoin (a, b)-path yang masing-masing mempunyai panjang ℓ kecuali mungkin satu yang mempunyai panjang kurang dari ℓ adalah suatu edge minimal graph dengan n vertex yang mempunyai circumference 2ℓ.

Teorema 5 :

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $2\ell + 1 \geq 5$. Maka

$$m \geq n + \frac{n-2\ell-1}{\ell-1} \qquad (2)$$

Bukti :

Misal $C = \{1, 2, ..., 2\ell + 1\}$ adalah cycle dalam G dengan panjang $2\ell + 1$. Pandang graf $H = G - V(C)$. Misal $H_1, H_2, ..., H_t$ adalah komponen-komponen dari $G - V(C)$. Dari semua edge minimal graph, pilih G sebagai graf yang mempunyai maksimum t. Sekarang karena G 2-connected, maka harus ada sekurang-kurangnya dua edge yang mengawankan tiap H_i dan V(C). Akibatnya, $m \geq n + t$.

Sehingga tidak ada yang perlu dibuktikan jika $t \geq \frac{n-2\ell-1}{\ell-1}$. Misal bahwa $t < \frac{n-2\ell-1}{\ell-1}$. Maka H memuat suatu komponen, sebut H_1, yang mempunyai sekurang-kurangnya ℓ vertex. Karena G 2-connected dan $c(G) = 2\ell + 1$, maka H_1 tidak mungkin menjadi suatu path.

Misal $P = i, x_1, x_2, ..., x_k, j$ adalah (i, j)-path terpanjang yang semua vertex internal nya dalam H_1 dan $i, j \in V(C)$. Karena G edge-minimal, maka $i \neq j$ dan tidak ada x_p, $2 \leq p \leq k - 1$, dikawankan ke sebarang vertex dari C. Tentu saja $k \leq \ell - 1$. Sehingga H_1 memuat suatu vertex, katakan u_1, tidak dalam P, yang dikawankan ke suatu x_q , $1 \leq q \leq k$. Misal $Q = x_q, u_1, u_2, ..., u_r, y$ adalah (x_q, y)-path yang vertex internal nya dalam $H - V(P)$ dan $y \in V(P) \cup V(C)$. Pemilihan dari P menjamin bahwa $r \leq k$. Sekarang pandang graf G' yang dibentuk dari G dengan menghapus semua edge di antara $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ dan $V(P) \cup V(C)$ serta dengan menambahkan edge u_1i dan u_rj dan mungkin beberapa edge dari vertex-vertex $H_1 \backslash V(Q)$ yang sebelumnya dikawankan ke Q. Jelas $c(G) = 2\ell$, $\varepsilon(G') \leq \varepsilon(G)$ dan $G' - V(C)$ mempunyai sekurang-kurangnya $t + 1$ komponen, yang mana kontradiksi dengan pemilihan dari G. Terbukti. □

Catatan 3 : Bukti di atas dapat digunakan untuk membuktikan bahwa ada edge-minimal graph G dengan n vertex dan $m \geq n + \frac{n-2\ell-1}{\ell-1}$ edge yang mempunyai circumference $2\ell + 1$ dan suatu cycle C dengan panjang $2\ell + 1$ sedemikian sehingga tiap komponen dari $G - V(C)$ adalah suatu path.

Dari Teorema 4 dan teorema 5 diperoleh Teorema 6 seperti di bawah ini.

Teorema 6 :

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference c ≥ 4. Maka

$$m \geq n + \left\lceil \frac{n-c}{\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1} \right\rceil \qquad (3)$$

Bukti :

Dari (1) dalam Teorema 4 dan (2) dalam Teorema 5 diperoleh (3). Terbukti. □

KESIMPULAN

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference c ≥ 4, maka batas bawah banyaknya edge dalam G tergantung pada banyaknya vertex dan circumference dari G, tepatnya seperti ditunjukkan dalam (3) pada Teorema 6.

SARAN

Bagi peneliti yang tertarik dengan permasalahan ini dapat melanjutkan hasil yang diperoleh pada Teorema 6, tetapi dengan mengkarakterisasi graf ekstremalnya yang berkaitan pada batas-batas kritisnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976). *Graph Theory with Applications*. London : The MacMillan Press.

Caccetta, L. (1989). Graph theory in network design and analysis, in Kulli, V.R. (ed.). *Recent Studies in Graph Theory, pp26-63.* India : Vishwa International Publications.

Caccetta, L., and Vijayan, K. (1987). *Applications of graph theory.* ARS Combinatoria, 23 (B) pp21-77.

Kusmayadi, T.A. (1995). *Investigation of Parameters concerning Graphs and Their Complements*. Master's Thesis. School of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, Australia.

Nordhaus, E.A. and Gaddum, J.W. (1956). On complementary graphs. *American Mathematical Monthly*, 63 pp175-177.

Woodall, D.R. (1976). Maximal circuits of graphs I. *Acta Mathematica. Academiae Scientiarum Hungaricae*, 28 pp77-80.