Distribusi Poisson Tergeneralisasi Tak Terbatas dan Beberapa Sifat-Sifatnya
(Suatu pengembangan teori statistika matematika)

Mutijah
Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri (STAIN) Purwokerto
Jl. A. Yani, No. 40A, Purwokerto.

Abstrak

Distribusi Poisson dikembangkan menjadi Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD), mempunyai dua model distribusi yaitu model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Terbatas dan model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas. Untuk membuktikan bahwa kedua model distribusi tersebut merupakan suatu fungsi probabilitas, model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas lebih sulit dibandingkan model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Terbatas. Model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas tidak dapat dibuktikan secara langsung. Model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas dapat dibuktikan secara tidak langsung dengan menggunakan formula Lagrange dan formula Beda Euler.

Model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas memiliki beberapa sifat yang ditentukan oleh parameter kedua yaitu parameter λ. Beberapa sifat tersebut antara lain : rataan, variansi dan fungsi pembangkit momen naik jika λ naik, jumlahan N_1+N_2 dari dua variabel GP N_1 dan N_2 yang independen dengan parameter masing-masing (θ_1,λ) dan (θ_2, λ) adalah variabel GP dengan parameter $(\theta_1+\theta_2, \lambda)$, model GPD adalah unimodal untuk semua θ dan λ kecuali pada $\theta = e$, $\lambda = 1$, menaiknya nilai λ akan menurunkan nilai probabilitas ekor kiri dan nilai probabilitas ekor kanan.

Kata kunci : Model GPD Tak Terbatas, Sifat-sifat GPD Tak Terbatas.

1. Pendahuluan

A. Latar Belakang.

Untuk suatu variabel acak N fungsi massa model distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD) tak terbatas oleh Tuenter (2000) dituliskan sebagai berikut :

$$P_n(\theta,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\theta\,(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}, & n=0,1,2,\ldots\\ \\ 0, & \text{untuk } n>m, \text{ jika } \lambda<0.\\ 0, & \text{untuk n yang lain.}\end{cases}\quad, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(A.1)}$$

Untuk membuktikan bahwa model GPD (A.1) merupakan fungsi probabilitas yaitu membuktikan bahwa :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta, \lambda) = 1$$

secara langsung sangat sulit.

Model GPD (A.1) mempunyai beberapa sifat-sifat penting seperti mean, variansi naik apabila λ naik, nilai fungsi pembangkit probabilitas (pgf) akan naik jika λ naik dan beberapa sifat-sifat yang lainnya.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimanakah membuktikan $P_n(\theta, \lambda)$ merupakan fungsi probabilitas?
2. Bagaimanakah menentukan sifat-sifat dan atau membuktikan teorema-teorema yang merupakan sifat dari model GPD tak terbatas ?

C. Tujuan Penelitian.

1. Untuk membuktikan bahwa $P_n(\theta, \lambda)$ merupakan fungsi probabilitas.
2. Untuk menentukan sifat-sifat dan atau membuktikan teorema-teorema yang merupakan sifat dari model GPD tak terbatas.

D. Manfaat Penelitian.

Dapat memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas wawasan mengenai distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD).

2. Pembahasan.

A. Fungsi model GPD Tak Terbatas dan Pembuktiannya.

Sebuah variabel random diskrit N dikatakan mempunyai model distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD) tak terbatas jika mempunyai massa peluang :

$$P_n(\theta, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1} e^{-(\theta + n\lambda)}}{n!}, & n = 0, 1, 2, ... \\ \\ 0, & \text{untuk } n > m, \text{ jika } \lambda < 0. \\ 0, & \text{untuk } n \text{ yang lain.} \end{cases} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

dengan $\theta > 1$, $\max(-1, -\theta/m) < \lambda \le 1$, m ($\ge 4$) bilangan bulat positif terbesar dan untuk $\theta + m\lambda > 0$ maka λ negatif. Simbol θ dan λ dikatakan parameter pertama dan parameter kedua.

Untuk membuktikan fungsi (2.1) merupakan fungsi probabilitas Consul dan Jain telah menunjukkan dengan menggunakan formula Lagrange sebagai berikut :

$$\phi(z) = \phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z))^n\, \phi'(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^n, \text{ ....(2.2)}$$

dan diberikan $\phi(z) = e^{\theta z}$ dan $f(z) = e^{\lambda z}$ serta $u = ze^{-\lambda z}$.

sehingga diperoleh :

$\phi(0) = 1$, $\phi'(z) = \theta e^{\theta z}$, $\phi'(z) = \theta e^{\theta z}$, $(f(n))^n = e^{n\lambda z}$, $(f(n))^n.\ \phi'(z) = e^{n\lambda z}.\ \theta e^{\theta z} = \theta e^{(\theta + n\lambda)z}$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}}(f(z))^n.\phi'(z)\right] = \left[\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}}(\theta e^{(\theta+n\lambda)z}\right] = \theta(\theta + n\lambda)^{n-1}e^{(\theta + n\lambda)z}$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}}(f(z))^n.\phi'(z)\right]\Bigg|_{z=0} = \theta(\theta + n\lambda)^{n-1}$$

Pernyataan (2.2) dapat disajikan sebagai berikut :

$$e^{\theta z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\theta(\theta + n\lambda)^{n-1}\left(\frac{ue^{\lambda z}}{e^{\lambda z}}\right)^n \ \ldots\ 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1}\, z^n\, e^{-(\theta - n\lambda)z}}{n!}$$

Sehingga $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta + n\lambda)}}{n!}$. ■

Pembuktian yang berbeda dilakukan oleh Tuenter(2000) dengan menggunakan formula Beda Euler yang dimulai dengan membuktikan persamaan :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} e^{-(\theta + n\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda}, \text{ untuk } -\lambda_o < \lambda < 1 \ \text{ ………………………...(2.3)}$$

dengan $\lambda_o = 0{,}2784645428\ldots$ adalah solusi dari $\lambda e^{\lambda} = e^{-1}$. Untuk kepentingan selanjutnya $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} e^{-(\theta + n\lambda)}$ pada persamaan (2.3) ditulis sebagai $S(\theta, \lambda)$.

Lemma 2.1

Untuk GPD dalam persamaan (2.1) dapat dibuktikan $S(\theta, \lambda) = \dfrac{1}{1-\lambda}$ untuk $-\lambda_o < \lambda < 1$ dengan λ_o = 0,2784645428… adalah solusi dari $\lambda e^{\lambda} = e^{-1}$.

Bukti :

$$S(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\theta + n\lambda)^k}{k!} = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \, k! = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \quad \frac{1}{1-\lambda} \ \blacksquare$$

Sekarang menunjukkan bahwa $| \lambda | < \lambda_o$. Bukti persamaan (2.3) bertumpu pada pemindahan order jumlahan dalam $S(\theta, \lambda)$ dan pemindahan itu diijinkan ketika jumlahan tersebut konvergen absolut. Nilai-nilai absolut yang diberikan dari jumlahan $S(\theta, \lambda)$ dengan mengusahakan untuk mereduksi $e^{-|\theta + n\lambda|}$.

Dengan menggunakan pendekatan formula Stirling's $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ dan aplikasi dari tes akar Cauchy diperoleh :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{\frac{|\theta + n\lambda|^n}{n!} e^{|\theta + n\lambda|}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{\frac{|\theta + n\lambda|^n}{n^n \, e^{-n} \sqrt{2\pi n}} e^{|\theta + n\lambda|}} = \ldots = |\lambda| \, e^{1+|\lambda|} < 1$$

atau diinginkan $|\lambda| < \lambda_o$ sebagai kriteria untuk konvergen absolut.

Aplikasi lain dari tes akar Cauchy menunjukkan bahwa ruas kiri dari persamaan (2.3) konvergen untuk $|\lambda e^{-\lambda}| < e^{-1}$. Dari kondisi ini diperoleh λ_o sebagai berikut :

$|\lambda e^{-\lambda}| < e^{-1}$, $|\lambda| e^{|\lambda|} < e^{-1}$, $\lambda e^{\lambda} < e^{-1}$ ……………………………………………………...(2.4)

Dengan menggunakan software Matlab 5.3 dari persamaan nonlinear (2.4) diperoleh λ_o = 0,2784645428… .

Selanjutnya model GPD pada (2.1) merupakan fungsi probabilitas dapat dibuktikan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} e^{-(\theta + n\lambda)} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\theta + n\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda} - \lambda \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1. \ \blacksquare$$

B. Beberapa Sifat Model GPD Tak Terbatas.

a. Mean dan variansi distribusi Poisson tergeneralisasi.

1). Penentuan mean dan variansi dengan metode khusus.

Didefinisikan $S(k, \theta, \lambda)$ sebagai berikut :

$$S(k,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta+n\lambda)^{n+k-1}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!},\qquad k=0,1,2,...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+n\lambda)^{n+k-2}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+n\lambda)^{n+k-2}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{(n-1)!}$$

$$=\theta S(k\text{-}1,\theta,\lambda)+\lambda S(k,\theta+\lambda,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)S(k-1,\theta+i\lambda,\lambda),\quad k=1,2,...$$

Untuk k = 0 maka :

$$\theta\, S(0,\theta,\lambda)=\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta+n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta+n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\theta,\lambda)=1.$$

Untuk k = 1 maka :

$$S(1,\theta,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\,(\theta+i\lambda)S(0,\theta+i\lambda,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}.i=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}=1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Untuk k = 2 maka :

$$S(2,\theta,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)S(1,\theta+i\lambda,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\,(\theta+i\lambda)\,\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)$$

$$=\frac{1}{1-\lambda}\{\theta+\theta\lambda+\lambda^2+\theta+\theta\lambda^2+2\lambda^3+\theta\lambda^3+3\lambda^4+\theta\lambda^4+4\lambda^5+...\}=\frac{\theta}{(1-\lambda)^2}+\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^3}.$$

Penentuan mean dan variansi menggunakan hasil-hasil di atas adalah sebagai berikut :

$$E(N)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\theta(\theta+n\lambda)^{n-1}e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\ldots=\theta\, S(1,\theta+\lambda,\lambda)=\frac{\theta}{1-\lambda}$$

$$E(N^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\theta(\theta+n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\ \ldots\ =\theta\,\{S(1,\theta+\lambda,\lambda)+S(2,\theta+2\lambda,\lambda)\}$$

$$=\theta\left\{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^2}+\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^3}\right\}=\theta\left\{\frac{\theta}{(1-\lambda)^2}+(1+\lambda+2\lambda^2+4\lambda^3+7\lambda^4+11\lambda^5+16\lambda^6+...\right\}=$$

$$\theta\left\{\frac{\theta}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^3}\right\}=\frac{\theta^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}.$$

$$Var(N)=E(N^2)-[E(N)]^2==\frac{\theta^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}+\left(\frac{\theta}{1-\lambda}\right)^2=\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}.$$

2). Penentuan mean dan variansi menggunakan model GPD tak terbatas.

Diberikan $\mu(\theta, \lambda)$ menotasikan mean dari model GPD tak terbatas maka :

$$\mu(\theta,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\theta(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}\quad=\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\ldots=$$

$$=\theta+\theta\lambda+\frac{\theta\lambda^2}{\theta+2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}n\,P_n(\theta+2\lambda,\lambda)=\ldots=\ \theta\,(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4+\ldots)=\frac{\theta}{1-\lambda}.$$

Sekarang diberikan $\mu_2(\theta, \lambda)$ menotasikan momen kedua dari model GPD tak terbatas maka:

:

$$\mu_2(\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\,\theta\,(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\,(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}\qquad=\qquad\ldots\qquad=$$

$$\theta\left\{\frac{1}{1-\lambda}+(\theta+2\lambda)\frac{1}{1-\lambda}+[\lambda(\theta+3\lambda)]\frac{1}{1-\lambda}+[\lambda^2(\theta+4\lambda)]\frac{1}{1-\lambda}+[\lambda^3(\theta+5\lambda)]\frac{1}{1-\lambda}+\ldots\right\}=\ldots=$$

$$\theta\left\{\frac{1}{1-\lambda}\left(\theta.\frac{1}{1-\lambda}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\right)\right\}=\frac{\theta^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}.$$

Sehingga $\sigma^2=\mu_2(\theta,\lambda)-[\mu(\theta,\lambda)]^2=\dfrac{\theta^2}{(1-\lambda)^2}+\dfrac{\theta}{(1-\lambda)^3}-\left(\dfrac{\theta}{1-\lambda}\right)^2\ =\dfrac{\theta}{(1-\lambda)^3}$

3) Jumlahan variabel random distribusi Poisson tergeneralisasi.

Teorema 2.1

Apabila N_1 adalah variabel random berdistribusi Poisson tergeneralisasi dengan parameter (θ_1, λ) dan N_2 variabel random yang berdistribusi Poisson tergeneralisasi dengan parameter (θ_2, λ) yang masing-masing saling independen maka $N_1 + N_2$ berdistribusi Poisson tergeneralisasi dengan parameter $(\theta_1+\theta_2, \lambda)$.

Bukti :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+i\lambda)^{i-1}\,e^{-(\theta+i\lambda)}}{i!}=1,\ e^{-\theta}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+i\lambda)^{i-1}\,e^{-i\lambda}}{i!}=1,\ e^{\theta}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+i\lambda)^{i-1}\,e^{-i\lambda}}{i!}$$

Secara umum diketahui bahwa $e^{\theta_1+\theta_2}=e^{\theta_1}.e^{\theta_2}$ dan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta_1+\theta_2)\,(\theta_1+\theta_2+n\lambda)^{n-1}\,e^{-n\lambda}}{n!}=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta_1(\theta_1+i\lambda)^{i-1}\,e^{-i\lambda}}{i!}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta_2(\theta_2+j\lambda)^{j-1}\,e^{-j\lambda}}{j!}\right]=\ldots$$

$$= \theta_1\, \theta_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(\theta_1 + i\lambda)^{i-1}\, (\theta_2 + (n-i)\lambda)^{n-i-1}\, e^{-n\lambda}}{i!\,(n-i)!}$$

Selanjutnya menurut definisi bahwa :

$$P(N_1 + N_2 = n) = \sum_{j=0}^{n} P_j(\theta_{1,}\ \lambda)\, P_{n-j}(\theta_2, \lambda)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{\theta_1\, (\theta_1 + j\lambda)^{j-1}\, e^{-(\theta_1 + j\lambda)}}{j!} \cdot \frac{\theta_2\, (\theta_2 + (n-j)\lambda)^{n-j-1}\, e^{-(\theta_2 + (n-j)\lambda)}}{(n-j)!}$$

$$= e^{-(\theta_1+\theta_2)}\, \theta_1\, \theta_2 \sum_{j=0}^{n} \frac{(\theta_1 + j\lambda)^{j-1}\, (\theta_2 + (n-j)\lambda)^{n-j-1}\, e^{-n\lambda}}{j!\,(n-j)!}$$

$$= e^{-(\theta_1+\theta_2)}\, \frac{(\theta_1 + \theta_2)\,(\theta_1 + \theta_2 + n\lambda)^{n-1}}{n!}\, e^{-n\lambda}$$

$$= \frac{(\theta_1 + \theta_2)\,(\theta_1 + \theta_2 + n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta_1 + \theta_2 + n\lambda)}}{n!} = P_n(\theta_1 + \theta_2, \lambda) \quad \blacksquare$$

4) Fungsi pembangkit probabilitas distribusi Poisson tergeneralisasi.

Fungsi pembangkit probabilitas (pgf) suatu variabel N dari distribusi Poisson tergeneralisasi dinotasikan dengan $G_N(u) = E(u^N)$. Pgf menggunakan formula Lagrange :

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[(g(t))^k\, \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right] \Bigg|_{t=0} \qquad \text{.....................................(2.5)}$$

dan diberikan $g(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $f(t) = e^{\theta(t-1)}$ serta $u = \dfrac{t}{g(t)}$ ....(2.6)

Dari persamaan (2.6) diketahui $u = \dfrac{t}{g(t)}$ dan jelas bahwa $g(0) \neq 0$ maka oleh operasi pembagian deret pangkat, u mempunyai perwakilan deret pangkat, yaitu :

$u = \dfrac{t}{g(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dan $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$ dengan t merupakan invers dari deret pangkat u.

Dari (2.6) diperoleh :

$f(0) = e^{-\theta}$. $(g(t))^k = e^{k\lambda(t-1)}$, $(g(t))^k\ \dfrac{\partial f(t)}{\partial t} = e^{k\lambda(t-1)}.\theta e^{\theta(t-1)} = \theta e^{(\theta + k\lambda)(t-1)}$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[(g(t))^k\, \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right] = \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[\theta\, e^{(\theta + k\lambda)(t-1)} \right] = \theta\, (\theta + k\lambda)^{k-1}\, e^{(\theta + k\lambda)(t-1)} = \theta\, (\theta + k\lambda)^{k-1}\, e^{-(\theta + k\lambda)}$$

Dari hasil-hasil perhitungan tersebut penyajian (2.5) menjadi :

$$e^{\theta(t-1)} = e^{-\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\theta(\theta + k\lambda)^{k-1} e^{-(\theta+k\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P_k(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(\theta,\lambda) = E(u^N)$$

Dan karena pgf GPD adalah $G_N(u) = E(u^N)$ maka $G_N(u) = e^{\theta(t-1)}$ dengan $t = ue^{\lambda(t-1)}$.

5) Unimodal distribusi Poisson tergeneralisasi.

Diberikan distribusi probabilitas $\{P_n\}_0^{\infty}$ didefinisikan pada bilangan bulat nonnegatif dengan pgf $G_N(u)$. Dan diberikan

$$\frac{d}{du}\log G_N(u) = \frac{d}{du}\log e^{\theta(t-1)} = \frac{d}{du}(\theta(t-1)) = \frac{d}{du}\left\{\theta\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k u^k - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{du}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\theta\, b_k u^k - \theta\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\theta\, b_k u^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_k u^k, \quad r_k \geq 0 .$$

Menurut Steutel dan Harn (1979) distribusi probabilitas $\{P_n\}_0^{\infty}$ adalah unimodal jika $(r_k)_0^{\infty}$ adalah tidak naik dan $\{P_n\}_0^{\infty}$ adalah tidak naik jika dan hanya jika $r_0 \leq 1$.

Teorema 2.2

Model GPD adalah unimodal untuk semua nilai-nilai dari θ dan λ.

Apabila $\theta e^{-\lambda} < 1$ maka modus pada $n = 0$ dan apabila $\theta e^{-\lambda} = 1$ maka modus pada $n = 0$ dan $n = 1$.

Apabila $\theta e^{-\lambda} > 1$ maka modus pada $n = M$ dan $(\theta - e^{-\lambda})(e^{\lambda} - 2\lambda) < M < a$, dengan a adalah nilai terkecil dari M yang memenuhi pertidaksamaan :

$$\lambda^2 M^2 + M[2\lambda\theta - (\theta + 2\lambda)e^{\lambda}] + \theta^2 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

Bukti :

$$(1).\ G_N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(\theta,\lambda) = e^{\theta(t-1)} \text{ dengan } t = u\, e^{\lambda(t-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}u^n = H(u).$$

$$R(u) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k u^k = \frac{d}{du}[\theta(t-1)] = \theta\frac{dt}{du} = \theta\frac{dH(u)}{du} = \theta\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^{n-1}}{n!}u^{n-1}$$

$$= \theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}u^{n-1} = \theta\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda-k\lambda}\frac{[(k+1)\lambda]^k}{k!}u^k$$

Karena itu diperoleh :

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = \frac{\dfrac{e^{-(k+1)\lambda}\,[(k+1)\lambda]^k}{k!}}{\dfrac{e^{-k\lambda}\,(k\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{e^{-\lambda}\left(\dfrac{k\lambda+\lambda}{k\lambda}\right)k\lambda}{k} = \lambda\, e^{-\lambda}.e^{-1} = = \lambda\, e^{-\lambda+1} \le 1.$$

Jadi $\frac{r_k}{r_{k-1}} \le 1$ artinya bahwa $(r_k)_0^\infty$ adalah tidak naik sehingga menurut Steutel dan Harn maka $\{P_n(\theta,\lambda)\}_0^\infty$ adalah unimodal untuk semua nilai θ dan λ.

Misalkan $\frac{P_1(\theta,\lambda)}{P_0(\theta,\lambda)} = \theta e^{-\lambda} = r_0 \le 1$ maka $\{P_n(\theta,\lambda)\}_0^\infty$ adalah tidak naik . Jadi apabila $\theta e^{-\lambda}$ < 1 maka modus n = 0 dan apabila $\theta e^{-\lambda} = 1$ maka modus pada n = 0 dan n = 1.

(3). Misalkan $\theta e^{-\lambda} > 1$ dan modus pada n = M.

Rasio dari dua probabilitas berturut-turut dari model GPD (2.1) adalah $\frac{P_{n+1}(\theta,\lambda)}{P_n(\theta,\lambda)}$

Jika M adalah modus maka :

$$\frac{P_{M+1}(\theta,\lambda)}{P_M(\theta,\lambda)} = \frac{(\theta+(M+1)\lambda)^M\, e^{-\lambda}}{(M+1)(\theta+M\lambda)^{M+1}} < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.8)$$

dan $$\frac{P_M(\theta,\lambda)}{P_{M-1}(\theta,\lambda)} = \frac{(\theta+M\lambda)^{M-1}}{(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}}.\frac{e^{-\lambda}}{M} = \frac{(\theta+M\lambda)^{M-1}\, e^{-\lambda}}{M\,(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}} > 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.9)$$

Dari pertidaksamaan (2.8) diperoleh :

$$(M+1)\, e^{\lambda} > \frac{(\theta+(M+1)\lambda)^M}{(\theta+M\lambda)^{M-1}} > \frac{(\theta+M\lambda+\lambda)^M}{(\theta+M\lambda)^M(\theta+M\lambda)^{-1}} > (\theta+M\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{\theta+M\lambda}\right)^M$$

$$M > (\theta - e^{-\lambda})(e^{-\lambda} - 2\lambda)^{-1}$$

Dan dari pertidaksamaan (2.8) diperoleh :

$$\frac{(\theta+M\lambda)(\theta+M\lambda)^{M-2}\, e^{-\lambda}}{M(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}} > (\theta+M\lambda)$$

$$\frac{(\theta+M\lambda)\, e^{-\lambda}}{M} > (\theta+M\lambda).\frac{(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}}{(\theta+M\lambda)^{M-2}} > (\theta+M\lambda).\frac{(\theta+M\lambda-\lambda)^{M-2}}{(\theta+M\lambda)^{M-2}}$$

$$\lambda^2 M^2 + M[2\lambda\theta - (\theta+2\lambda)\, e^{\lambda}] + \theta^2 > 0$$

Jadi terbukti memenuhi pertidaksamaan (2.2.4) dan menurut korolari bahwa jika λ = 0 batas-batas modus adalah $\theta - 1 < M < \theta$, jadi juga terbukti pertidaksamaan $(\theta - e^{-\lambda})(e^{\lambda} - 2\lambda) < M < a$.

Dari teorema di atas tampak bahwa model distribusi Poisson tergeneralisasi adalah unimodal untuk semua θ dan λ kecuali jika $\theta e^{-\lambda} = 1$ yaitu pada $\theta = e$, $\lambda = 1$.

6) Perilaku ekor (tail behaviour) dari GPD.

Lemma 2.2

Untuk θ dan λ yang ditetapkan dan $n \to \infty$ maka :

$$P(\mathrm{N}=\mathrm{n}) \approx \frac{\theta}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\theta + \frac{\theta}{\lambda}\right) \mathrm{n}^{-3/2} (\lambda \exp(1-\lambda))^{\mathrm{n}}.$$

Bukti :

Untuk n besar, penggunaan pendekatan n! fungsi massa peluang di dalam (2.1) sebagai berikut:

$$\mathrm{P}(\mathrm{N}=\mathrm{n}) \approx \frac{\theta(\theta+\mathrm{n}\lambda)^{\mathrm{n}-1}\exp(-\theta-\mathrm{n}\lambda)}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{n}^{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}\exp\left(-\mathrm{n}+\frac{\lambda_1}{12\mathrm{n}}\right)}$$

, dengan $\lambda_1 = \lambda_1(n)$ memenuhi $0 < \lambda_1 < 1$.

$$\vdots$$

$$\approx \left\{ \frac{\theta}{\lambda\sqrt{2\pi}} . \left(1+\frac{\theta/\lambda}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}-1} \exp\left(-\theta - \frac{\lambda_1}{12\mathrm{n}}\right) \right\} \mathrm{n}^{-\frac{3}{2}} \exp(\lambda(1-\lambda))^{\mathrm{n}}$$

$$\vdots$$

$$\approx \frac{\theta}{\lambda\sqrt{2\pi}} . \exp\left(-\theta+\frac{\theta}{\lambda}\right)\mathrm{n}^{-\frac{3}{2}} \exp(\lambda(1-\lambda))^{\mathrm{n}} . \ \blacksquare$$

3. Simpulan Dan Saran.

A. Simpulan.

1). Fungsi probabilitas model GPD tak terbatas dapat dibuktikan dengan menggunakan formula Lagrange atau formula beda Euler dengan aplikasi tes akar Cauchy dan formula Stirling.

2).Model GPD tak terbatas $P_n(\theta,\lambda) = \dfrac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1} e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}$ memiliki beberapa sifat-sifat penting diantaranya :

a. Nilai mean dan variansi ini akan naik jika λ naik.

b. Apabila $N_1 \sim GPD(\theta_1, \lambda)$ dan $N_2 \sim GPD(\theta_2, \lambda)$ maka $N_1 + N_2 \sim GPD(\theta_1 + \theta_2, \lambda)$.

c. Nilai pgf model GPD tak terbatas $G_N(u)$ akan naik jika λ juga naik.

d. Model GPD tak terbatas adalah unimodal untuk semua nilai-nilai θ dan λ kecuali apabila $\theta e^{-\lambda} = 1$ yaitu pada $\theta = e$, $\lambda = 1$.

e. Jika λ naik maka akan menurunkan nilai probabilitas ekor kiri dan nilai probabilitas ekor kanan dari model GPD tak terbatas.

B. Saran.

Berhubungan dengan masalah ini dapat dilakukan penelitian lebih lanjut tentang pembuktian distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD) menggunakan fungsi analitik dan penentuan sifat-sifat GPD yang lain, diantaranya : fungsi pembangkit momen dengan menggunakan fungsi Lambert, kumulan, momen pusat GPD, jumlahan variabel random sebanyak k variabel random, estimasi maksimum likelihood untuk θ dan λ, serta dapat dilakukan penelitian lebih lanjut untuk aplikasi dari model GPD.

4. Daftar Pustaka

Abramowitz, M and Stegun, I.A, 1965, " *Handbook of mathematical functions* ", Dover publications, New York.

Ambagaspitiya, R.S and Balakrishnan, N.,1994, " *On the compound generalized poisson distribution* ", Astin Bulletin, vol. 24, No. 2.

Bain, L.J. and Engelhardt, M.,1992, " *Introduction to probability and mathematical statistics* ", Duxbury press, California.

Consul, P.C. and Jain, G.C.,1973," *A generalization of the poisson distribution* ",Technometrics 15,791-799.

Consul, P.C.,1989," *Generalized poisson distributions;properties and applications* ",Marcel Dekker,New York.

DeGroot, M.H.,1975," *Probability and statistics* ",Addison-Wesley publishing,New York.

Dudewicz, E.D.and Mishra, S.N.,1988," *Modern mathematical statistics* " (terjemahan oleh: R.K. Sembiring),ITB,Bandung.

Eric, W.W.,2003," *Tail Probability* ",www.yahoo.com,Mathworld.

Gould, H.W.,1978," *Euler's formula for nth differences of powers* ",The american mathematical montly 85,450-467.

Kapur, J.N. and Saxena, H.C.,1986," *Mathematical Statistics* ",S. Chand & company LTD,New Delhi.

Pitman, J,1993," *Probability* ",Springer-Verlag,New York.

Roussas, G.G.,1973," *A first course in mathematical statistics* ",Mei Ya publications,Taiwan.

Sudargo, 2002, " *Beberapa permasalahan poisson dan generalisasinya (tesis)*",Jurusan matematika UGM,Yogyakarta.

Taylor, A.E. and Mann, W.R.,1983," *Advanced calculus* ", John Wiley & Sons,New York.

Thomas, G.B. and Finney, R.L.,1988," *Calculus and analytics geometry (7th edition)* ",Addison-Wesley publishing,New York.

Tuenter, H.J.H.,2000," *On the generalized poisson distribution*",Statistica Neerlandica, Vol. 54,374-376.

Walpole, R.E. and Myers, R.H.,1988," *Modern mathematical statistics for engineers and scientists (4th edition)* ",(terjemahan oleh : R.K. Sembiring),ITB,Bandung.

_______,2002," *Cauchy's root test* ",www.yahoo.com,Mathwizard.