BAB II
KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi-definisi dan teorema-teorema yang akan menjadi landasan untuk pembahasan pada Bab III, yaitu nilai eigen, vektor eigen, persamaan differensial, sistem persamaan differensial, titik ekuilibrium, linearisasi, analisis kestabilan, bifurkasi, dan bilangan reproduksi dasar.

A. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Aplikasi dari aljabar linier yang melibatkan sistem dengan *n* persamaan dan *n* variabel disajikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.1 (Anton, 1997: 277)

Diberikan matriks A berukuran $n \, x \, n$. Vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen (eigenvector) dari A. Jika ada scalar λ sedemikian sehingga

$$Ax = \lambda x \qquad (2.1)$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dari A dan x disebutkan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Persamaan (2.1) dapat diubah menjadi

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (2.2)$$

Dengan I matriks identitas berukuran $n \times n$.

Menurut Definisi 2.1, agar λ menjadi nilai eigen, maka haruslah ada solusi tak nol (vektor eigen) dari persamaan tersebut. Persamaan (2.2) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 \qquad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dinamakan *persamaan karakteristik dari A,* sedangkan skalar λ disebut nilai eigen. Jika diperluas, persamaan karakteristik (2.3) berbentuk polinom dalam λ yang dinamakan polinomial karakteristik matriks A. Polinomial karakteristik matriks A menjadi

$$|A - \lambda I_n| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n,\ i = 0,1,\dots,n \tag{2.4}$$

Diberikan contoh untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks.

Contoh 2.1

Persamaan karakteristik matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= 0 \\ \left|\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \qquad (2.5) \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga matriks solusi dari A adalah akar-akar persamaan karakteristik (2.5) yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$.

Selanjutnya, akan ditentukan vektor eigen dari matriks A.

i. Untuk $\lambda = 1$, maka Persamaan (2.5) menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Sistem persamaan (2.6) ekuivalen dengan persamaan berikut

$$-2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

Sehingga diperoleh pemecahan dari sistem (2.6) adalah $x_1 = -x_2$. Misalkan $x_1 = s_1$, maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} s_1$$

ii. Dengan menggunakan cara yang analog seperti pada (i) maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} s_2$$

Dengan demikian $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari matriks A.

B. Persamaan Diferensial

Model matematika penyebaran penyakit kolera berbentuk persamaan diferensial. Oleh karena itu, salah satu teori yang akan dikaji dalam bab ini adalah Persamaan diferensial.

Definisi 2.2 (Ross, 1989: 1)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang dilibatkan dalam persamaan, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.3 (Ross, 1989: 2)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.4 (Ross, 1989: 2)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Persamaan–persamaan berikut ini disebut sebagai persamaan diferensial biasa.

a) $\frac{dx}{dt} + 4tx = \sin t$

b) $\frac{du}{dt} = e^t$

Persamaan–persamaan berikut ini disebut sebagai persamaan diferensial parsial.

c) $\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} = 0$

d) $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial q} = 0$

C. Sistem Persamaan Linear

Secara aljabar sebuah persamaan garis yang berbentuk $a_1x + a_2y + a_3z = b$, dinamakan persamaan linier dengan tiga variabel x, y dan z. Secara umum untuk n variabel yang berhingga $(x_1, x_2. x_3, \dots, x_n)$, persamaan linier dapat dinyatakan dengan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$dan b adalah konstanta-konstanta real.

Sehingga sistem persamaan linier menjadi bentuk

$$Ax = b \tag{2.7}$$

dengan *A* adalah matriks dengan jumlah baris *m* dan jumlah kolom *n* dan

$x= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Sistem persamaan linier dikatakan homogen jika semua suku konstantanya sama dengan nol, sistem dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Sistem persamaan linier homogen merupakan sistem yang konsisten karena $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ merupakan solusi. Sistem persamaan linier homogen memiliki satu solusi atau tak hingga banyak solusi. Solusi $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ disebut solusi trivial, jika ada *i* sehingga $x_i \neq 0$ maka disebut bentuk non trivial.

D. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan differensial dapat diterapkan di berbagai disiplin ilmu tidak hanya matematika namun juga fisika, biologi, ekonomi dan lain sebagainya.

Diberikan sistem persamaan differensial

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{gathered} \tag{2.9}$$

dengan $f_i: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, i = 1,2,3, \dots, n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E,$ dan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, 2, \dots, n.$

Sistem (2.9) dikatakan autonomous jika variabel waktu *t* tidak muncul secara eksplisit, sehingga Persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.10}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subseteq \mathbb{R}^n, f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T$, dan syarat awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = x_0$

Selanjutnya, jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing masing linier dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$ maka sistem (2.10) disebut sistem persamaan differensial linier. Sistem (2.10) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\vdots \\
\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{gathered}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{x} = Ax \tag{2.11}$$

dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E$

Jadi, Sistem (2.11) disebut sistem differensial linier, tetapi jika Sistem (2.9) tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2.11) maka Sistem (2.9) disebut sistem persamaan differensial nonlinear. Suatu persamaan differensial disebut persamaan differensial non linear jika memenuhi setidaknya satu syarat berikut (Ross, 1984: 6):

a. Memuat variabel tak bebas dari/ dan turunan-turunannya berpangkat selain satu.
b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.

c. Terdapat fungsi transcendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

E. Titik Ekuilibrium

Kestabilan sistem persamaan diferensial dapat diketahui dengan penyelidikan melalui pemberian suatu nilai awal yang terletak pada persekitaran titik ekuilibrium.

Definisi 2.7 (Wiggins, 1990: 5)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$adalah titik ekuilibrium dari Sistem (2.10) jika dipenuhi

$$f(\bar{x}) = 0 \tag{2.12}$$

Contoh 2.5

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Misal $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$ merupakan titik ekuilibrium Sistem (2.13)

$$x_1 x_2 - 2x_1 = 0 \tag{2.14}$$

$$x_1^2 - x_2 = 0 \tag{2.15}$$

Dari Persamaan (2. 15) diperoleh

$$x_1^2 = x_2 \tag{2.16}$$

Selanjutnya di substitusikan pada Persamaan (2.14)

$$x_1^3 - 2x_1 = 0$$

$$x_1(x_1^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_1 = \pm\sqrt{2}$$

Selanjutnya, substitusikan $x_1 = 0$ pada Persamaan (2.16) diperoleh $x_2 = 0$, substitusikan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_1 = -\sqrt{2}$ pada Persamaan (2.16) didapatkan $x_2 = 2$. Jadi titik ekuilibrium dari Sistem (2.13) yaitu $(0,0)^T, \left(\sqrt{2}, 2\right)^T$, dan $\left(-\sqrt{2}, 2\right)^T$.

F. Linearisasi

Linearisasi adalah proses mengubah sistem persamaan diferensial nonlinear ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial linear. Didalam linierisasi, akan diperoleh matriks Jacobian. Matriks Jacobian adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan turunan dari bentuk yang tidak linier.

Berikut teorema tentang matriks Jacobian.

Teorema 2.2 (Perko, 2001: 67)

Jika $f: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ *terdiferensial di* x_0*, maka diferensial parsial* $\frac{\partial \boldsymbol{f_i}}{\partial x_i}, i, j = 1, \dots, n$*, di* x_0 *ada untuk semua* $x \in \mathbb{R}^n$ *dan,*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)x_j$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Df(x_0)x$$

Matriks $Df(x_0)$ disebut matriks *Jacobian*, selanjutnya dinotasikan $Jf(x_0)$.

Diberikan sistem persamaan berikut.

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.14}$$

dimana $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n, f: E \longrightarrow \mathbb{R}^n, f$ adalah fungsi nonlinear dan kontinu.

Sistem (2.14) akan dilinearisasi. Diberikan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T, f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ dan $f \in \mathrm{C}^1(E)$ dengan E himpunan terbuka. Misal $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^{\mathbf{T}}$ adalah titik ekuilibrium Sistem (2.14). Deret Taylor dari fungsi f disekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$ adalah sebagai berikut

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$= f_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_1})$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_2}) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_n})$$

$$+ R_{f1}$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$= f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_1})$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_2 - \overline{x_2}) + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_n - \overline{x_n})$$

$$+ R_{f2}$$

$$\vdots \tag{2.15}$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$= f_n(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_1})$$

$$+ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_2 - \overline{x_2}) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_n - \overline{x_n})$$

$$+ R_{fn}$$

dengan $R_{f1}, R_{f2}, \dots, R_{fn}$ diabaikan, karena nilai $R_{f1}, R_{f2}, \dots, R_{fn}$ mendekati nol. Karena titik ekuilibriumnya $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T$, maka $f_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T = f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T = \cdots = f_n(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T = 0$, sehingga diperoleh

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_1}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_2}) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_n})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_1 - \overline{x_1}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_2 - \overline{x_2}) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T(x_n - \overline{x_n})$$

$\vdots$ (2.16)

$$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T (x_1 - \overline{x_1}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T (x_2 - \overline{x_2}) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T (x_n - \overline{x_n})$$

dengan n variabel. Persamaan (2.16) dapat dibentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \overline{x_1} \\ x_2 - \overline{x_2} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x_n} \end{bmatrix}.$$

(2.17)

Misalkan $q_1 = x_1 - \overline{x_1}, q_2 = x_2 - \overline{x_2}, \dots, q_n = x_n - \overline{x_n}$, maka Sistem (2.17) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \vdots \\ \dot{q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

(2.18)

Matriks *Jacobian* dari Persamaan (2.18) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})^T \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Matriks *Jacobian* (2.19) dapat digunakan untuk melihat kestabilan disekitar titik ekuilibrium.

Jika matriks *Jacobian J* memiliki nilai eigen yang bernilai tak nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan dari (2.14) dapat dilihat dari

$$\dot{q} = Jq \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) disebut hasil linierisasi dasi Sistem (2.14).

G. Analisis Kestabilan

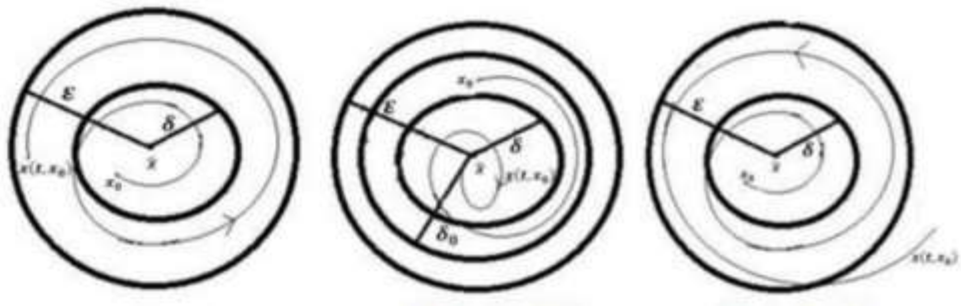
Terdapat tiga kemungkinan sifat dinamik di sekitar titik ekuilibrium yaitu stabil, stabil asimtotik, tidak stabil. Berikut definisi kestabilan

Definisi 2.10 (Olsder dan Woude, 2004: 57)

Diberikan sebuah sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ pada waktu t dinotasikan $x(t, x_0)$, maka

a. *Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.*
b. *Stabil asimtotik jika untuk setiap titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$.*
c. *Tidak stabil jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ tidak memenuhi (a).*

Definisi (2.10) dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.1 berikut..



a. Titik ekuilibrium Stabil

b. Titik ekuilibrium Stabil Asimtotik

c. Titik ekuilibrium Tidak Stabil

Gambar 2.1 Kestabilan berdasarkan titik ekuilibrium

Pada Gambar 2.1.a terlihat bahwa jika diambil nilai awal yang dekat dengan titik ekuilibrium maka solusi sistem persamaan pada saat t selalu berada pada jarak yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium tersebut. Pada Gambar 2.1.b, titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik jika solusi dari sistem persamaan pada saat t membesar akan menuju ke titik ekuilibrium untuk nilai awal yang dekat dengan titik ekuilibrium, sedangkan pada Gambar 2.1.c titik ekuilibrium tidak stabil jika ada solusi sistem persamaan yang nilai awalnya dekat dengan titik ekuilibrium tetapi solusinya menjauhi titik ekuilibrium.

Selanjutnya, diberikan teorema kestabilan untuk memudahkan dalam menganalisa kestabilan model di sekitar titik ekuilibrium dengan melihat nilai eigen.

Teorema 2.3 (Olsder dan Woude, 2004: 58)

Diberikan persaamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$, mempunyai k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

a. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$.

b. *Jika ada* $Re(\lambda_i) > 0,\ \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ *maka titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *tidak stabil.*

Bukti :

a. Akan dibuktikan bahwa

($\Longrightarrow$)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik maka $Re(\lambda_i) < 0,\ \forall i = 1, 2, 3, \dots, w$

Menurut definisi (2.9) titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ disebut stabil asimtotik, jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Artinya untuk $t \to \infty, x(t, x_0)$ menuju $\bar{x} = 0$. Solusi $x(t, x_0)$ dari sistem persamaan diferensial$\dot{x} = Ax$ maka (t, x_0) selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Artinya untuk $e^{Re(\lambda_i)t}$ yang menuju $\bar{x} = 0$ maka $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, w$.

($\Longleftarrow$)

Jika $Re(\lambda_i) < 0,\ \forall i = 1, 2, 3, \dots, w$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik.

Solusi $x(t, x_0)$selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$, jika $Re(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \to \infty$, $e^{Re(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$. Berdasarkan Definisi (2.9) titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

b. Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil, maka $Re(\lambda_1) > 0, \forall i = 1,2, \dots, w$.

Titik ekuilibrium tidak stabil, untuk $t \to \infty, x(t, x_0)$ menuju ∞ hanya apabila $Re(\lambda_1) > 0$.

Jika $Re(\lambda_1) > 0, \forall i = 1,2, \dots, w$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Diberikan $Re(\lambda_1) > 0, x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{Re(\lambda_1)t}$akan selalu menuju ∞.

Jadi titik ekuilibrium$\bar{x} = 0$ tidak stabil.

H. Bifurkasi

Definisi 2. 11(Guckenhimer dan Holmes, 1985: 117)

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif (dalam hal ini kestabilan) suatu sistem yang terjadi akibat perubahan nilai parameter.

Biasanya bifurkasi terjadi pada penyelesaian titik ekuilibrium, yang mempunyai paling sedikit satu nilai eigen sama dengan nol pada bagian realnya. Bifurkasi yang paling sederhana untuk dipelajari adalah bifurkasi dimensi 1 dari ekuilibrium dengan satu parameter. Bifurkasi ini dikenal dengan bifurkasi satu parameter dari sistem. beberapa jenis bifurkasi satu parameter adalah bifurkasi *saddle node,* bifurkasi *transkritikal,* dan bifurkasi *hopf.*

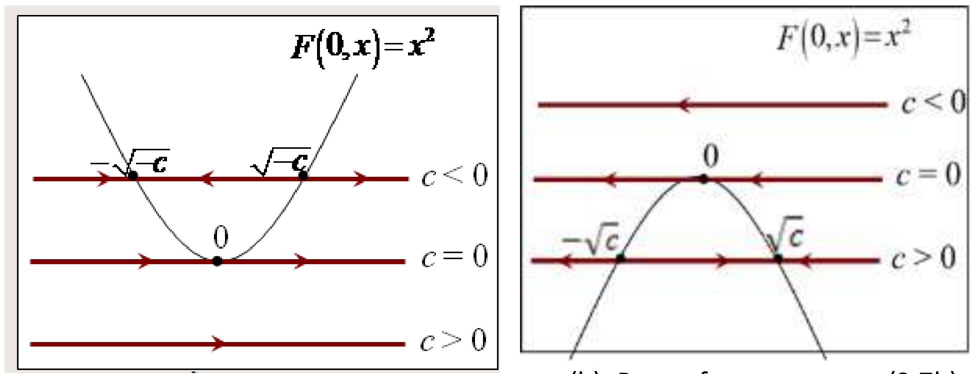
a. Bifurkasi *Saddle Node*

Bifurkasi *Saddle node* ditandai oleh bertambahnya titik ekuilibrium dalam suatu diagram bifurkasi semisal pada saat $c = c_0$. Ketika $c > c_0$ bertambah dua titik ekuilibrium dimana salah satu titik stabil dan satunya tidak stabil. Salah satu bentuk sistem berdimensi 1 yang mengalami bifurkasi *saddle node* adalah (Wiggins, 2003: 366)

$$\dot{x} = c + x^2 \qquad x, c \in R^1 \tag{2.7a}$$

$$\dot{x} = c - x^2 \qquad x, c \in R^1 \tag{2.7b}$$

Titik ekuilibrium dari Sistem (2.7a) dan (2.7b) berturut- turut dengan $x = \pm\sqrt{-c}$ dan $x = \pm\sqrt{c}$. Terdapat tiga kondisi yang memenuhi persamaan (2.7a) dan (2.7b), yaitu saat $c = 0, c < 0, c > 0$. Berikut gambar potret fasenya,

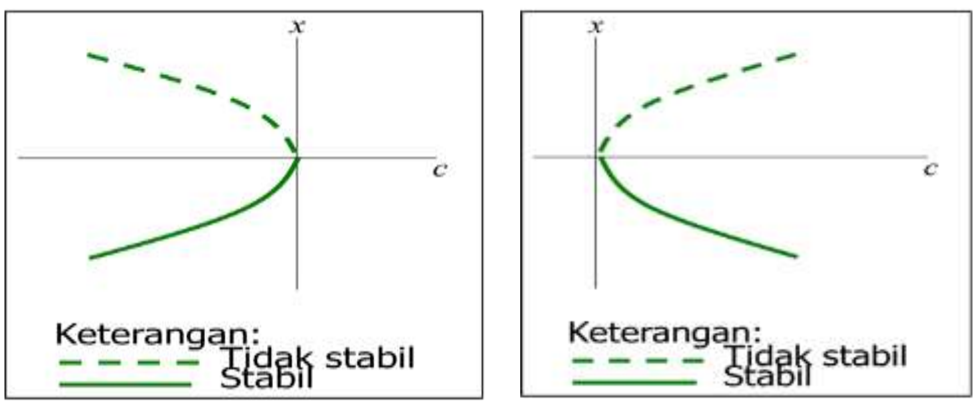


(a) Potret fase persamaan (2.7a)

(b) Potret fase persamaan(2.7b)

Gambar 2.2 Potret Fase Bifurkasi Saddle Node

Berikut ini diagram bifurkasi saddle node persamaan (2.7a) dan (2.7b)



(a) Diagram Bifurkasi Persamaan (2.7a)

(b) Diagram Bifurkasi Persamaan (2.7b)

Gambar 2.3 Diagram Bifurkasi Saddle Node

b. Bifurkasi *Transkritical*

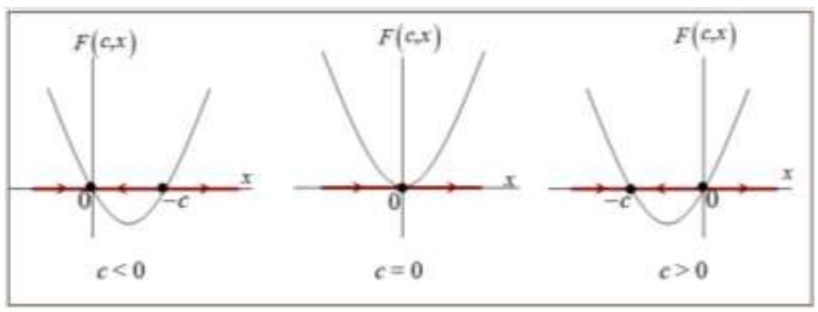
Bifurkasi *Transcritical* ditandai dengan persilangan dari dua cabang ekuilibrium dalam satu diagram bifurkasi yang mana tipe ekuilibrium setiap cabang mengalami perubahan kestabilan ketika $c = c_0$. Salah satu bentuk sisitem berdimensi -1 yang mengalami bifurkasi *transkritical* adalah (Wiggins, 2003, 370)

$$\dot{x} = cx + x^2 \qquad x, c \in R^1 \qquad (2.7c)$$

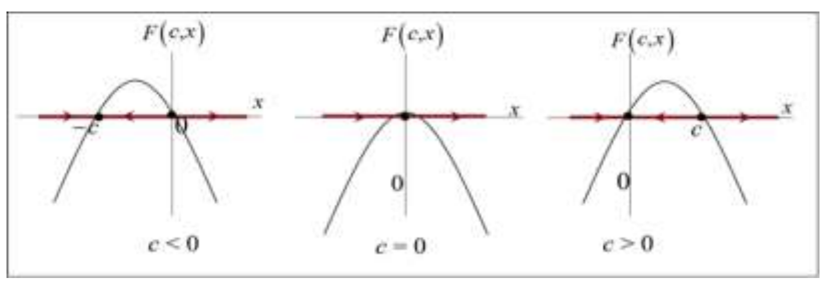
$$\dot{x} = cx - x^2 \qquad x, c \in R^1 \qquad (2.7d)$$

Titik ekuilibrium dari sistem (2.7c) adalah $x = 0$ dan $x = c$. Terdapat tiga kondisi yang memengaruhi Persamaan (2.7c), yaitu saat $c = 0, c < 0, c > 0$.

(a) Potret fase Persamaan (2.7c)

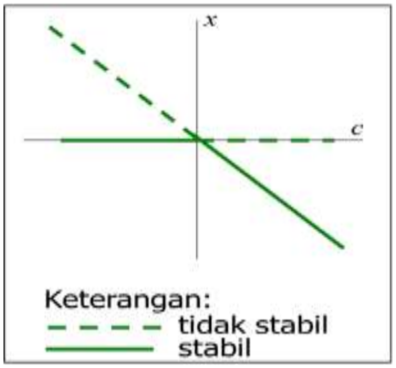


(b) Potret fase Persamaan (2.7d)

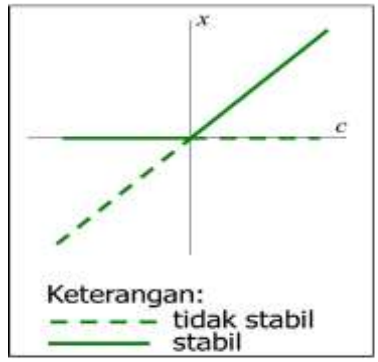


Gambar 2.4 Potret Fase Bifurkasi *Transkritical*

Berikut ini diagram bifurkasi *transkritical* Persamaan (2.7c) dan (2.7d)



) Diagram Bifurkasi (2.7c)



) Diagram bifurkasi (2.7d)

Gambar 2.5 Diagram Bifurkasi *Transcritical*

c. Bifurkasi *Hopf*

Menurut Guckeneheimer terjadinya bifurkasi *hopf* di titik ekuilibrium (x_0, c_0) ditandai dengan $D_x(f(x_0, c_0))$ mempunyai sepasang nilai eigen imajiner murni dan tidak ada nilai eigen lain dengan bagian real nol, serta memenuhi kondisi transversal yaitu $\frac{d}{dc}\left(Re\left(\lambda(c)\right)\right) \neq 0$. Bentuk normal bifurkasi *Hopf* adalah sebagai berikut (Kueznetsov, 1998: 100):

$$\dot{x} = \alpha x - y \pm x(x^2 + y^2),$$

$$\dot{x} = x + \alpha y \pm y(x^2 + y^2),$$

Atau jika diubah dalam koodinat polar adalah sebagai berikut:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$\Leftrightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y},$

$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r},$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{x\left(\alpha x - y \pm x(x^2 + y^2)\right) + y(x + \alpha y \pm y(x^2 + y^2))}{r}$$

$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{\alpha(x^2+y^2) \pm (x^2+y^2)^2}{r},$

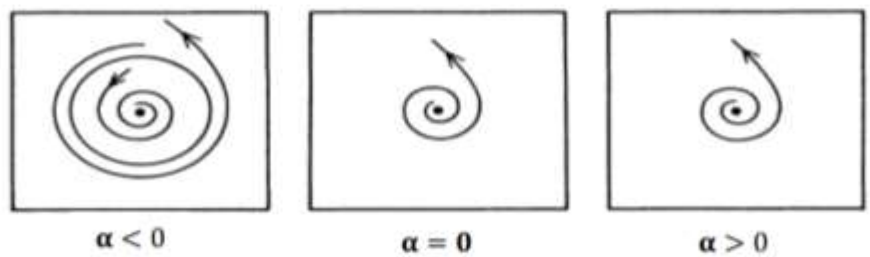
$\Leftrightarrow \dot{r} = \alpha r \pm r^3.$

Sehingga diperoleh bentuk standar bifurkasi *Hopf* pada koordinat polar yaitu,

$$\dot{r} = \alpha r + r^3 \tag{2.7e}$$

$$\dot{r} = \alpha r - r^3 \tag{2.7f}$$

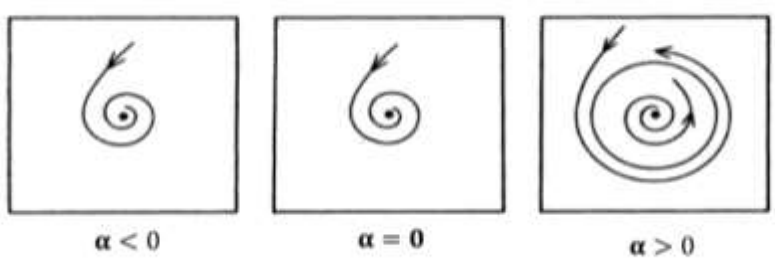
Solusi dari persamaan (2.7e) ditunjukkan pada Gambar 2.3 (Wiggins, 2003: 381)



Gambar 2.6 Solusi $\dot{r} = \alpha r + r^3$

Ketika $\alpha < 0$ maka sistem stabil asimtotik dan membentuk orbit periodik yang tidak stabil, ditunjukkan dengan ketika mengambil titik awal jauh dari titik ekuilibrium solusi menjauhi titik sedangkan ketika diambil titik awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi mendekati titik. Untuk $\alpha = 0$ dan $\alpha > 0$ maka sistem tidak stabil, ditunjukkan dengan ketika diambil titik awal, solusi menjauhi titik ekuilibrium.

Sedangkan solusi dari Persamaan (2.7f) ditunjukkan pada Gambar 2.4 (Wiggins, 2003: 381)



Gambar 2.7 Solusi $\dot{r} = \alpha r - r^3$

Ketika $\alpha < 0$ dan $\alpha = 0$ maka sistem stabil asimtotik, ditunjukkan dengan ketika diambil titik awal, solusi mendekati titik ekuilibrium. Ketika $\alpha > 0$ sistem tidak stabil dan membentuk orbit periodik yang stabil, ditunjukkan dengan ketika mengambil titik awal jauh dari titik ekuilibrium solusi mendekati titik sedangkan ketika diambil titik awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi menjauhi titik.

I. Bilangan Reproduksi Dasar

Tingkat penyebaran suatu penyakit dapat diketahui melalui suatu parameter tertentu yang digunakan untuk melihat seberapa besar potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Parameter yang dimaksud yaitu bilangan reproduksi dasar (R_0).

Bilangan ini berbeda untuk setiap penyakit dan biasanya dipengaruhi oleh jenis penyakit, keadaan masyarakat, dan kondisi lingkungan tempat penyakit berkembang. Apabila bilangan reproduksi dasar ini tinggi maka penyebaran penyakit akan meningkat, artinya penyebaran penyakit semakin berbahaya, dan endemik semakin meningkat. Bilangan reproduksi dasar merupakan parameter penentu kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model penyakit. Titik kritis R_0 berkisar 1, jika nilai $R_0 < 1$ maka banyaknya individu yang terinfeksi penyakit kemungkinan semakin berkurang atau akan hilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$, maka banyaknya individu akan terinfeksi semakin meningkat. Penentuan nilai R_0 dalam skripsi ini menggunakan metode Driessche dan Watmough (2002: 33) yaitu metode *Next Generation Matrix*.

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan sub populasi kelas terinfeksi dan y menyatakan sub populasi tidak terinfeksi. dan $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$,untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga,

$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y)$. dengan $i = 1,2,3, \dots . n$

$\dot{y} = \psi_j(x, y)$, dengan $j = 1,2,3, \dots . m$

dengan φ_i adalah matriks dari laju individu baru yang terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi, sedangkan ψ_i adalah matriks dari laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya kelas terinfeksi.

Didefinisikan *Next Generation Matrix* K, yaitu

$$K = FV^{-1} \tag{2.21}$$

dengan F, V: matriks berukuran $n\ x\ n$

$$F = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right) \quad i, j = 1,2, \dots, n \tag{2.22}$$

$$V = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}\right) \quad i, j = 1,2, \dots, n \tag{2.23}$$

Bilangan reproduksi dasar(R_0) adalah nilai eigen terbesar matriks K

$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1})$ (Diesche & Watmough, 2002).

Teorema (Diesche & Watmough, 2002: 33)

Titik ekuilibrium bebas penyakit $\bar{x}$ dari sistem $\dot{x} = f(x)$, stabil asimtotik lokal jika $R_0 = \rho(FV^{-1}) < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 = \rho(FV^{-1}) > 1$.