Peranan Formulasi Inversi pada Fungsi Karakteristik Suatu Variabel Acak

John Maspupu

Pusfatsainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjunan No. 133 Bandung 40173,
Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998
E-mail: john_mspp@yahoo.com

Abstract: In the probability theory, we know there is the one-to-one correspondence between distributions and characteristic functions. The while, in various procedures involving Fourier or Laplace transforms may be used in actually computing the distribution of a random variable from its characteristic function. But, there is also an explicit formula for the distribution function in terms of the characteristic function and that usually known as *inversion formula.* Thus, from a characteristic function we can hope to obtain a distribution function unique only up to additive constant (*utac*).

Keywords : Inversion formula, Characteristic function, Random variable.

1. Pendahuluan

Sebuah fungsi yang erat kaitannya dengan fungsi distribusi dalam teori probabilitas biasanya dikenal dengan sebutan fungsi karakteristik (lihat [4]) . Salah satu formulasi penting yang berhubungan dengan fungsi karakteristik di sini adalah formulasi inversi dan ini dapat dibaca pada [3] maupun [4]. Formulasi ini secara eksplisit diturunkan dari fungsi distribusi F(x) bilamana fungsi karakteristik φ(t) diketahui. Dari formulasi ini juga dapat ditunjukkan keterkaitan antara turunan fungsi distribusi F'(x) atau fungsi densitasnya dengan fungsi karakteristik φ(t). Pengertian fungsi karakteristik ini dan kaitannya dengan fungsi distribusi secara aksiomatis dinyatakan dalam bentuk definisi, satu teorema dan lemma yang dapat dilihat pada *Definisi 3, Teorema 4* dan *Lemma 5* dalam pembahasan makalah ini ataupun di [2]. Namun yang menjadi masalah adalah bagaimana menunjukkan peranan formulasi inversi pada fungsi karakteristik suatu variabel acak atau dengan perkataan lain bagaimana caranya membuktikan makna dari *Teorema 4* dan *Lemma 5* secara matematis. Dengan demikian jelas tujuan pembahasan makalah ini adalah untuk membuktikan makna dari *Teorema 4* dan *Lemma 5*. Sedangkan kontribusi dari fungsi karakteristik ini diharapkan dapat mewakili peranan fungsi distribusi ataupun fungsi densitas suatu variabel acak dalam berbagai aplikasi konsep probabilitas.

2. Metodologi

Dalam pembuktian *Teorema 4* dan *Lemma 5* diperlukan latarbelakang pemahaman tentang konsep-konsep integral tak wajar, *integral Riemann* dengan sifat-sifatnya serta didukung oleh dua teorema penting yaitu: *Teorema Fubini dan Teorema Lebesque dominasi konvergen* (*Lebesque's Theorem on Dominated Convergence*) yang dinyatakan sebagai berikut;

Teorema1.(Fubini's Theorem) Jika *f(t,s)* suatu fungsi terukur yang didefinisikan pada

$E = E_t \times E_s$ dengan E , E_t , E_s adalah himpunan-himpunan yang terukur demikian rupa sehingga $\int_{Es} | f(t,s) | \, ds$ ada hampir dimana-mana di E_t dan juga terintegral di E_t yang berarti $\int_{Et} \left(\int_{Es} | f(t,s) | \, ds \right) dt$ ada, maka *f(t,s)* terintegral di E dan berlaku pernyataan berikut di bawah ini,

$$\int_E f(t,s) d(ts) = \int_{Et} \left(\int_{Es} | f(t,s) | \, ds \right) dt = \int_{Es} \left(\int_{Et} | f(t,s) | \, dt \right) ds.$$

Teorema 2. (Lebesque's Theorem on Dominated Convergence)

Misalkan S_1 adalah himpunan fungsi-fungsi naik yang terbatas bawah dan himpunan

$S_2 = \{ h = f - g \mid f, g \in S_1 \}$. Jika himpunan barisan fungsi $\{ f_n \} \subset S_2$ dengan

$f_n(t) \longrightarrow f(t)$ bilamana $n \to \infty$ dan untuk suatu $g \in S_2$, $| f_n(t) | \leq g(t)$

maka $f \in S_2$ dan $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt.$

Kedua teorema di atas ini dapat dilihat pada [1] lengkap dengan buktinya.

3. Hasil dan Pembahasan

Definisi 3. Jika X suatu variabel acak dengan fungsi distribusinya F_x atau fungsi kepadatannya f_x maka fungsi karakteristik φ_x didefinisikan sebagai berikut:

$\varphi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, dF_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_x(x) \, dx$, dengan $t \in R$, $i = \sqrt{-1}$ dan

$$e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$$

Teorema 4. Jika F suatu fungsi distribusi dan φ adalah fungsi karakteristiknya, maka berlaku hubungan F(a + h) – F(a - h) = $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}\ e^{-ita}\varphi(t)dt$, untuk a $\in$ R dan h > 0 , bilamana (a $\pm$ h) $\in$ C_F .

Bukti : Misalkan $\theta(t) = \frac{\sin th}{t}e^{-ita}\varphi(t)$ dan $I_T = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{-ita}\varphi(t)dt.$

Karena $\theta(t)$ adalah fungsi terukur jadi $|\theta(t)|$ juga terukur. Selanjutnya untuk h > 0,

tinjau $|\theta(t)| = |\frac{\sin th}{t}e^{-ita}\varphi(t)| = |\frac{\sin th}{t}|.|e^{-ita}|.|\varphi(t)| = h.|\frac{\sin th}{th}|.1.1.$

Karena $|\frac{\sin th}{th}| \le 1$, jadi $|\theta(t)| \le h$. Dengan demikian $\int|\theta(t)|dt \le \int hdt < \infty$.

Karena $|\theta(t)|$ terukur dan $\int|\theta(t)|dt$ terbatas akibatnya $|\theta(t)|$ terintegral sehingga $\theta(t)$ juga terintegral , jadi I_T ada dan berhingga. Sekarang tinjau pernyataan berikut di bawah ini,

$$I_T = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{-ita}\varphi(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{-ita}[\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{i(x-a)t}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)dt.$$

Karena $\theta(t)$ terukur dan $\int\theta(t)dt$ ada, maka menurut*Teorema Fubini* pertukaran integral pada I_T dibolehkan. Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut,

$$I_T = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{i(x-a)t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)[\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}\cos(x-a)tdt + i\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}\sin(x-a)tdt].$$

Tulis $B_1 = \frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t$ dan $B_2 = \frac{\sin th}{t}\sin(x-a)t$.

Karena B_1 adalah fungsi genap dan B_2 adalah fungsi ganjil maka pernyataan I_T di atas menjadi

$$I_T = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{0}^{T}\frac{\sin th}{t}\cos(x-a)tdt \quad \text{atau} \quad I_T = \int_{-\infty}^{\infty}g(x,T)dF(x),$$

dengan $g(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t - \sin(x-a-h)t}{t}dt$

atau $g(x,T) = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t}{t}dt$ - $\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a-h)t}{t}dt$.

Sebut $p(h,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}dt$, akibatnya $g(x,T) = \frac{1}{2}p(x-a+h,T)$ - $\frac{1}{2}p(x-a-h,T)$.

Karena $\int_0^\infty \frac{\sin th}{t}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & untuk \quad h > 0 \\ 0, & untuk \quad h = 0 \\ \frac{-\pi}{2}, & untuk \quad h < 0 \end{cases}$, jadi akan diperoleh pernyataan

$\lim_{T\to\infty} p(h,T) = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}dt = \begin{cases} 1, & untuk \quad h > 0 \\ 0, & untuk \quad h = 0 \\ -1, & untuk \quad h < 0 \end{cases}$. Dengan demikian *p(h,T)*

terbatas untuk setiap $h \in$ R dan T > 0, begitu juga g*(x,T)* terbatas untuk setiap $x \in$ R dan T > 0 sehingga berlaku pernyataan berikut yaitu,

$\lim_{T\to\infty} g(x,T) = \begin{cases} 0, & untuk \quad x < a-h, atau, x > a+h \\ \frac{1}{2}, & untuk \quad x = a-h, atau, x = a+h \\ 1, & untuk \quad a-h < x < a+h \end{cases}$. Selanjutnya gunakan *Lebesque Theorem on Dominated Convergence (Teorema 2)* akan diperoleh pernyataan

$\lim_{T\to\infty} I_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,T)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{T\to\infty} g(x,T)]dF(x)$. Karena (a ± h) $\in C_F$,

jadi $\lim_{T\to\infty} I_T = \int_{a-h}^{a+h} dF(x)$ = F(a + h) – F(a - h). Dengan perkataan lain dapat disimpulkan

bahwa F(a + h) – F(a - h) = $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\sinh t}{t} e^{-ita} \varphi(t)\, dt$. # ....(1)

Selanjutnya misalkan a + h = b dan a – h = a akibatnya a + b = 2a , b – a = 2h.

Tinjau Pernyataan berikut, $\dfrac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \dfrac{\cos ta - i\sin ta \quad - \quad (\cos tb - i\sin tb)}{2i}$.

Atau $\dfrac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \dfrac{\cos ta - \cos tb + i(\sin tb - \sin ta)}{2i}$

$$= \frac{2\sin(\frac{a+b}{2})t\sin(\frac{b-a}{2})t + 2i\cos(\frac{a+b}{2})t\sin(\frac{b-a}{2})t}{2i}$$

$$= \frac{2\sin ta\sin th + 2i\cos ta\sin th}{2i} = \frac{2i\sin th(\cos ta - i\sin ta)}{2i}.$$

Jadi $\dfrac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \sin th\, e^{-ita}$, dengan demikian $\dfrac{\sin th}{t} e^{-ita} = \dfrac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2it}$ .... (2)

Oleh karena itu jika a,b $\in C_F$ dengan a < b maka teorema inversi di (1) menjadi

F(b) – F(a) = $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \dfrac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\, dt$ ....(3)

<u>*Lemma 5*</u>. Jika F terdiferensial pada x dengan F'(x) = f(x) maka berlaku

hubungan f(x) $= \lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\dfrac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$ ....(4)

Jika dan hanya jika ruas kanan dari persamaan (4) ada. Jika φ terintegral pada R dan f(x) ada untuk setiap x $\in$ R maka f(x) = $\dfrac{1}{\pi}\int_{R} e^{-itx}\varphi(t)dt.$

<u>Bukti</u> : $(\Rightarrow)$ Sebutlah b = a + h dan gantilah a dengan x akibatnya b = x + h.

Dengan demikian $\dfrac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \dfrac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{2i}$ ....(5)

Tinjau persamaan (4) yaitu f(x) $= \lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\dfrac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-itx}-e^{-i(x+h)t}}{it}\right)\varphi(t)dt.$$

Akibatnya bentuk formula inversi di (3) berubah menjadi seperti di bawah ini

$$F(x+h) - F(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-itx}-e^{-i(x+h)t}}{it}\right)\varphi(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{it}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Atau $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\dfrac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$ ....(6)

Ini berarti persamaan (4) di atas menjadi f(x) = $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big($ F(x+h) – F(x) $\Big)$.

Karena F terdiferensial di x , jadi f(x) = $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ = F'(x).

Dengan perkataan lain ruas kanan persamaan (4) ada dan berhingga. #

Bukti:**(**$\Leftarrow$ **)** Dari persamaan (6) dapat diperlihatkan bahwa ruas kanan persamaan (4) adalah sebagai berikut, $\lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\Big(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\Big)e^{-itx}\varphi(t)dt$ $=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ = F'(x). Karena F'(x) = f(x) , jadi f(x) = $\lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\Big(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\Big)e^{-itx}\varphi(t)dt$. #

Dari persamaan-persamaan (2) dan (5) diperoleh $\Big(\frac{1-e^{-iht}}{2it}\Big)e^{-itx}$ = $\frac{\sin th}{t}e^{-ita}$.

Dan ini akan mengakibatkan hubungan

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\Big(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\Big)e^{-itx}\varphi(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{th}e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin th}{th}e^{-itx}\varphi(t)dt\,.$$

Karena f(x) ada untuk setiap x $\in$ R akibatnya dari persamaan (4) diperoleh

$$\text{f(x)} = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\Big(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\Big)e^{-itx}\varphi(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin th}{th}e^{-itx}\varphi(t)dt\,.$$

Atau f(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{R}\frac{\sin th}{th}e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{R}\lim_{h\to 0}\frac{\sin th}{th}e^{-itx}\varphi(t)dt$.

Karena $\lim_{h\to 0}\frac{\sin th}{th} = 1$, jadi f(x) = $\frac{1}{\pi}\int_{R} e^{-itx}\varphi(t)dt$. #

4. Simpulan

Dari hasil pembuktian *Teorema 4* dan *Lemma 5,* dapat dikatakan bahwa jika diketahui fungsi karakteristik dari suatu variabel acak maka dapat dihitung nilai fungsi distribusinya pada suatu lokasi tertentu. Bahkan dapat pula ditentukan fungsi densitas dari variabel acak tersebut. Dengan mengacu pada *Definisi 3, Teorema 4* dan *Lemma 5,* ternyata ada suatu korespondensi satu-satu di antara kedua fungsi tersebut yaitu fungsi karakteristik dengan fungsi distribusi dan ini sesuai informasi yang diperoleh dari teori probabilitas.

Daftar Rujukan

1. Arthur Wouk., *Applied Functional Analysis* , John Wiley & Sons, New York, 1999.
2. Ash Robert B., *Real Analysis and Probability* , Academic Press Inc., London, 2002.
3. Bhat Ramdas, *Modern Probability Theory*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 2001.
4. Loeve Michel, *Probability Theory*, D. Van Nostrad Company Inc., Canada, 2003.