BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori dasar yang akan membantu pembaca dalam memahami materi yang ada dalam bab-bab selanjutnya. Teori-teori yang akan dibahas pada bab ini adalah probabilitas, variabel random, ekspektasi dan variansi, gerak Brown, persamaan diferensial stokastik, BI *rate*, tingkat penyusutan, iuran normal, kewajiban aktuaria, dan metode perhitungan aktuaria.

A. Probabilitas

Definisi 2.1 (Bain, *et al*, 1992)

Himpunan dari semua kemungkinan hasil dari sebuah eksperimen disebut sebagai ruang sampel S dari eksperimen.

Definisi 2.2 (Bain, *et al*, 1992)

Diberikan sebuah eksperimen, S adalah ruang sampel dan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kejadian yang mungkin. Sebuah fungsi yang menghubungkan bilangan riil $P(A)$ dengan setiap kejadian A dikatakan sebagai fungsi peluang dan $P(A)$ dikatakan peluang A, jika sifat-sifat tersebut terpenuhi:

$P(A) \geq 0$ untuk semua A

$P(S) = 1$ dan

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, jika $A_1, A_2, A_3, \ldots$ saling asing

B. Variabel Random (Peubah Acak)

Definisi 2.3 (Bain, *et al*,1992)

Suatu variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap kejadian e di ruang sampel S dengan tepat satu bilangan rill $X(e) = x$.

Terdapat dua jenis variabel random yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu.

Definisi 2.4 (Bain, *et al* , 1992)

Variabel random diskrit adalah himpunan semua nilai suatu variabel random yang mungkin merupakan himpunan yang berhingga dan didefinisikan pada ruang sampel diskrit.

Jika X variabel random diskrit, maka $f(x)$ merupakan fungsi peluang yang memenuhi sifat-sifat:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\sum_{x} f(x) = 1 \tag{2.1}$$

Fungsi peluang kumulatif,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{z \leq x} f(z) \tag{2.2}$$

Definisi 2.5 (Bain, *et al*, 1992)

Variabel random kontinu adalah himpunan semua nilai suatu variabel random yang mungkin merupakan himpunan yang tak berhingga dan didefinisikan pada ruang sampel kontinu.

Jika X adalah variabel random kontinu, maka $f(x)$ merupakan fungsi kepadatan peluang yang memenuhi sifat-sifat,

$$0 \leq f(x) \leq 1, -\infty < x < \infty$$

$$\int_x f(x)\, dx = 1 \tag{2.3}$$

Fungsi kepadatan peluang kumulatif dari X ditulis sebagai berikut,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\, dz \tag{2.4}$$

C. Ekspektasi dan Variansi

Definisi 2.6 (Bain, *et al*, 1992)

Jika X adalah variabel random dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xf(x), & jikaXdiskrit \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & jikaXkontinu \end{cases} \tag{2.5}$$

Teorema 2.1 Jika $f(x)$ fungsi kepadatan peluang dari variabel random X , a dan b merupakan suatu konstanta, $g(x)$ dan $h(x)$ fungsi real dengan domain elemen dari X, maka:

$$E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E[g(X)h(X)] = E[g(X)]E[h(X)] \quad (2.6)$$

Definisi 2.7 (Bain, *et al*, 1992)

Variansi dari variabel random X didefinisikan sebagai beriku:

$$Var[X] = E[(X - \mu)^2] \quad (2.7)$$

dengan $\mu = E(X)$

Teorema 2.2 (Bain, *et al*,1992) Sifat-sifat variansi dari variabel random X adalah sebagai berikut:

1. $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

   Bukti:

   $Var[X] = E[(X - \mu)^2]$

   $= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$, dimana $\mu = E(X)$

   $= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2$

   $= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2$

   $= E[X^2] - (E[X])^2$

2. $Var[aX] = a^2 Var[X]$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var[aX + b] &= E[(aX + b - a\mu - b)]^2 \\ &= E[(aX - a\mu)]^2 \\ &= E[a(X - \mu)]^2 \\ &= E[a^2(X - \mu)^2] \\ &= a^2 Var[X] \end{aligned}$$

D. Gerak Brown

Pada tahun 1827, Robert Brown seorang ahli botani meneliti gerak partikel yang tidak beraturan yang kemudian disebut dengan gerak Brown *(Brownian Motion)*. Gerak Brown merupakan suatu proses stokastik. Suatu proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ merupakan kumpulan dari variabel-variabel random $X(t)$ dengan indek t menyatakan waktu.

Definisi 2.8 (Ross, 1996) Gerak brown sering juga disebut sebagai proses Wiener adalah suatu proses stokastik $[W(t), t \geq 0]$ jika memenuhi tiga kriteria berikut ini:

1. $W(0) = 0$, dengan probabilitas satu.
2. $\{W(t), t \geq 0\}$ mempunyai kenaikan yang bebas.
3. Untuk setiap $t > 0, W(t)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi t.

Dengan kata lain suatu proses stokastik $W(t)$ mengikuti gerak Brown jika memenuhi:

1. Perubahan $W(t)$ selama periode waktu Δt adalah $\Delta W(t)$ maka hubungan $\Delta W(t)$ dan Δt sebagai berikut:

$$\Delta W(t) = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

   ε merupakan variabel random yang berdistribusi normal baku dengan mean nol dan variansi satu. Berdasarkan pengertian tersebut, maka nilai mean dari $\Delta W(t)$ adalah nol, standar deviasi dari $\Delta W(t)$ adalah $\sqrt{\Delta t}$, dan variansi dari $\Delta W(t)$ adalah Δt. Untuk sebarang t, s dengan $t - s = \Delta t$ diperoleh $W(t) - W(s)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $t - s$.
2. $W(t)$ pada interval $[0, T]$ mengalami kenaikan independen, yaitu jika diambil $\tau < s \leq t < u$ maka $W(u) - W(t)$ dan $W(s) - W(\tau)$ adalah variabel stokastik bebas *(independent stochastic variable).*
3. $W(t)$ kontinu dengan $t > 0$ merupakan fungsi kontinu dari t.

Perubahan yang kecil merupakan suatu limit yang mendekati nol, misalkan perubahan yang terjadi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ merupakan limit, maka diperoleh $\frac{dy}{dx}$. Pada waktu kontinu, gerak Brown $W(t)$ merupakan suatu limit $\Delta t \to 0$, sehingga $\Delta W(t) = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ menjadi $dW(t) = \varepsilon\sqrt{dt}$. Sehingga gerak Brown tersebut mempunyai nilai *drift rate* 0 dan variansi 1.

E. Persamaan Diferensial

Definisi 2.9 (Ross, S.L, 1984)

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel dependen berkenaan dengan satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

F. Persamaan Diferensial Stokastik

Persamaan difesrensial stokastik mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(t),t)dt + \int_0^t \sigma(X(t),t)dWt \qquad (2.8)$$

atau dapat juga dinyatakan dalam bentuk diferensialsebagai berikut,

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dWt \qquad (2.9)$$

1. Model Suku Bunga Stokastik

Model suku bunga stokastik dibagi menjadi dua model, yaitu model *equilibrium* dan model *no-arbitrage*. Model *equilibrium* merupakan model proses suku bunga stokastik berdasarkan beberapa asumsi tentang variabel ekonomi serta berproses dalam jangka pendek (Hull dan White, 1993). Tujuan dari model *equilibrium* adalah untuk mencapai keseimbangan antara tingkat penawaran obligasi dan permintaan investor. Model *equilibrium* diantaranya adalah Merton (1973), Vasicek (1977), dan CIR (1985). Sedangkan model *no-arbitage* merupakan model suku bunga stokastik tidak berdasarkan asumsi tentang variabel ekonomi. Salah satu model *no-arbitage* adalah model Black-Derman-Toy.

Terdapat juga model satu faktor dan multi faktor untuk pemodelan tingkat suku bunga. Model satu faktor hanya terdapat satu sumber resiko. Sedangkan untuk model multi faktor terdapat beberapa faktor yang kompleks. Salah satu model satu faktor adalah model Vasicek. Model satu faktor mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dWt \quad (2.10)$$

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \mu(r(t), t)dt + \int_0^t \sigma(r(t), t)dWt \quad (2.11)$$

dengan:

$r(0)$: tingkat bunga vasicek saat waktu ke-0

$r(t)$: tingkat bunga vasicek saat waktu ke-t

$\mu(r(t), t)$: *drift* dari tingkat bunga

$\sigma(r(t), t)$: volatilitas tingkat bunga

$dW(t)$: gerak Brown/ proses Wiener

Model suku bunga stokastik menunjukkan bahwa setiap selang waktu sangat kecil terdapat gerakan suku bunga yang berubah berdasarkan waktu dengan nilai perubahan yang berbeda-beda.

G. Teori Bunga

Bunga dapat dikatakan suatu betuk konpensasi dari peminjam kepada pihak yang meminjami. Bunga dapat diihat dari cara pembayaran yang dilakukan. Tedapat dua jenis bunga, yaitu bunga sederhana dan bunga majemuk. Bunga sederhana *(simple interest)* dan bunga majemuk *(compound interest)* merupakan bunga berdasarkan bagaimana cara pembayarannya.

Bunga sederhana suatu perhitungan bunga dimana jika besar pokok yang diinvestasikan pada awal suatu periode sebasar satu, maka pada akhir periode pertama jumlah yang diinvestasikan akan menjadi $(1 + i)$, pada akhir periode kedua menjadi $(1 + 2i)$, begitu seterusnya sampai akhir periode t tahun dimana i adalah besar bunga yang ditetapkan. Sehingga didapat fungsi akumulasi sebagai berikut:

$$a(t) = (1 + it), t \geq 0 \tag{2.12}$$

Bunga majemuk adalah suatu perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok periode sebelumnya ditambah dengan besar bunga. Bunga majemuk juga dapat dikatakan bunga berbunga. Misalkan besar pokok yang diinvestasikan pada awal tahun sebesar satu, dengan tingkat bunga sebesar i maka besar pokok pada akhir periode tahun pertama akan menjadi $(1 + i)$. Kemudian untuk tahun kedua menjadi $(1 + i) + i(1 + i) = (1 + i)^2$, selanjutnya demikian sampai akhir periode t tahun. Sehingga didapat fungsi akumulasi sebagai berikut:

$$a(t) = (1 + i)^t, t \geq 0 \tag{2.13}$$

Contoh 2.2

Seorang menabung sekali sebesar Rp 1.000.000,00 dengan bunga majemuk 5% per tahun. Dalam 10 tahun, berapa *future value*?

Jawab:

$$Future\ Value = Rp\ 1.000.000{,}00(1 + 0{,}05)^{10}$$

$$= Rp\ 1.628.894{,}63$$

Jadi besar dana dari uang sebesar Rp 1.000.000,00 pada tahun ke-10 menjadisebesar Rp 1.628.894,63.

H. Tingkat Bunga

Tingkat bunga *(interest rate)* ada dua macam, yaitu tingkat bunga efektif dan tingkat bunga nominal. Tingkat bunga efektif yaitu tingkat bunga yang digunakan untuk pembayaran sekali dalam setahun. Tingkat bunga efektif dinotasikan dengan r_{eff}. Tingkat bunga nominal yaitu tingkat bunga yang digunakan untuk pembayaran beberapa kali dalam setahun. Simbol untuk tingkat bunga nominal yang dibayarkan sebanyak m kali setahun adalah $r^{(m)}$, diamana m bilangan bulat positif > 1.

Hubungan tingkat bunga efektif dan tingkat bunga nominal dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$1 + r_{eff} = \left[1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right]^m \qquad (2.14)$$

Dari persamaan (2.13)dapat dihitung tingkat bunga efektif sebagai berikut:

$$r_{eff} = \left[1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right]^m - 1 \qquad (2.15)$$

Contoh 2.3:

Sebuah bank memberikan tingkat bunga sebesar 12% per tahun ($r^{(12)} = 12\%$) pada saldo tabungan nasabah. Akan dicari nilai suku bunga efektifnya.

Suku bunga efektif menggunakan persamaan (2.17) diperoleh:

$$r_{eff} = \left[1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right]^m - 1$$

$$= \left[1 + \frac{0{,}12}{12}\right]^{12} - 1$$

$$= 0{,}126825$$

Jadi besar bunga efektif per tahunnya adalah 12,6825%.

I. BI *rate*

Suku bunga yang dijadikan sebagai acuan di Indonesia adalah BI *rate*. BI *rate* merupakan suku bunga yang mencerminkan sikap atau *stance* kebijakan moneter yang ditetapkan oleh Bank Indoesia dan diumumkan kepada publik.

BI *rate* diumumkan oleh Dewan Gubernur Bank Indonesia setiap Rapat Dewan Gubernur bulanan. BI *rate* diimplementasikan pada operasi moneter yang dilakukan oleh Bank Indonesia melalui pengelolaan likuiditas *(liquidity* *management)* di pasar uang. BI *rate* keluarkan guna mencapai sasaran operasional kebijakan moneter yang dikeluarkan Bank Indonesia. Sasaran operasional kebijakan moneter dicerminkan pada perkembangan suku bunga Pasar Uang Antar Bank *Overnight* (PUAB O/N). Pergerakan suku bunga PUAB diharapkan akan diikuti oleh pergerakan suku bunga deposito, dan suku bunga kredit perbankan.

Pergerakan BI *rate* akan mempertimbangkan faktor-faktor dalam perekonomian, apabila inflasi yang diperkirakan ke depannya melampaui sasaran yang telah ditetapkan, maka Bank Indonesia akan menaikkan BI *rate*. Begitu pula sebaliknya jika inflasi yang diperkirakan dibawah sasaran, maka Bank Indonesia akan menurunkan BI *rate*.

J. Dana Pensiun

Dana Pensiun berbentuk seperti tabungan masyarakat yang merupakan tabungan jangka panjang untuk dinikmati hasilnya setelah karyawan memasuki usia pensiun. Penyelenggaraannya dilakukan dalam bentuk program pensiun, yang memberikan manfaat pensiun melalui iuran yang dibayarkan selama program pensiun. Sistem pendanaan program pensiun bertujuan untuk menjamin kelangsungan hidup karyawan setelah memasuki usia pensiun atau memasuki usia tua.

Pengertian Dana Pensiun dalam Undang-undang Republik Indonesia No. 11 Tahun 1992 Bab I Pasal 1 Ayat 1 merupakan badan hukum yang mengelola dan menjalankan program yang menjanjikan manfaat pensiun.

1. Jenis Dana Pensiun

Berdasarkan Undang-undang No. 11 Tahun 1992 Bab II Pasal 2, terdapat dua jenis Dana Pensiun berdasarkan pihak yang mendirikan, yaitu:

a. Dana Pensiun Pemberi Kerja (DPPK)

DPPK adalah dana pensiun yang dibentuk oleh orang atau badan yang memperkerjakan karyawan, selaku pendiri untuk menyelenggarakan program pensiun manfaat pasti atau program pensiun iuran pasti bagi kepentingan seluruh karyawan.

b. Dana Pensiun Lembaga Keuangan (DPLK)

DPLK adalah dana pensiun yang dibentuk oleh bank atau perusahaan asuransi jiwa untuk menyelenggarakan progran pensiun manfaat pasti atau program pensiun iuran pasti dan pelaksanaannya terpisah dari dana pensiun pemberi kerja.

2. Program Pensiun

Penyelenggaraan dana pensiun dilakukan dalam bentuk program, yaitu program pensiun. menurut Undang-undang Republik Indonesia No. 11 Tahun 1992 Bab I Pasal 1 Ayat 7 dan 8, program pensiun dibagi menjadi dua, yaitu program pensiun iuran pasti dan program pensiun manfaat pasti.

a. Program Pensiun Iuran Pasti *(Defined Contribution Plans)*

Program pensiun iuran pasti adalah program pensiun yang iurannya telah ditetapkan terlebih dahulu, tetapi manfaat pensiun yang akan diterima peserta belum dapat diketahui karena dipengaruhi beberapa faktor. Faktor-faktor yang mempengaruhi besar manfaat pensiun adalah lama peserta membayar iuran, dan kenaikan gaji. Program pensiun iuran pasti mempunyai kelebihan dan kelemahan, yaitu:

Kelebihan:

1) Iuran yang dibayarkan dari perusahaan lebih dapat diperkirakan.
2) Karyawan dapat memperhitungkan besar iuran yang harus dibayarkan setiap tahunnya.
3) Lebih mudah untuk diadministrasi.

Kelemahan:

1) Besar manfaat yang akan diterima saat pensiun sulit diperkirakan,
2) Karyawan menanggung resiko atas ketidakberhasillan investasi.

b. Program Pensiun Manfaat Pasti *(Defined Benefit Plans)*

Program pensiun manfaat pasti adalah program pensiun yang besar manfaat pensiun telah ditetapkan terlebih dahulu berdasarkan peraturan dana pensiun. Besar iuran yang dibayarkan peserta ditetapkan berdasarkan perhitungan aktuaria, dengan kata lain program pensiun manfaat pasti suatu program pensiun yang memberikan formula tertentu atas manfaat pensiun yang akan diterima saat usia pensiun. program pensiun manfaat pasti mempunyai kelebihan dan kelemahan, yaitu:

Kelebihan:

1) Lebih menekankan pada hasil akhir yang akan diterima peserta,

2) Mengingat besar manfaat dikaitkan dengan gaji karyawan, karyawan dapat menentukan besar manfaat pensiun yang akan diterima saat memasuki usia pensiun.

Kelemahan:

1) Perusahaan menanggung resiko atas kekurangan dana apabila hasil investasi tidak berrhasil,
2) Relatif lebih sulit untuk diadministrasikan.

Jenis dana pensiun yang sering digunakan oleh lembaga keuangan adalah Dana Pensiun Iuran Pasti. Lembaga keuangan telah menetapkan besar iuran yang harus dibayarkan peserta sesuai peraturan dana pensiun. Manfaat pensiun yang nantinya akan diterima peserta tergantung pada besar iuran yang ditetapkan oleh pihak lembaga keuangan.

3. Manfaat Pensiun

Menurut Undang-undang No. 11 Tahun 1992 Bab 1 Pasal 1 Ayat 9, manfaat pensiun adalah pembayaran berkala yang dibayarkan pada peserta saat usia pensiun dan diatur dalam peraturan Dana Pensiun. manfaat pensiun dibagi menjadi 4, yaitu manfaat pensiun normal, manfaat pensiun dipercepat, manfaat pensiun ditunda, dan manfaat pensiun cacat.

a. Manfaat pensiun normal adalah manfaat pensiun yang akan diterima peserta saat mencapai usia pensiun normal yang telah ditetapkan.
b. Manfaat pensiun cacat adalah manfaat pensiun yang akan diterima peserta bila peserta mengalami cacat.

c. Manfaat pensiun ditunda adalah manfaat pensiun bagi peserta yang berhenti bekerja sebelum memasuki usia pensiun normal, yang ditunda pembayarannya sampai peserta pensiun sesuai dengan peraturan Dana Pensiun.

d. Manfaat pensiun dipercepat adalah manfaat pensiun yang akan diterima peserta pada usia tertentu sebelum usia pensiun normal.

4. Iuran Normal (Iuran Pensiun)

Iuran normal merupakan iuran yang dibayarkan peserta kepada pihak penanggung atau pengelola dana pensiun dalam satuan waktu yang telah ditentukan. Secara umum, iuran normal dibayarkan guna memenuhi biaya manfaat pensiun yang akan diterima saat mencapai usia pensiun. Besar iuran normal yang dibayarkan peserta program pensiun dapat dipengaruhi oleh presentasi gaji yang dipungut setiap tahunnya.

K. Metode Dana Pensiun

Metode perhitungan aktuaria program pensiun manfaat pasti terdiri dari tiga metode yaitu, metode *accrued benefit*, metode *benefit prorate*, dan metode *cost prorate* (Winklevoss, 1993).

1. Metode *Accrued Benefit*

Metode *accrued benefit* merupakan metode perhitungan aktuaria yang besar manfaat pensiunnya ditentukan oleh program pensiun dan digunakan ketika besar manfaat tahunan adalah jumlah penghasilan tetap dari gaji tahunan peserta saat ini. Iuran normal pada metode *accrued benefit* meningkat berdasarkan manfaat program peserta sepanjang tahun tersebut, dikalikan dengan seluruh anuitas hidup yang dimulai pada saat pensiun dan didiskontokan atas bunga dan kemungkinan pensiun.

2. Metode *Benefit Prorate*

Metode *benefit prorate* didefinisikan sebagai nilai sekarang manfaat pensiun yang akan datang *(present value of future benefit)* dialokasikan secara merata untuk setiap masa kerja. Dengan kata lain, nilai sekarang dari manfaat pensiun yang akan datang dibagi dengan total masa kerja.

Terdapat dua metode yang digunakan untuk menentukan kewajiban aktuaria dan iuran normal pada metode *benefit prorate*, yaitu *constant dollar* dan *constant percent*. Metode *constant dollar* menetapkan nilai sekarang manfaat pensiun *(present value of future benefit/ PVFB)* untuk setiap tahun masa kerja dalam jumlahan tetap. Metode *constant dollar* biasanya digunakan oleh program pensiun dimana manfaat tidak berdasarkan gaji. Sedangkan metode *constant percent* menunjukkan iuran normal setiap tahunnya menggunakan persentase gaji konstan dari tahun ke tahun. Selain itu, metode *constant percent* digunakan dengan rumus manfaat rata-rata karir dan rata-rata gaji terakhir.

3. Metode *Cost Prorate*

Metode *cost prorate* merupakan metode perhitungan aktuaria yang menunjukkan nilai manfaat pensiun berdasarkan jasa yang telah diberikan karyawan sampai dengan tanggal perhitungan aktuaria. Metode ini mengalokasikan besar manfaat pensiun secara merata selama masa kerja. Metode *cost prorate* terdiri dari dua metode yang sama dengan metode *benefit prorate*, yaitu *constant dollar* dan *constant percent*.

L. Tabel Penyusutan *(Decrement Table)*

1. Tabel Mortalita *(Single Decrement)/ Life Table*

Penyusutan *(decrement)* adalah berkurangnya anggota kelompok karena suatu faktor penyebab. Tabel mortalita adalah yang digunakan untuk memprediksi pola kematian yang ditunjukkan sekelompok individu (Promislow, 2006: 37). Misalkan, l_x adalah jumlah orang yang tepat berusia x dan $d_x$adalah jumlah orang yang berusia x meninggal sebelum berusia $x+1$ tahun, maka hubungan yang didapat adalah (Sembiring, 1986),

$$l_{x+1} = l_x - d_x \tag{2.16}$$

Untuk menghitung peluang seseorang berusia x akan hidup (paling sedikit) sampai n tahun, dapat dirumuskan sebagai berikut (Promislow, 2006 : 38):

$$_n p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{2.17}$$

Sedangkan untuk mencari peluang seseorang berusia x akan meninggal dalam n tahun atau sebelum mencapai usia $n+x$ dinotasikan dengan $_n q_x$ (Sembiring, 1986)

$$_n q_x = 1 - {}_n p_x \tag{2.18}$$

Tabel mortalita akan disajikan pada lampiran 1 dan 2 yang memuat x, l_x, N_x, dan D_x.

2. Tabel Penyusutan Jamak *(Multiple Decrement Table)*

Tabel penyusutan jamak merupakan perluasan dari tabel mortalita. Jika tabel mortalita hanya memuat satu faktor penyebab penyusutan yaitu kematian, maka pada tabel penyusutan jamak merupakan tabel penyusutan yang memuat lebih dari satu faktor penyebab. Misalkan, terdapat sebanyak m penyebab penyusutan dan:

$l_x^{(T)}$: jumlah orang yang bertahan sampai usia x dan mengalami penyusutan yang disebabkan oleh faktor penyebab $1,2,3,\dots,m$.

$d_x^{(T)}$: jumlah orang yang mengalami penyusutan antara usia x dan $x+1$ yang diakibatkan oleh faktor penyebab $1,2,3,\dots,m$.

$d_x^{(j)}$: jumlah orang yang mengalami penyusutan antara usia x dan $x+1$ yang diakibatkan oleh faktor penyebab j.

j : empat faktor penyebab yaitu dikarenakan pensiun normal, cacat, pengunduran diri, dan kematian.

Maka jumlah orang yang akan mengalami penyusutan dikarenakan m faktor penyebab antara usia x sampai $x+1$ adalah:

$$d_x^{(T)} = d_x^{(1)} + d_x^{(2)} + \cdots + d_x^{(m)} \qquad (2.19)$$

$$d_x^{(T)} = \sum_{j=1}^{m} d_x^{(j)} \qquad (2.20)$$

Sedangkan untuk jumlah orang yang akan bertahan pada usia $x+1$ adalah:

$$l_{x+1}^{(T)} = l_x^{(T)} - d_x^{(T)} \tag{2.21}$$

Peluang orang akan keluar dari sekelompok orang-orang berusia x yang disebabkan oleh faktor penyebab j dinotasikan dengan $q_x^{(j)}$, maka

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.22}$$

Menggunakan persamaan (2.22) peluang orang akan keluar saat usia x yang disebabkan oleh m faktor penyebab penyusutan, dimana

$$q_x^{(T)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + \cdots + q_x^{(m)} \tag{2.23}$$

adalah:

$$q_x^{(T)} = \frac{d_x^{(1)}}{l_x^{(T)}} + \frac{d_x^{(2)}}{l_x^{(T)}} + \cdots + \frac{d_x^{(m)}}{l_x^{(T)}}$$

$$q_x^{(T)} = \frac{d_x^{(1)} + d_x^{(2)} + \cdots + d_x^{(m)}}{l_x^{(T)}}$$

$$q_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.24}$$

Berdasarkan persamaan (2.21) dan (2.24), diperoleh:

$$q_x^{(T)} = \frac{l_x^{(T)} - l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.25}$$

Peluang orang berusia x akan bertahan di dalam sekelompok orang-orang paling sedikit satu tahun dinotasikan dengan $p_x^{(T)}$, dimana

$$p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)} \tag{2.26}$$

Menurut persamaan (2.25), maka

$$p_x^{(T)} = 1 - \frac{l_x^{(T)} - l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$$p_x^{(T)} = \frac{l_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} - \frac{l_x^{(T)} - l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$$p_x^{(T)} = \frac{l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.27}$$

Sedangkan untuk ${}_n p_x^{(T)}$ yaitu peluang orang berusia x akan bertahan dari sekelompok orang-orang berusia x sampai $x+n$ dan ${}_n q_x^{(T)}$ adalah peluang orang berusia x akan keluar dari sekelompok orang-orang berusia x sampai $x+n$, dapat dirumuskan dari persamaan (2.27) diperoleh,

$${}_n p_x^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.28}$$

dan,

$${}_n q_x^{(T)} = 1 - {}_n p_x^{(T)}$$

$${}_n q_x^{(T)} = 1 - \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$$ {}_{n}q_{x}^{(T)} = \frac{l_{x}^{(T)}}{l_{x}^{(T)}} - \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_{x}^{(T)}} $$

$$ {}_{n}q_{x}^{(T)} = \frac{l_{x}^{(T)} - l_{x+n}^{(T)}}{l_{x}^{(T)}} \tag{2.29} $$

Misal dalam suatu program pensiun, diketahui seorang akan pensiun pada usia 56 tahun dan usia masuk peserta program pensiun adalah 25 tahun. Jika usia karyawan saat ini adalah 28 tahun, maka peluang karyawan akan bekerja sampai usia pensiun dapat dituliskan dengan ${}_{56-28}p_{28}^{(T)} = {}_{28}p_{28}^{(T)}$.

Tabel penyusutan jamak yang digunakan salah satunya adalah *service table* (tabel pelayanan). *Service table* digunakan dalam perhitungan program pensiun. *Service table* mempunyai empat penyebab penyusutan, yaitu penyusutan dikarenakan kematian, cacat, pensiun dipercepat dan pensiun normal. Lebih jelasnya *service table* dapat dilihat pada lampiran 3.

M. Simbol Komutasi

Simbol komutasi digunakan untuk memudahkan dalam perhitungan aktuaria dan dibuat berdasarkan tabel mortalita dan tingkat bunga dengan usia tertinggi adalah n. Terdapat enam simbol komutasi sebagai berikut (Sembiring, 1986):

$$ D_x = v^x l_x $$

$$ N_x = \sum_{i=1}^{n} D_{x+i} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_n $$

$$ S_x = \sum_{i=1}^{n} N_{x+i} = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots + N_n $$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i+1) D_{x+i} = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots + (n+1) D_n$$

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} C_{x+i} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_n$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} M_{x+i} = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i+1) M_{x+i} = C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots + (n+1) C_n$$

Simbol komutasi tersebut dapat digunakan untuk semua nilai x.

N. Fungsi Anuitas

Anuitas merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan pada jangka waktu tertentu (Kellison, S, G, 1991). Pembayaran anuitas dapat dilakukan secara bulanan, kurtal, semester, maupun tahunan. Pembayaran anuitas yang dilakukan pada awal periode disebut anuitas awal *(annuity-due)*, dan pembayaran yang dilakukan di akhir periode disebut anuitas akhir *(annuity-immediate).*

Anuitas dibedakan menjadi dua, yaitu anuitas tentu *(annuity certain)* dan anuitas hidup *(life annuity).*

1. Anuitas Tentu *(Annuity Certain)*

Anuitas pasti adalah anuitas yang pembayarannya pasti untuk jangka waktu tertentu. Misal pembayaran kredit rumah, pembayarannya pasti selama jangka waktu yang telah ditentukan.

a. Anuitas Akhir

Anuitas akhir sebesar Rp 1,00 dibayarkan pada akhir periode selama n periode dengan bunga tahunan sebesar i. Nilai sekarang (present value) dari anuitas akhir dinotasikan dengan $a_{\bar{n}|}$. Nilai ini dibayarkan diawal untuk mendapatkan pembayaran sebesar Rp 1,00 tiap akhir periode selama n periode. Sedangkan untuk nilai akumulasi yang akan datang dari anuitas dinotasikan dengan $s_{\bar{n}|}$. Nilai sekarang pembayaran sebesar Rp 1,00 pada akhir tahun pertama adalah v, pada akhir tahun kedua adalah adalah v^2, dan seterusnya sampai periode terakhir n adalah v^n . Jadi didapat nilai sekarang anuitas akhir yaitu:

$$a_{\bar{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n \tag{2.30}$$

$$= v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right)$$

dengan $v = \frac{1}{1-i}$, maka

$$= v\left(\frac{1 - v^n}{iv}\right)$$

$$= \frac{1 - v^n}{i} \tag{2.31}$$

Nilai akumulasi anuitas akhir pembayaran Rp 1,00 dibayarkan pada akhir periode pertama adalah $(1 + i)^{n-1}$, pada akhir periode kedua adalah $(1 + i)^{n-2}$, dan seterusnya sampai akhir periode n.

$$s_{\bar{n}|} = (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \cdots + (1 + i) + 1 \tag{2.32}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

dengan $v = \frac{1}{1-i}$, maka

$$= \frac{(v^{-n} - 1)}{i} \qquad (2.33)$$

Dari persamaan (2.31) dan (2.33), diperoleh

$$a_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \qquad (2.34)$$

Contoh 2.4

Carilah nilai sekarang dari suatu anuitas yang membayar Rp 2.000.000,00 setiap6 bulan selama 10 tahun dengan suku bunga 8%.

Jawab:

Dengan persamaan (2.31) diperoleh:

$$2.000.000{,}00 a_{\overline{20}|0{,}04} = 2.000.000{,}00 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20}}{0{,}04}$$

$$= 27.180.652{,}69$$

Jadi jika dalam waktu sekarang membayar uang sebesar Rp 2.000.000,00, maka nilai sekarang dalam 10 tahun adalahRp 27.180.652,69.

b. Anuitas Awal

Anuitas awal disebut juga dengan anuitas jatuh tempo *(anuity-due)*. Nilai sekarang anuitas awal dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\bar{n}|}$. Nilai ini adalah nilai yang dibayarkan untuk mendapatkan pembayaran sebesar Rp 1,00 tiap awal periode selama n periode. Sedangkan nilai akumulasi yang akan datang anuitas awal dinotasikan dengan $\ddot{s}_{\bar{n}|}$. Nilai sekarang dari pembayaran sebesar Rp 1,00 pada awal periode pertama adalah 1, pada awal periode kedua adalah v, dan pada periode terakhir n adalah v^{n-1}. Nilai sekarang anuitas awalnya yaitu:

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} \tag{2.35}$$

$$= \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$= \frac{1 - v^n}{iv} \tag{2.36}$$

Untuk nilai akumulasi anuitas awal selama n periode yaitu:

$$\ddot{s}_{\bar{n}|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n \tag{2.37}$$

$$= (1 + i)\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1}$$

$$= \frac{(1 + i)^n - 1}{iv} \tag{2.38}$$

Berdasarkan persamaan (2.36) dan (2.38) diperoleh,

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n-1}|} + 1 \tag{2.39}$$

Contoh 2.5

Pada tahun 2010 seorang karyawan mulai mengikuti program pensiun, dan memutuskan untuk menabung sebesar X rupiah tiap awal tahun. Program pensiun sampai tahun 2030, dan pada tahun 2030 jumlah tabungannya sebesar Rp 200.000.000,00. Jika suku bunga efektif $i = 0{,}065$, berapa besar uang yang harus disetorkan setiap tahunnya?

Jawab:

$$X\,\ddot{s}_{\overline{n}|} = Rp\ 200.000.000{,}00$$

$$X\,\frac{(1+0{,}065)^{20}-1}{0{,}065/(1+0{,}065)} = Rp\ 200.000.000{,}00$$

$$X\,\frac{(1{,}065)^{20}-1}{0{,}065/(1{,}065)} = Rp\ 200.000.000{,}0$$

$$X\,(41{,}34895) = Rp\ 200.000.000{,}0$$

$$X = \frac{Rp\ 200.000.000{,}0}{41{,}34895}$$

$$X = 4.836.881{,}80$$

Jadi uang yang ditabungkan karyawan pada tiap awal tahun sebesar Rp 4.836.881,80.

2. Anuitas Hidup *(Life Annuity)*

Anuitas hidup adalah adalah anuitas yang dibayarkan selama orang tersebut masih hidup. Jadi anuitas hidup yang pembayarannya dikaitkan dengan hidup matinya seseorang. Misalkan, seorang pensiunan akan terus menerima uang pensiun, dan akan berhenti menerima dana pensiun ketika sudah meninggal.

Anuitas hidup akhir seumur hidup merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan tiap akhir tahun. Pembayaran pertama dilakukan satu tahun kemudian, pembayaran kedua adalah dua tahun kemudian, dan seterusnya, dengan pembayaran tergantung pada hidup matinya sesorang. Jika besar pembayaran setiap tahunnya adalah Rp 1,00 dan usia seseorang adalah x tahun, maka nilai tunai anuitas hidup akhir seumur hidupnya dinotasikan dengan a_x adalah (Larson & Gaumnitz, 1951):

$$a_x = vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \cdots + v^{n-x}\ {}_{n-x}p_x$$

$$= v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-x}\frac{l_n}{l_x}$$

$$= \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots + v^{n-x} l_n}{l_x}$$

$$= \left(\frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots + v^{n-x} l_n}{l_x}\right)\frac{v^x}{v^x}$$

$$= \frac{1}{v^x l_x}(v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \cdots + v^n l_n)$$

$$= \frac{1}{D_x}(D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_n)$$

$$= \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{2.40}$$

Anuitas hidup awal seumur hidup merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan setiap awal tahun. Pembayaran pertama dilakukan pada tahun sekarang, pembayaran kedua dilakukan satu tahun kemudian, pembayaran ketiga dilakukan dua tahun kemudian, dan seterusnya tergantung pada hidup matinya seseorang. Jika besar pembayaran tiap tahun sebesar Rp 1,00 dan seorang berusia x tahun. Nilai tunai anuitas awal seumur hidup dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$. Perbedaan anuitas hidup akhir seumur hidup dan anuitas hidup awal seumur hidup pada pembayaran pertama yang dilakukan segera pada tahun tersebut pada anuitas hidup awal seumur hidup, sehingga didapat hubunga sebagai berikut:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \tag{2.41}$$

O. Asumsi Aktuaria

Asumsi aktuaria digunakan untuk menghitung iuran normal dan kewajiban aktuaria. Menurut Keputusan Menteri Keuangan No. 343/ KM.017/ 1998, asumsi aktuaria adalah kumpulan dari estimasi perubahan dimasa yang akan datang, dan digunakan untuk mencari nilai sekarang suatu pembayaran di masa depan. Asumsi aktuaria mencakup antara lain tentang tingkat bunga, tingkat probabilitas terjadinya kematian dan cacat, tingkat kenaikan gaji.

Terdapat tiga asumsi aktuaria yang berhubungan dengan program pensiun, yaitu asumsi penyusutan aktuaria *(decrement assumption)*, asumsi tungkat bunga *(interest assumption)*, dan asumsi kenaikan gaji *(salary assumption)* (Winklevoss, 1993).

1. Asumsi Penyusutan Aktuaria *(Decrement Assumption)*

Peserta program pensiun dibedakan menjadi dua, yaitu peserta pensiun aktif dan peserta pensiun pasif. Peserta pensiun aktif tidak akan terhindardari kemungkinan kematian, cacat, pengunduran diri, dan pensiun normal. Sedangkan untuk peserta program pensiun pasif besar kemungkinan mengalami kemungkinan kematian. Kemungkinan-kemungkinan tersebut dipertimbangkan dengan tingkat penyusutan aktuaria *(rates of decrement)* dan disajikan dalam tabel penyusutan. Pelaksanaan program pensiun menggunakan tabel penyusutan jamak, karena faktor yang dapat dialami pada program pensiun tidak hanya tunggal (satu). Berdasarkan persamaan (2.20) faktor penyusutan yang mungkin terjadi dikarenakan oleh m faktor penyebab. Perhitungan probabilitas peserta aktif program pensiun dapat ditentukan menggunakan tabel pelayanan *(service table)*.

2. Asumsi Gaji *(Salary Assumption)*

Program pensiun mempunyai nilai manfaat yang berkaitan dengan gaji pegawai, maka diperlukan perumusan untuk mengestimasi gaji dimasa mendatang. Akumulai gaji peserta selama memasuki usia pensiun yaitu y tahun sampai $x-1$ tahun dengan s_t merupakan besar gaji pada saat waktu t tahun dirumuskan sebagai berikut:

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} s_t \qquad (2.42)$$

Apabila peserta memperoleh kenaikan gaji sebesar e setiap tahun, maka besar gaji saat usia x adalah:

$$s_x = s_y(1+e)^{(x-y)} \tag{2.43}$$

maka akumulasi gaji dari tahun masuk y sampai x tahun dengan kenaikan gaji e setiap tahunnya adalah:

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} s_y(1+e)^{(t-y)} \tag{2.44}$$

Contoh 2.6:

Seorang pegawai masuk kerja sekaligus mengikuti program dana pensiun saat usia 36 tahun ($y = 36$), dan akan pensiun pada usia 56 tahun ($x = 56$). Gaji pegawai sebesar Rp 24.000.000,00 pertahun, dan akan mengalami kenaikan setiap tahunnya sebesar 5%. Maka besar akumulasi gaji peserta saat memasuki usia pensiun akan dihitung dengan menggunakan persamaan (2.44), diperoleh:

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} s_y(1+e)^{(t-y)}$$

$$S_{56} = \sum_{t=36}^{55} s_{36}(1+0{,}05)^{(t-36)}$$

$$S_{56} = \sum_{t=36}^{55} (\text{Rp } 24.000.000{,}00)(1+0{,}05)^{(t-36)}$$

$$= Rp\ 793.582.898{,}50$$

Jadi besar gaji pegawai selama bekerja adalah sebesar Rp 793.582.898,50.

3. Asumsi Tingkat Bunga *(Interest Assumption)*

Fungsi tingkat suku bunga digunakann untuk mendiskontokan pembayaran masa yang akan datang untuk waktu sekarang (Winklevoss, 1993). Tingkat bunga disumsikan konstan yaitu i selama n tahun, maka faktor diskonto selama n tahun dapat dihitung dengan persamaan (2.13):

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} \tag{2.45}$$

Contoh 2.7

Seorang akan menerima uang 10 tahun yang akan datang sebesar Rp 5.000.000,00. Diasumsikan tingkat bunga sebesar 5%. Jika uang tersebut akan diambil diwaktu sekarang, maka dengan menggunakan persamaan (2.45) dihitung nilai uang di waktu sekarang yaitu,

$$Present\ Value = Rp\ 5.000.000{,}00 \times \frac{1}{(1+5\%)^{10}}$$

$$= Rp\ 3.069.566{,}26$$

Jadi nilai uang yang akan diterima di waktu sekarang adalah sebesar Rp 3.069.566,26

P. Fungsi Manfaat

Fungsi manfaat digunakan untuk menentukan besar manfaat yang akan diterima peserta saat memasuki usia pensiun. Manfaat pensiun yang harus dibayar dilambangkan dengan B_x. B_x adalah total yang dibayarkan dari usia y sampai usia

$x-1$ tahun. Fungsi ini disebut dengan fungsi akumulasi manfaat, ditulis sebagai berikut:

$$B_x = \sum_{t=y}^{x-1} b_t \tag{2.46}$$

Terdapat tiga jenis rumus manfaat pensiun yang digunakan dalam perhitungan program pensiun manfaat pasti yaitu (Winklevoss, 1993):

1. **Penghasilan tetap *(flat dollar)***

   Besar manfaat pensiun penghasilan tetap yang dibayarkan sama untuk setiap tahunnya, sehingga akumulasi manfaat pensiunnya merupakan perkalian lama masa kerja dengan b_x yaitu besar gaji saat usia x, dirumuskan sebagai berikut:

$$B_x = (x-y)b_x \tag{2.47}$$

2. **Rata-rata karir *(career average)***

   Rumus manfaat pensiun rata-rata karir merupakan rumus manfaat pensiun dimana besar manfaat yang dibayarkan setiap tahunnya berdasarkan presentase tetap dari rata-rata gaji karyawan selama satu tahun.

$$b_x = ks_x \tag{2.48}$$

$$B_x = k\sum_{t=y}^{x-1} s_t$$

$$= kS_x \tag{2.49}$$

   Dimana k adalah proporsi gaji selama satu tahun yang dibayarkan sebagai manfaat pensiun.

3. **Rata-rata gaji terakhir *(final average)***

Penentuan besar manfaat pensiun berdasarkan rata-rata gaji selama beberapa tahun terakhir. Misalkan n adalah banyak tahun dari gaji peserta sebelum pensiun yang dirata-rata dan k adalah proporsi gaji rata-rata satu tahun. Diasumsikan bahwa pensiun terjadi di awal usia r, maka besar manfaat saat usia r tahun adalah:

$$B_r = k(r-y)\frac{1}{n}\sum_{t=y}^{r-1} s_t \tag{2.50}$$

atau,

$$B_r = k(r-y)\frac{1}{n}(S_r - S_{r-n}) \tag{2.51}$$

Sedangkan B_x merupakan rumus manfaat yang tergantung pada rata-rata gaji peserta saat ini usia x tahun:

$$B_x = k(x-y)\frac{1}{n}(S_x - S_{x-n}) \tag{2.52}$$

Q. Iuran Normal

Iuran normal merupakan iuran yang harus dibayarkan setiap tahun oleh pekerja aktif sampai akhir masa kerja. Pembayaran iuran normal digunakan untuk memenuhi manfaat pensiun yang nantinya akan diterima peserta saat memasuki usia pensiun. Persamaan umun dari iuran normal manfaat pensiun peserta berusia x tahun dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$^{r}(NC)_x = b_x \ddot{a}_r v^{r-x}\,{}_{r-x}p_x^{(T)} \tag{2.53}$$

dengan:

${}^{r}(NC)_x$: besar iuran normal yang dibayarkan saat usia x tahun.

b_x : besar manfaat saat usia x tahun.

$\ddot{a}_r$: nilai tunai anuitas awal seumur hidup yang pembayarannya dimulai saat usia pensiun normal n tahun.

v^{r-x} : faktor diskonto dari usia peserta x tahun sampai usia pensiun normal r tahun.

${}_{r-x}p_x^{(T)}$: peluang peserta berusia x akan bekerja sampai usia pensiun normal r tahun.

R. Kewajiban Aktuaria *(Actuarial Liability)*

Menurut Keputusan Menteri Keuangan No. 510/ KMK.06/ 2002, kewajiban aktuaria adalah kewajiban lembaga program pensiun yang dihitung berdasarkan anggapan bahwa kewajiban kepada peserta atau pihak yang menerima akan terus berlangsung sampai terpenuhinya hak peserta. Kewajiban aktuaria sama dengan nilai sekarang (present value) dari manfaat yang dialokasikan setiap tahun selama masa kerja, didefinisikan sebagai berikut (Winklevoss, 1993; 72):

$$ {}^{r}(AL)_x = B_x \ddot{a}_r v^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \tag{2.54} $$

dengan:

${}^{r}(AL)_x$: kewajiban aktuaria peserta aktif yang berusia x tahun, dengan pensiun normal r tahun.

B_x : besar manfaat pensiun peserta yang berusia x tahun, berdasarkan metode perhitungan aktuaria yang dipakai.

$\ddot{a}_r$: nilai tunai anuitas awal seumur hidup yang pembayarannya dimulai saat usia pensiun normal n tahun.

v^{r-x} : faktor diskonto dari usia peserta x tahun sampai usia pensiun normal r tahun.

${}_{r-x}p_x^{(T)}$: peluang peserta berusia x akan bekerja sampai usia pensiun normal r tahun.

Persamaan (2.54) dapat diartikan bahwa saat sekarang telah terkumpul manfaat sebesar B_x yang akan diberikan saat peserta memasuki usia pensiun normal r tahun yang mempunyai nilai sekarang pada saat usia x tahun sebesar ${}^{r}(AL)_x$. Dengan kata lain, kewajiban aktuaria merupakan dana yang harus tersedia saat ini oleh lembaga program pensiun untuk membayar nilai manfaat pensiun B_x pada peserta berusia x tahun.

S. *Present Value of Future Benefit (PVFB) = Present Value of Future Normal Cost (PVFNC)*

Secara umum, iuran normal digunakan untuk memenuhi nilai sekarang manfaat yang akan datang sepanjang masa kerja dari usia y sampai usia pensiun r tahun $\left[{}^{r}(PVFB)_y\right]$. Jadi nilai sekarang iuran normal yang dibayarkan pada usia $y$sampai usia pensiun r tahun $\left[{}^{r}(PVFNC)_y\right]$ akan sama dengan ${}^{r}(PVFB)_y$.

Diasumsikan iuran normal dibayarkan saat usia mulai y tahun sampai satu tahun sebelum mencapai usia pensiun r tahun.:

$$^{r}(PVFB)_{y} = {}^{r}(PVFNC)_{y} \tag{2.55}$$

dengan,

$$^{r}(PVFNC)_{y} = \sum_{t=y}^{r-1} {}^{r}(NC)_{t}\, v^{t-y}\, {}_{t-y}p_{y}^{(T)} \tag{2.56}$$

maka,

$$^{r}(PVFB)_{y} = \sum_{t=y}^{r-1} {}^{r}(NC)_{t}\, v^{t-y}\, {}_{t-y}p_{y}^{(T)}$$

menggunakan persamaan (2.53), maka

$$^{r}(PVFB)_{y} = \sum_{t=y}^{r-1} (b_x \ddot{a}_r v^{r-x}\, {}_{r-x}p_{x}^{(T)})\, v^{t-y}\, {}_{t-y}p_{y}^{(T)}$$

Dengan persamaan (2.46) diperoleh:

$$^{r}(PVFB)_{y} = \left(\sum_{t=y}^{r-1} b_x\right) \ddot{a}_r v^{r-x}\, {}_{r-x}p_{x}^{(T)} v^{t-y}\, {}_{t-y}p_{y}^{(T)}$$

$$^{r}(PVFB)_{y} = B_r \ddot{a}_r \frac{v^r}{v^x}\, {}_{r-x}p_{x}^{(T)} \frac{v^t}{v^y}\, {}_{t-y}p_{y}^{(T)}$$

$$^{r}(PVFB)_{y} = B_r \ddot{a}_r \frac{v^r}{v^y}\, {}_{r-y}p_{y}^{(T)} \tag{2.63}$$

Terbukti bahwa persamaan (2.55) benar. Sehingga benar bahwa iuran normal yang dibayarkan selama masa kerja memenuhi nilai sekarang manfaat pensiun yang akan datang selama periode usia y sampai r tahun.

T. Mean Absolute Error (MAE)

Mean Absolute Error (MAE) adalah salah satu metode tingkat pengukuran keakuratan. Nilai *MAE* merepresentasikan rata-rata *error* absolut antara hasil peramalan dengan nilai sebenarnya. Secara matematis dirumuskan sebagai berikut:

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f_i - y_i| \qquad (2.64)$$

dimana,

f_i : nilai hasil peramalan

y_i : nilai sebenarnya

n : banyaknya data