SOLUSI PERIODIK TUNGGAL SUATU PERSAMAAN RAYLEIGH

Sugimin

Jurusan Matematika FMIPA UT
ugi@mail.ut.ac.id

ABSTRAK

Suatu persamaan vektor berbentuk $\dot{x} = f(x)$ dengan variabel bebas *t* yang tidak dinyatakan secara eksplisit disebut persamaan autonomous. Persamaan Rayleigh berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$. Bila persamaan Lienard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$ dengan $f(x)$ kontinu-Lipschitz dalam $\Re$ memenuhi:

(i) $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ suatu fungsi ganjil,

(ii) $F(x) \to +\infty$ untuk $x \to +\infty$ dan terdapat suatu konstanta $\beta > 0$ sehingga untuk $x > \beta$, $F(x) > 0$ dan monoton naik,

(iii) terdapat suatu konstanta $\alpha > 0$ sehingga untuk $0 < x < \alpha$, $F(x) < 0$,

maka persamaan tersebut paling sedikit mempunyai satu solusi periodik. Bila $\alpha = \beta$, maka hanya terdapat satu solusi. Dengan menghubungkan ke persamaan Van der Pol, ternyata persamaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal.

Kata kunci: Solusi Periodik Tunggal, Persamaan Rayleigh, Persamaan Van der Pol

I. PENDAHULUAN

Perhatikan sistem berikut:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Dianggap bahwa $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ terdefinisi pada domain *D* dalam bidang-*xy*, dan memenuhi kondisi Lipschitz untuk *x* dan *y* anggota persekitaran setiap titik di dalam *D*. Berikut pengertian dari kondisi Lipschitz:

Fungsi $f(t, x)$ yang didefinisikan pada $D \subset \Re$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz jika terdapat konstanta $K > 0$ sehingga $\left| f(t, x_1) - f(t, x_2) \right| \le K \left| x_1 - x_2 \right|$ untuk $(t, x_1), (t, x_2) \in \Re$. Konstanta *K* disebut konstanta Lipschitz untuk *f*.

Suatu persamaan vektor berbentuk $\dot{x} = f(x)$ dengan variabel bebas *t* yang tidak dinyatakan secara eksplisit disebut persamaan autonomous.

Persamaan diferensial berbentuk $f(t, x, x', x'') = 0$ disebut persamaan diferensial orde dua, dengan $x' = \dfrac{dx}{dt}$ dan $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ atau ditulis $\dot{x} = x' = \dfrac{dx}{dt}$ dan $\ddot{x} = x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Pada tahun 1920 Van der Pol merumuskan persamaan berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$, sedangkan Rayleigh merumuskan persamaan berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$.

Dalam kajian ini dibahas persamaan Rayleigh berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$. Bagaimana cara menunjukkan bahwa persamaaan Rayleigh tersebut mempunyai solusi periodik tunggal bila dihubungkan dengan persamaan Van der Pol. Dengan demikian, tujuan dari kajian ini adalah menunjukkan persamaaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal dengan cara menghubungkan ke persamaan Van der Pol.

II. SOLUSI PERIODIK TUNGGAL

Untuk mengetahui pengertian solusi periodik tunggal, perhatikan definisi dan teorema berikut.

Definisi:

Misalkan bahwa $x = \phi(t)$ adalah solusi dari persamaan $\dot{x} = f(x),\ x \in D \subset \Re^n$ dan terdapat suatu bilangan positif T sehingga $\phi(t + T) = \phi(t)$ untuk semua $t \in \Re^n$. Maka $\phi(t)$ disebut solusi periodik dari persamaan tersebut dengan periode *T*.

Jika $\phi(t)$ memiliki periode *T*, maka solusi juga memiliki periode 2*T*, 3*T*, dan seterusnya. Bila *T* adalah periode terkecil, maka $\phi(t)$ disebut periodik-*T*.

Teorema:

Anggap persamaan Lienard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$ dengan $f(x)$ kontinu-Lipschitz dalam $\Re$. Jika asumsi:

(i) $F(x) = \int_0^x f(s)\, ds$ suatu fungsi ganjil,

(ii) $F(x) \to +\infty$ untuk $x \to +\infty$ dan terdapat suatu konstanta $\beta > 0$ sehingga untuk $x > \beta$, $F(x) > 0$ dan monoton naik,

(iii) terdapat suatu konstanta $\alpha > 0$ sehingga untuk $0 < x < \alpha$, $F(x) < 0$,

maka persamaan tersebut paling sedikit mempunyai satu solusi periodik.

Bila $\alpha = \beta$, maka hanya terdapat satu solusi.

III. PERSAMAAN RAYLEIGH

Persamaan Rayleigh berbentuk

$$\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0 \quad \text{...} \quad (1)$$

Diferensiasi kedua ruas pada persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned}\dddot{x} + \dot{x} &= \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\ddot{x} + \mu\left(-2\dot{x}\ddot{x}\right)\dot{x} \\ &= \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\ddot{x} + \mu\left(-2\dot{x}^2\right)\ddot{x} \\ &= \mu\left(1 - \dot{x}^2 - 2\dot{x}^2\right)\ddot{x}\end{aligned}$$

Sehingga diferensiasi dari persamaan (1) adalah

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu\left(1 - 3\dot{x}^2\right)\ddot{x} \quad \text{...} \quad (2)$$

Dengan memisalkan $y = \dot{x}\sqrt{3}$, maka persamaan (2) menjadi

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu\left(1 - y^2\right)\ddot{x} \quad \text{...} \quad (3)$$

Persamaan (3) ini adalah bentuk persamaan Van der Pol.

Persamaan (3) dapat ditulis

$$\dddot{x} - \mu\left(1 - y^2\right)\ddot{x} + \dot{x} = 0 \text{ atau } \dddot{x} + \mu\left(y^2 - 1\right)\ddot{x} + \dot{x} = 0.$$

Dalam hal ini $f(\dot{x}) = \mu\left(y^2 - 1\right)$ .... (4)

Bila persamaan (4) diintegralkan terhadap *y*, diperoleh

$$F(\dot{x}) = \mu\left(\frac{1}{3}y^3 - y\right) \quad \text{...} \quad (5)$$

Nilai $y = \dot{x}\sqrt{3}$ disubstitusikan ke persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned}F(\dot{x}) &= \mu\left(\frac{1}{3}\left(\dot{x}\sqrt{3}\right)^3 - \dot{x}\sqrt{3}\right) \\ &= \mu\left(\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\dot{x}^3 - \dot{x}\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

Sehingga didapat $F(\dot{x}) = \mu\sqrt{3}\dot{x}\left(\dot{x}^2 - 1\right)$.

Untuk mengetahui persamaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal atau tidak, diperhatikan langkah-langkah berikut:

(a) Telah didapatkan $F(\dot{x}) = \mu\sqrt{3}\left(\dot{x}^3 - \dot{x}\right)$, atau $\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left(\dot{x}^3 - \dot{x}\right)$.

Bila $(\dot{x}, \dot{y})$ diganti dengan $(-\dot{x}, -\dot{y})$, diperoleh:

$$-\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left((-\dot{x})^3 - (-\dot{x})\right)$$
$$-\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left(-\dot{x}^3 + \dot{x}\right)$$

Bila kedua ruas dikalikan (-1), maka didapat $\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left(\dot{x}^3 - \dot{x}\right)$.

Nampak bahwa $F(\dot{x})$ tak berubah untuk $(\dot{x}, \dot{y})$ dan $(-\dot{x}, -\dot{y})$.

Jadi $F(\dot{x})$ merupakan fungsi ganjil.

(b) Untuk $\dot{x} \to +\infty$, nilai $F(\dot{x}) \to +\infty$; dan terdapat $\beta = 1 > 0$ sehingga untuk $\dot{x} > 1$, $F(\dot{x}) > 0$ dan $F(\dot{x})$ monoton naik.

(c) Terdapat $\alpha = 1 > 0$ sehingga untuk $0 < \dot{x} < \alpha = 1$, $F(\dot{x}) < 0$.

Dari (a), (b), dan (c) berarti syarat-syarat untuk solusi periodik tunggal dipenuhi.

Jadi, persamaan Rayleigh $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x}$, $\mu > 0$ mempunyai solusi periodik tunggal.

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari kajian ini adalah dengan menghubungkan ke persamaan Van der Pol ternyata persamaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal.

Daftar Pustaka

Boyce, William E., Di Prima, Richard C. (1976). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, third Edition*. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Cronin, Jane (1994). *Differential Equations, Introduction and Qualitative Theory, Second Edition, Revised and Expansed*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Finney, Ross L., Ostberg, Donald R. (1976). *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*. USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hubbard, J. H., West, B. H. (1976). *Differential Equations*, *A Dynamical Systems Approach, Part I*. New York: Springer-Verlag, Inc.

Hurewicz, Witold (1958). *Lectures on Ordinary Differential Equations*. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Jones, D. S., Sleeman, B. D. (1983). *Differential Equations and Mathematical Biology*. Australia: George Allen & Unwin, Inc.

Sanches, David A., Allen, Richard C., Jr., Kyner, Walter T. (1983). *Differential Equations, An Introduction*. Canada: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Verhulst, Ferdinand (1990). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.* Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.