Keterbatasan Operator Integral Fraksional Di Ruang Lebesgue Tak Homogen

Herry Pribawanto Suryawan
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
Email: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstrak

Dalam makalah ini akan dibuktikan keterbatasan operator integral fraksional I_α di ruang Lebesgue tak homogen dengan menggunakan keterbatasan operator maksimal radial Hardy-Littlewood dan ketaksamaan Hedberg. Selanjutnya, keterbatasan I_α tersebut diterapkan pada pembuktian ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen.

Kata kunci: *Operator integral fraksional, operator maksimal radial Hardy-Littlewood, ruang Lebesgue tak homogen, ketaksamaan Olsen.*

Pendahuluan

Misalkan $Q(x,r)$ menyatakan kubus yang berpusat di $x \in R^d$ dan mempunyai jari-jari (yaitu setengah panjang sisi) $r > 0$; dan $Q(x,kr)$, dengan $k > 0$, menyatakan kubus konsentris dengan jari-jari kr. Misalkan juga C adalah konstanta positif, yang dalam makalah ini tidak perlu sama dari baris ke baris. Ruang metrik – disini hanya dibicarakan R^d –yang dilengkapi dengan ukuran Borel μ disebut ruang homogen apabila μ memenuhi *kondisi doubling*:

$$\mu(Q(x,2r)) \le C\mu(Q(x,r)).$$

Sementara itu, (R^d,μ) dengan μ yang tidak memenuhi *kondisi doubling* tetapi memenuhi *kondisi growth*

$$\mu(Q(x,r)) \le Cr^n,$$

untuk $0 < n \le d$, disebut sebagai ruang tak homogen. Beberapa hasil yang berkenaan dengan ruang tak homogen dapat dilihat misalnya pada [2, 9,11 12].

Di ruang tak homogen, operator integral fraksional I_α didefinisikan dengan

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y).$$

Perhatikan bahwa di ruang homogen, pangkat dari $|x-y|$ adalah $d-\alpha.$ Operator $I_\alpha,$ yang dikenal pula sebagai potensial Riesz, pertama kali dipelajari oleh Hardy dan Littlewood [6, 7] serta Sobolev [13], sedangkan hasil selanjutnya – di ruang homogen – dapat dilihat pada [1, 4, 5, 8, 10].

Dalam [3], operator I_α telah dibuktikan terbatas dari ruang Lebesgue tak homogen $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu).$ Dalam makalah ini, keterbatasan tersebut akan dibuktikan ulang dan kemudian digunakan untuk membuktikan ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen.

Keterbatasan Operator I_α

Diberikan f adalah sebarang fungsi terukur-μ pada R^d, dengan μ adalah ukuran Borel yang memenuhi *kondisi growth* . Didefinisikan

$$\| f : L^p(\mu)\| = \left(\int_{\mathbb{R}^d} | f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$$

dan

$$\| f : L^\infty(\mu)\| = ess\sup\left\{| f(x)| : x \in R^d\right\}$$

dengan $ess\sup\left\{| f(x)| : x \in R^d\right\}$ menyatakan batas atas terkecil esensial dari $|f|.$ Ruang Lebesgue tak homogen $L^p(\mu) = L^p(R^d, \mu), 1 \le p \le \infty,$ adalah ruang kelas-kelas ekuivalen f sedemikian sehingga $\| f : L^p(\mu)\| < \infty.$ Di ruang Lebesgue tak homogen, diketahui I_α bersifat terbatas.

Teorema 2.1 [2, 3] *Diberikan* $0 < \alpha < n.$ *Jika* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ *dan* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n},$ *maka* I_α *terbatas dari* $L^p(\mu)$ *ke* $L^q(\mu).$

Bukti keterbatasan I_α di ruang Lebesgue tersebut dapat diperoleh menggunakan ketaksamaan Hedberg yang melibatkan operator maksimal radial Hardy-Littlewood M dengan

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{Q(x,r)} | f(y)| \, d\mu(y).$$

Operator M ini bertipe lemah-(1,1) dan bertipe kuat-$(\infty,\infty).$

Teorema 2.2 [3] *Operator maksimal* M *memenuhi*

$$\mu\left\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^d} |f(x)|\, d\mu(x)$$

dan

$$\| Mf : L^\infty(\mu) \| \leq C \| f : L^\infty(\mu) \|.$$

Bukti: Ambil $f \in L^1(\mu)$ dan definisikan

$$E_\lambda = \left\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\right\}.$$

Jika $x \in E_\lambda$, maka terdapat $r_x > 0$ sehingga

$$\frac{1}{r_x^n}\int_{Q(x,r_x)} |f(y)|\, d\mu(y) > \lambda.$$

Selanjutnya, *Lema Cover Vitali* memberikan koleksi kubus $\{Q(x_j, r_j)\}_j$ (dengan $x_j \in E_\lambda$ dan $r_j = r_{x_j}$) yang sepasang-sepasang saling lepas sedemikian sehingga

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} Q(x, r_x) \subset \bigcup_j Q(x_j, 3r_j).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) &\leq \sum_j \mu(Q(x_j, 3r_j)) \\
&\leq C\sum_j (3r_j)^n \\
&\leq C\sum_j \frac{1}{\lambda}\int_{Q(x_j,r_j)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq C\int_{R^d} |f(y)|\, d\mu(y).
\end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa

$$\mu\left\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^d} |f(x)|\, d\mu(x).$$

Untuk membuktikan bagian selanjutnya, ambil sebarang $x \in R^d$ dan kubus $Q(x,r) \subset R^d$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\,d\mu(y) &\le \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} ess\sup|f(y)|\,d\mu(y)\\ &\le \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}\|f:L^\infty(\mu)\|\,d\mu(y)\\ &= \|f:L^\infty(\mu)\|\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}d\mu(y)\\ &= \|f:L^\infty(\mu)\|\frac{1}{r^n}\mu(Q(x,r))\\ &\le C\|f:L^\infty(\mu)\|.\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\sup_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\,d\mu(y)\le C\|f:L^\infty(\mu)\|,$$

yang memberikan ketaksamaan yang diinginkan.

■

Catat bahwa operator yang bertipe kuat-(∞,∞) berimplikasi bahwa operator tersebut bertipe lemah-(∞,∞). Jadi M merupakan operator sublinier yang bertipe lemah-(1, 1) dan (∞,∞). Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Interpolasi Marcinkiewicz diperoleh hasil berikut.

Akibat 2.3 [3] *Operator maksimal* M *terbatas di* $L^p(\mu)$ *untuk* $1<p<\infty$.

Dengan menggunakan keterbatasan M di $L^p(\mu)$ akan dibuktikan ketaksamaan Hedberg yang nantinya diperlukan untuk membuktikan keterbatasan operator I_α di ruang Lebesgue tak homogen.

Teorema 2.4 (Ketaksamaan Hedberg). *Diberikan* $0<\alpha<n$ *dan* f *fungsi terbatas dengan tumpuan kompak. Maka untuk* $1\le p<\frac{n}{\alpha}$ *berlaku*

$$|I_\alpha f(x)|\le C\|f:L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\,Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Bukti: Ambil sebarang $t>0$. Dengan menuliskan

$$|I_\alpha f(x)|\le \underbrace{\int_{|x-y|<t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)}_{I}+\underbrace{\int_{|x-y|\ge t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)}_{II},$$

akan dicari batas untuk I dan II. Untuk suku pertama, I, berlaku

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|x-y|<t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}t \le |x-y| < 2^{-k}t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\le 2^{2n-\alpha} t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-k+1}t)^n} \int_{Q(x,2^{-k+1}t)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\le 2^{2n-\alpha} t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} Mf(x) \\
&= Ct^{\alpha} Mf(x).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk suku kedua, yaitu II, terlebih dahulu diperhatikan kasus $p=1$ sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{|x-y|\ge t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\le \frac{1}{t^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\ge t} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\le t^{-(n-\alpha)} \| f : L^1(\mu) \| .
\end{aligned}
$$

Kemudian untuk kasus $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, pilih $\beta = p'(n-\alpha) - n.$ Dalam hal ini, p' adalah pangkat sekawan dari p, yaitu p' memenuhi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$ Oleh karena $\beta > 0$, maka dengan menggunakan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{|x-y|\ge t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\le \left(\int_{|x-y|\ge t} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x-y|\ge t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \| f : L^p(\mu) \| \left(\int_{|x-y|\ge t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \| f : L^p(\mu) \| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k t \le |x-y| < 2^{k+1} t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n+\beta}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le \| f : L^p(\mu) \| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(Q(x, 2^{k+1}t))}{(2^k t)^{n+\beta}} \right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\le C \| f : L^p(\mu) \| 2^{\frac{n}{p'}} t^{-\frac{\beta}{p'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\beta} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= C \| f : L^p(\mu) \| t^{-\frac{\beta}{p'}} \\
&= C t^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \| .
\end{aligned}$$

Catat bahwa apabila dipilih $p = 1$ dan $C = 1,$ maka diperoleh ketaksamaan yang sama dengan kasus $p = 1$ di atas. Dengan demikian, untuk $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$ berlaku

$$\begin{aligned}
| I_\alpha f(x) | &\le I + II \\
&\le C\left(t^\alpha Mf(x) + t^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \| \right)
\end{aligned}$$

untuk setiap $t > 0.$ Selanjutnya, dengan memilih

$$t = \left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}}$$

dan mensubstitusikannya ke dalam ketaksamaan terakhir, diperoleh

$$\begin{aligned}
| I_\alpha f(x) | &\le C\left(\left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}} \right)^{\alpha} Mf(x) + C\left(\left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}} \right)^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \| \\
&= C\left(\frac{Mf(x)^{-\frac{p\alpha}{n}} Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}}} + \frac{Mf(x)^{-\frac{p\alpha}{n}+1}}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}+1}} \| f : L^p(\mu) \| \right) \\
&= C\left(\frac{Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}}{\| f : L^p(\mu) \|^{1-\frac{p\alpha}{n}}} \right) \\
&= C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}} .
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa fungsi maksimal Mf terbatas di $L^p(\mu),$ maka bukti selesai.

■

Sekarang akan dibuktikan bahwa operator integral fraksional I_α bersifat terbatas di ruang Lebesgue tak homogen.

Bukti Teorema 2.1.

Dari Ketaksamaan Hedberg diperoleh

$$| I_\alpha f(x) | \le C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p\alpha}{n}} Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}} .$$

Hal ini berakibat

$$\left(\int_{R^d} | I_\alpha f(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}} \left(\int_{R^d} | Mf(x)|^{q\left(1-\frac{p\alpha}{n}\right)} \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C \| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}} \left(\int_{R^d} | Mf(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C \| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}} \| Mf : L^p(\mu)\|^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq C \| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}} \| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p}{q}}$$

$$= C \| f : L^p(\mu)\|.$$

Jadi berlaku

$$\| I_\alpha f : L^q(\mu)\| \leq C \| f : L^p(\mu)\|,$$

yaitu I_α terbatas dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$.

■

Ketaksamaan Olsen

Seperti halnya dengan hasil di ruang homogen (lihat [10]), disini akan dibuktikan ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen. Ketaksamaan Olsen ini menunjukkan keterbatasan operator WI_α untuk potensial yang dipertubasi W pada persamaan Schrödinger.

Teorema 3.1. *Untuk* $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ *dan* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *berlaku*

$$\| WI_\alpha f : L^p(\mu)\| \leq C \| W : L^{\frac{n}{\alpha}}(\mu)\| \, \| f : L^p(\mu)\|,$$

yaitu WI_α *terbatas di* $L^p(\mu)$, *apabila* $W \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mu)$.

Bukti: Dengan menggunakan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$\int_{R^d} | WI_\alpha f(y)|^p \, d\mu(y) \leq \left(\int_{R^d} | W(y)|^{\frac{pq}{q-p}} \, d\mu(y)\right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_{R^d} | I_\alpha f(y)|^q \, d\mu(y)\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Apabila diambil akar pangkat-p dari kedua ruas ketaksamaan, maka

$$\left(\int_{R^d} | WI_\alpha f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R^d} | W(y)|^{\frac{n}{\alpha}} \, d\mu(y)\right)^{\frac{\alpha}{n}} \left(\int_{R^d} | I_\alpha f(y)|^q \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan keterbatasan I_α dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$, diperoleh

$$\| WI_\alpha f : L^p(\mu)\| \leq C \| W : L^{\frac{n}{\alpha}}(\mu)\| \, \| f : L^p(\mu)\|.$$

Penutup

Dengan menggunakan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood dan Ketaksamaan Hedberg dapat dibuktikan keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue tak homogen. Selanjutnya keterbatasan operator integral fraksional ini diterapkan pada pembuktian ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen. Hasil-hasil ini sekaligus mendukung fakta pada penelitian di area analisis Fourier yakni banyak teori di dalam analisis Fourier yang tetap berlaku apabila *kondisi doubling* digantikan oleh *kondisi growth*.

Daftar Pustaka

[1] Adams, D. R., "A note on Riesz potentials", *Duke Math. J.* **42** (1975), 765-778.

[2] Cuerva, J. G., and Gatto, A. E., "Boundedness properties of fractional integral operators associated to non-doubling measures", *Studia Math* **162** (2004), no. 3, 245-261.

[3] Cuerva, J. Garcia, and Martell, J. M., "Two weight norm inequalities for maximal operator and fractional integrals on non-homogeneous spaces", *Indianan University Mathematics Journal* **50** (2001), no. 3, 1241-1280.

[4] Gunawan, H., "A note on the generalized fractional inegral operators", *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)* **9** (2003), 39-43.

[5] Gunawan, H. and Eridani, "Fractional integrals and generalized Olsen inequalities", to appear in *Kyungpook Math. J.*

[6] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E., "Some properties of fractional integrals. I", *Math. Zeit.* **27** (1927), 565-606.

[7] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E., "Some properties of fractional integrals. II", *Math. Zeit.* **34** (1932),403-439.

[8] Nakai, E., "Recent topics on fractional integral operators" (Japanese), *Sūgaku* **56** (2004), 260-280.

[9] Nazarov, F., Treil, S., and Volberg, A., "Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderon-Zygmund operators on non-homogeneous spaces", *Internat. Math. Res. Notices* **9** (1998), 463-487.

[10] Olsen, P. A., "Fractional integration, Morrey spaces and a Schrödinger equation", *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), 2005-2055.

[11] Sawano, Y., Sobukawa, T. , and Tanaka, H., “Limiting case of the boundedness of fractional integral operators on non-homogeneous space”, *J. Inequal. Appl. Art. ID 92470* (2006), 16p.

[12] Sihwaningrum, I. , Suryawan, H. P., and Gunawan, H. “Fractional integral operators and Olsen inequalities on non-homogeneous spaces”, to appear in *Aust. J. of Math. Anal. and Appl.*

[13] Sobolev, S., “On a theorem in functional analysis” (Russian), *Mat. Sob.* **46** (1983), 471-497 [English translation in *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **34** (1963), 39-68].