BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai landasan teori yang akan digunakan pada bab pembahasan. Materi-materi yang akan dibahas yaitu pemodelan matematika, teorema Taylor, nilai eigen, vektor eigen, diagonalisasi, sistem dinamik, kestabilan titik ekuilibrium, bifurkasi, persamaan *Center Manifold*, dan bilangan reproduksi dasar.

A. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang digunakan untuk merepresentasi dan menjelaskan masalah pada dunia nyata dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari masalah dunia nyata menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses pemodelan ini disebut model matematika. Model matematika digunakan dalam berbagai disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda, misalnya fisika, kedokteran, jaringan komputer dan bisnis. Penyusunan model matematika dilakukan dengan beberapa tahap, yaitu :

1. Menyatakan masalah dunia nyata ke dalam pengertian matematika. Langkah ini meliputi identifikasi variabel dan sistem kemudian menjabarkannya menjadi model.
2. Mengkonstruksi kerangka dasar model. Langkah ini meliputi membuat asumsi tentang model. Asumsi ini secara esensial mencerminkan bagaimana cara

berpikir sehingga model dapat berjalan. Oleh karena itu, jika model dapat terselesaikan, hasilnya hanya sevalid asumsi.

3. Memformulasikan persamaan berdasarkan asumsi dan hubungan antar variabel.
4. Menyelesaikan sistem persamaan. Pada beberapa kasus, sistem persamaan yang dibentuk dapat diselesaikan atau memiliki lebih dari satu penyelesaian, namun penyelesaian suatu sistem tidak selalu dapat dilakukan, pada beberapa kasus ada keadaan dimana sistem tersebut tidak dapat diselesaikan atau tidak memiliki penyelesaian.
5. Interpretasi hasil. Langkah ini akan menghubungkan formulasi matematika kembali ke problem dunia nyat (Widowati & Sutimin, 2007: 3-4).

B. Teorema Taylor

Teorema Taylor akan digunakan untuk menentukan nilai koefisien pada persamaan *center manifold*.

Teorema 1 (Bartle & Sherbert, 2011: 189)
Diberikan $n \in \mathbb{N}$ dan $I = [a, b]$. Terdapat $f: I \to \mathbb{R}$, sedemikian sehingga f dan turunan dari f yaitu $f', f'', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$, maka untuk setiap x di dalam I terdapat titik c diantara x dan x_0 sedemikian sehingga

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Bukti :

Diberikan x_0 dan x, dan interval tertutup $J = [\, x_0, x\,]$. Fungsi F pada J didefinisikan sebagai

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t), \qquad t \in J \quad (1).$$

Turunan dari persamaan (1) yaitu

$$F'(t) = -f'(t) - \left(-f'(t) + (x-t)f''(t)\right) - \cdots$$

$$- \frac{1}{n!}\left(-n(x-t)^{(n-1)}f^{(n)}(t) + (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\right)$$

$$= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \qquad (2).$$

Kemudian didefinisikan G pada J sebagai

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0) \qquad (3)$$

dengan $t \in J$ dan $G(x_0) = G(x) = 0$. Berdasarkan persamaan (3), untuk titik c diantara x_0 dan x turunannya adalah

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0)$$

$$F(x_0) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} F'(c) \qquad (4).$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (4), didapat

$$F(x_0) = \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Jadi Teorema 1 terbukti.

Jika $P_n(x)$ menyatakan polinomial taylor n dan $R_n(x)$ menyatakan sisa, maka persamaan (1) dapat ditulis sebagai $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ untuk c diantara x_0 dan x (Bartle & Sherbert, 2011: 189-190).

C. Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Diagonalisasi

Nilai eigen akan digunakan untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium dari sistem dan vektor eigen akan digunakan untuk menentukan transformasi dari sistem.

Definisi 1 (Anton & Rorres, 2000: 384)
Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, yang dinyatakan sebagai

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{5}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$, maka persamaan (5) dituliskan kembali sebagai

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} \qquad (6).$$

Berdasarkan persamaan (6), λ merupakan nilai eigen jika terdapat solusi taknol untuk persamaan (6), kemudian persamaan (6) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$det(\lambda\boldsymbol{I} - A) = 0 \qquad (7),$$

Persamaan (7) akan membentuk polinomial dari matriks A, dan skalar-skalar yang memenuhi adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

Contoh 1

Matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ memiliki nilai eigen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 2$. Nilai eigen tersebut didapat dari

$$det(\lambda\boldsymbol{I} - A) = det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ didapat dengan menyelesaikan

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 2 \\ -1 & \lambda_1 - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda_1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = 0 \qquad (8).$$

Berdasarkan persamaan (8) didapat vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ yaitu $\begin{bmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$. Dengan cara yang sama didapat vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ yaitu $\begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ yang saling bebas linier.

Vektor eigen tergeneralisasi digunakan jika terdapat nilai eigen kembar pada suatu sistem.

Definisi 2 (Perko, 2001: 32)
Misal λ adalah nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ dengan multiplisitas $m \leq n$, untuk $k = 1, \ldots, m$, setiap solusi taknol v dari

$$(A - \lambda \boldsymbol{I})^k \boldsymbol{v} = 0$$

disebut vektor eigen tergeneralisasi dari A.

Contoh 2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 1$, dan $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$ berturut-turut adalah $\boldsymbol{v_1} = (1,1,-2)^T$ dan $\boldsymbol{v_2} = (0,0,1)^T$. Kemudian vektor eigen tergeneralisasi yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 2$ didapat dengan mencari solusi taknol $\boldsymbol{v}$ dari

$$(A - 2\boldsymbol{I})^2 \boldsymbol{v} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = 0.$$

Kemudian dipilih solusi taknol $\boldsymbol{v}$ yaitu $\boldsymbol{v_3} = (0,1,0)^T$ (Perko, 2001: 35).

Diagonalisasi akan digunakan untuk transformasi sistem pada persamaan *center manifold*.

Definisi 3 (Anton & Rorres, 2000: 395)
Sebuah matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal, dan matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Contoh 3

Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, dengan matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor-vektor kolom dari matriks A, maka matriks P disebut mendiagonalisasi matriks A, karena terdapat $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga

$$P^{-1}PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D. Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang perilakunya berubah seiring berjalannya waktu, perilaku tersebut dapat berupa respon terhadap stimulasi atau gaya (Astrom & Murray, 2009: 1). Misal keadaan suatu sistem dideskripsikan oleh fungsi $x_1(t)$ dan $x_2(t)$. Jika $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dinyatakan dengan dua persamaan diferensial biasa, yaitu

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \;\; \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{9}$$

maka sistem (9) disebut sistem autonomous, karena fungsi f_1 dan f_2 tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t. Jika f secara eksplisit bergantung pada variabel t, maka sistem yang memuat f disebut sistem nonautonomous yang dinyatakan sebagai $f(t,x)$ (Giordano, Fox, & Horton, 2014: 525). Secara matematis sistem dinamik didefinisikan sebagai:

Definisi 4 (Perko, 2001: 182)
Sistem dinamik pada E adalah peta C^1

$$\phi: \mathbb{R} \times E \to E$$

dimana E adalah himpunan bagian terbuka dari $\mathbb{R}^n$, $\phi_t(x) = \phi(t,x)$, dan ϕ_t memenuhi

1. $\phi_0(x) = x$ *untuk semua* $x \in E$,
2. $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ *untuk semua* $s,t \in \mathbb{R}$ *dan* $x \in E$.

Terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem linier dan sistem nonlinier.

1. Sistem Linier

Sistem linier merupakan suatu sistem yang memiliki ketetapan. Menurut Perko (2001, 1-2) sistem linier dari persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk $\dot{x} = Ax$, dengan $x \in \mathbb{R}^n$, A matriks persegi $n \times n$ dan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2 (Perko, 2001: 17)
Jika terdapat A matriks berukuran $n \times n$, kemudian diberikan nilai awal $x_0 \in \mathbb{R}^n$, masalah nilai awal

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \tag{10}$$

memiliki solusi khusus $x(t) = e^{At}x_0$.

Bukti :

Jika $x(t) = e^{At}x_0$, maka $x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0$. e^{At} didefinisikan oleh deret Taylor berikut

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}x_0$$

didapat turunannya yaitu

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{A^k t^k}{k!}x_0 = \frac{d}{dt}\left(A^0 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\right)x_0$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k k t^{k-1}}{k(k-1)!}x_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k k t^{k-1}}{k(k-1)!}x_0$$

$$= \left(\frac{A^1 t^0}{0!} + \frac{A^2 t^1}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$$

$$= \left(A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$$

$$= A\left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$$

$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\right)x_0 = Ae^{At}x_0.$$

Untuk semua $t \in \mathbb{R}$ didapat $\dot{x}(t) = Ax(t)$, atau $\dot{x} = Ax$. Dengan demikian $x(t) = e^{At}x_0$ adalah solusi dari sistem (10).

Contoh 4

Diberikan sistem linier

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2\end{aligned} \qquad (11).$$

Untuk $A = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$, didapat solusi dari sistem (11)

$$x_i(t) = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}c_i, \quad i = 1{,}2.$$

2. Sistem Nonlinier

Sistem nonlinier merupakan suatu sistem yang sifatnya tidak tetap dan memiliki tingkat sensitivitas yang tinggi.

Teorema 3 (Perko, 2001: 67)
Jika $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *terdiferensial pada* x_0*, maka turunan parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n,$ *pada* x_0 *ada dan untuk semua* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Bukti :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Df(x_0)x.$$

Matriks $Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobian.

Solusi dari sistem nonlinier mudah berubah dan sulit diprediksi, namun solusi dari suatu sistem nonlinier dapat ditentukan dengan kondisi dan batas tertentu sesuai definisi berikut:

Definisi 5 (Perko, 2001: 71)
Misal $f \in C(E)$ dimana E adalah himpunan bagian tebuka pada $\mathbb{R}^n$. Maka $x(t)$ adalah solusi dari sistem autonomous nonlinier $\dot{x} = f(x)$ pada interval I jika $x(t)$ terdiferensial pada I dan jika untuk semua $t \in I$, $x(t) \in E$ dan $x'(t) = f\big(x(t)\big)$. Jika diberikan $x_0 \in E$, $x(t)$ adalah solusi dari masalah nilai awal

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

pada interval I. Jika $t_0 \in I$ dan $x(t_0) = x_0$, maka $x(t)$ adalah solusi dari $\dot{x} = Ax$ pada interval I.

3. Titik Ekuilibrium dan Linierisasi

Suatu sistem memiliki titik ekuilibrium atau titik kritis. Pada model penyebaran penyakit, titik ekuilibrium digunakan sebagai suatu acuan keadaan bebas penyakit dan endemik.

Definisi 6 (Perko, 2001: 102)

1. *Titik $x_0 \subset \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x_0) = 0$.*
2. *Titik ekuilibrium x_0 disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari $\dot{x} = f(x)$ jika tidak ada nilai eigen dari matriks $Df(x_0)$ yang memiliki bagian real nol.*
3. *Jika terdapat sistem nonlinier $\dot{x} = f(x)$, maka $\dot{x} = Ax$ disebut linierisasi dari $\dot{x} = f(x)$ pada x_0, dengan matriks $A = Df(x_0)$.*

Contoh 5

Diberikan sistem nonlinier

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Berdasarkan Definisi 5 titik ekuilibrium dari sistem (12) didapat saat $f(x) = 0$. Dengan menyelesaikan $\begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = 0$, didapat titik ekuilibrium $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Linierisasi dari sistem (12) didapat dengan menyelesaikan

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^2 - x_2^2 - 1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2 - x_2^2 - 1)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(2x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(2x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (13).$$

Substitusi titik ekuilibrium ke persamaan (13), didapat $Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dengan nilai eigen $\lambda = 2$ dan $Df(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dengan nilai eigen $\lambda = -2$ dan $\lambda = 2$. Karena tidak ada nilai eigen dari $Df(1,0)$ dan $Df(-1,0)$ yang memiliki bagian real nol, maka disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

E. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan pada titik ekuilibrium dilakukan untuk mengetahui apakah suatu penyakit menghilang atau menyebar dalam populasi.

Definisi 7 (Olsder & Woude, 2004 : 57)
Persamaan diferensial orde pertama $\dot{x} = f(x)$, dengan $x(t, x_0)$ solusi pada waktu t, dan nilai awal $x(0) = x_0$.
1. *Vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.*
2. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.*
3. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik jika $\bar{x}$ stabil, dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, bila $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.*
4. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut tidak stabil jika tidak memenuhi (2).*

Selanjutnya diberikan teorema mengenai sifat kestabilan suatu sistem nonlinear yang ditinjau dari nilai eigen sistem.

Teorema 4 (Olsder & Woude, 2004 : 58)
Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A matriks berukuran $n \times n$ dengan k nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ $(k \leq n)$.
1. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ disebut stabil asimtotik jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, k$.*

2. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ disebut stabil jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,k$, dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri sama.*
3. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ disebut tidak stabil jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,k$, atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$, sehingga multiplisitas aljabar lebih besar dari pada multiplisitas geometri.*

Bukti :

1. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,k$.

   Berdasarkan Definisi 7, titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik jika $\lim_{t\to\infty}\|x(t,x_0) - \bar{x}\| = 0$. Dengan kata lain, untuk $t \to \infty$, $x(t,x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Karena $x(t,x_0)$ merupakan solusi dari sistem linier $\dot{x} = Ax$, maka $x(t,x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Oleh karena itu agar $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$, $\Re e(\lambda_i)$ haruslah bernilai negatif.

   ($\Leftarrow$) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

   Solusi dari sistem linier $\dot{x} = Ax$ adalah $x(t,x_0)$, sehingga $x(t,x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$, maka untuk $t \to \infty$, $x(t,x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$, sehingga berdasarkan Definisi 7, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.
2. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,\ldots,k$.

   Andaikan $\Re e(\lambda_i) > 0$ maka solusi dari sistem linier $\dot{x} = Ax$ yaitu $x(t,x_0)$ yang memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$)

untuk $t \to \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e(\lambda_i) \le 0$ untuk semua $i = 1,2,\dots,k$. Jadi terbukti titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) \le 0$ untuk semua $i = 1,2,\dots,k$.

($\Leftarrow$) Selanjutnya akan dibuktikan jika $\Re e(\lambda_i) \le 0$ untuk semua $i = 1,2,\dots,k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri sama.

Solusi dari sistem linier $\dot{x} = Ax$ adalah $x(t, x_0)$, sehingga $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) \le 0$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik. Jika $\Re e(\lambda_i) = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen, sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Tanpa mengurangi pembuktian secara umum, diambil sembarang sistem pada $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad a > 0, \ b > 0 \qquad (14).$$

Nilai eigen dari sistem (14) masing-masing adalah $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$ dan $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen masing-masing adalah $v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil jika hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk semua $i = 1,2,\dots,k$.

Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika $t \to \infty$, sehingga $x(t, x_0)$ akan menuju ∞. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem linier $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Untuk $x(t, x_0)$ menuju ∞ dipenuhi jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, k$.

($\Leftarrow$) Selanjutnya akan dibuktikan jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Jika $\Re e(\lambda_i) > 0$, maka solusi dari sistem linier $\dot{x} = Ax$ yaitu $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞. Dengan kata lain, solusi tersebut akan menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$, maka $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil.

F. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium. Nilai eigen dari matriks A didapat dengan menyelesaikan polinomial karakteristik

$$det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Dengan kriteria Routh-Hurwitz, kestabilan asimtotik dari matriks A dapat diketahui menggunakan koefisien $a_i, i = 0,1, \dots, n-1$ tanpa menyelesaikan persamaan polinomialnya secara eksplisit. Kriteria Routh-Hurwitz hanya digunakan untuk memeriksa daerah dari nilai eigen , tanpa mengetahui lokasi tepat dari nilai eigen tersebut (Olsder & Woude, 2004: 60). Untuk suatu polinomial

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{15}$$

dengan $a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, kriteria Routh-Hurwitz dihitung berdasarkan Tabel 1.

Tabel 1. Routh-Hurwitz

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\cdots$
c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Koefisien b_i, c_i dan d_i dihitung menggunakan persamaan berikut

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \qquad \ldots$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}, \qquad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}, \quad \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

Polinomial persamaan (15) stabil jika nilai pada kolom satu bertanda sama dan tidak stabil jika nilai pada kolom satu bertanda berbeda. Koefisien dengan indeks negatif didefinisikan sebagai nol, kemudian perhitungan pada setiap baris berhenti saat nilai dari koefisien pada baris tersebut nol (Meinsma, 1996: 2).

G. Teori Center Manifold

Kestabilan sistem yang nilai eigennya mempunyai bagian real yang bernilai nol tidak dapat dilakukan dengan melihat kestabilan linierisasi dari sistem tersebut. Oleh karena itu, untuk menentukan kestabilan sistem yang nilai eigennya mempunyai bagian real yang bernilai nol digunakan teori *center manifold.* Sebuah sistem persamaan diferensial didefinisikan sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + f(x,y), \tag{16}$$

$$\dot{y} = Bx + g(x,y)$$

dengan $(x,y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$, dimana

$$f(0,0) = 0, \qquad Df(0,0) = 0,$$

$$g(0,0) = 0, \qquad Dg(0,0) = 0.$$

Matriks A merupakan matriks persegi $c \times c$ yang memuat nilai eigen dengan bagian real nol, B adalah matriks $s \times s$ yang memuat nilai eigen dengan bagian real negatif. Fungsi f dan g adalah fungsi $C^r(r \geq 2)$, dimana C^r merupakan suatu fungsi yang selalu kontinu hingga turunan ke r.

Definisi 8 (Wiggins, 2003: 246)
Center manifold untuk sistem (16) didefinisikan sebagai

$$W(0)^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \quad (17)$$

untuk δ yang cukup kecil.

Dari persamaan (17) diperoleh

$$y = h(x) \quad (18)$$

kemudian persamaan (18) diturunkan terhadap t sehingga diperoleh

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} \quad (19)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (19) ke persamaan (16) diperoleh

$$\dot{x} = Ax + f\big(x, h(x)\big) \quad (20)$$

$$\dot{y} = Bx + g\big(x, h(x)\big) \quad (21)$$

Substitusikan persamaan (19) ke persamaan (21) sehingga diperoleh

$$Dh(x)\dot{x} = Bh(x) + g\big(x, h(x)\big) \quad (22)$$

Kemudian substitusikan persamaan (20) ke persamaan (22)

$$Dh(x)\Big(Ax + f\big(x, h(x)\big)\Big) = Bh(x) + g\big(x, h(x)\big) \quad (23)$$

Persamaan (23) merupakan persamaan *center manifold* yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)\Big(Ax + f\big(x, h(x)\big)\Big) - Bh(x) + g\big(x, h(x)\big).$$

H. Bifurkasi

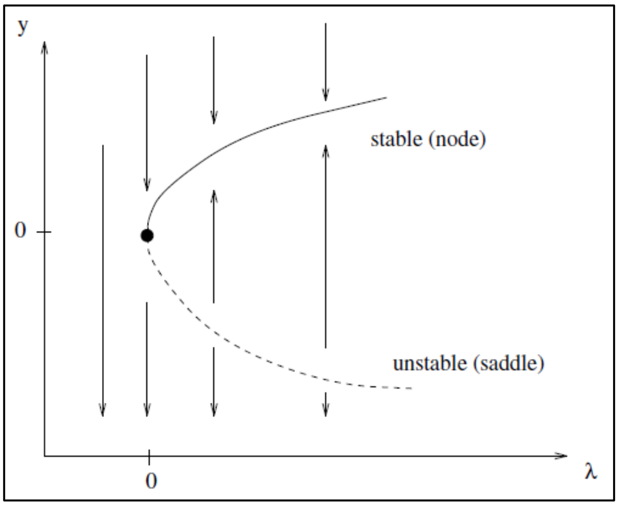
Jika suatu sistem yang memiliki nilai eigen nol, maka sistem tersebut rentan terhadap gangguan. Sedikit saja sistem mengalami gangguan maka nilai eigen dari sistem dapat berpindah ke daerah tidak stabil. Keadaan inilah yang disebut bifurkasi, yaitu perubahan kestabilan suatu sistem seiring berubahnya nilai parameter.

Definisi 9 (Kuznetsov, 1998: 57)
Munculnya potret fase yang tidak ekuivalen secara topologi karena perubahan parameter disebut bifurkasi.

Terdapat beberapa jenis bifurkasi, diantaranya yaitu :

1. Bifurkasi *Saddle-Node*

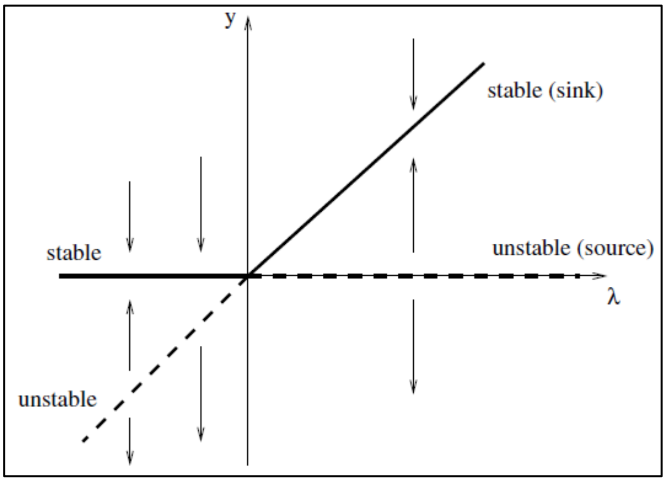
   Bifurkasi *saddle-node* digambarkan dengan $\dot{y} = \lambda - y^2$, dengan $\lambda \geq 0$. Saat $\lambda = 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, sedangkan saat $\lambda > 0$ terdapat dua solusi ekuilibrium yaitu solusi stabil $y = \sqrt{\lambda}$ dan solusi tak stabil $y = -\sqrt{\lambda}$ (Seydel, 2010: 62). Bifurkasi *saddle-node* ditunjukan pada Gambar 1.



Gambar 1. Bifurkasi Saddle-Node

2. Bifurkasi Transkritikal

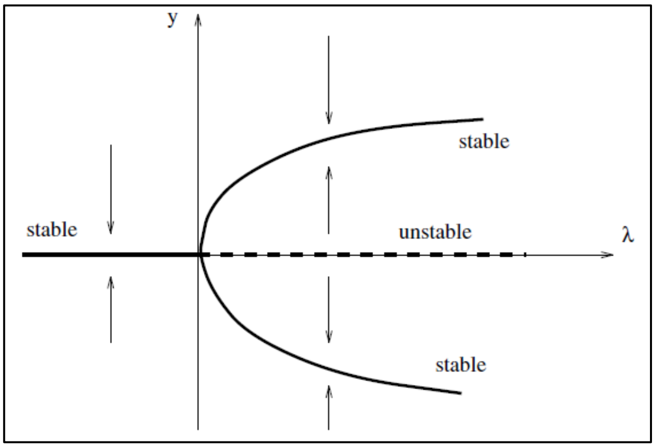
Bifurkasi transkritikal digambarkan dengan $\dot{y} = \lambda y - y^2$. Terdapat dua solusi ekuilibrium yaitu $y = 0$ dan $y = \lambda$, keduanya mengalami pertukaran kestabilan saat λ melewati 0 (Seydel, 2010: 64-65). Bifurkasi transkritikal ditunjukan pada Gambar 2.



Gambar 2. Bifurkasi Transkritikal

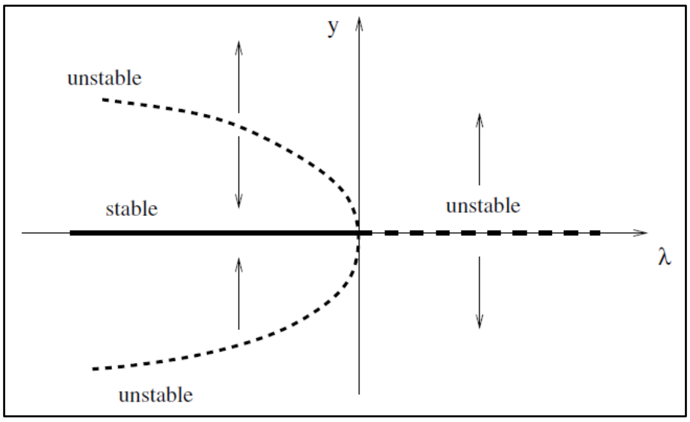
3. Bifurkasi *Pitchfork*

Bifurkasi *pitchfork* terbagi menjadi dua, yaitu bifurkasi *pitchfork* superkritikal dan bifurkasi *pitchfork* subkritikal. Bifurkasi *pitchfork* superkritikal digambarkan dengan $\dot{y} = \lambda y - y^3$. Jika $\lambda < 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, sedangkan jika $\lambda > 0$ terdapat tiga solusi ekuilibrium, yaitu solusi tak stabil $y = 0$ dan dua solusi stabil $y = \pm\sqrt{\lambda}$. Bifurkasi *pitchfork* superkritikal ditunjukan pada Gambar 3.



Gambar 3. Bifurkasi Pitchfork Superkritikal

Sedangkan bifurkasi pitchfork subkritikal digambarkan dengan $\dot{y} = \lambda y + y^3$. Jika $\lambda > 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, sedangkan jika $\lambda < 0$ terdapat tiga solusi ekuilibrium, yaitu solusi stabil $y = 0$ dan dua solusi tak stabil $y = \pm\sqrt{\lambda}$ (Seydel, 2010: 65-66). Bifurkasi *pitchfork* subkritikal ditunjukan pada Gambar 4.



Gambar 4. Bifurkasi *Pitchfork* Superkritikal

4. Bifurkasi Hopf

Bifurkasi yang bersesuaian dengan $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$, dengan ω_0 adalah bagian imajiner dari nilai eigen yang terkait. Maka bifurkasi yang terjadi disebut bifurkasi Hopf atau bifurkasi Andronov Hopf (Kuznetsov, 1998: 57-58).

I. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah bilangan yang menyatakan rata-rata infeksi sekunder yang muncul akibat adanya satu orang terinfeksi primer dalam populasi *susceptible* (Heffernan, Smith, & Wahl, 2005: 1). Jika $R_0 < 1$, maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu terinfeksi baru selama masa infeksi, dan penyakit tidak dapat berkembang. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan lebih dari satu individu terinfeksi baru selama masa infeksi, dan penyakit akan menjadi wabah dalam populasi.

Misalkan terdapat m kelas terinfeksi dan n kelas tidak terinfeksi, kemudian terdapat x yang menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi tidak terinfeksi, dengan $x \in \mathbb{R}^m$ dan $y \in \mathbb{R}^n$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, selanjutnya x dan y dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \psi_i(x,y) - \phi_i(x,y), \quad && i = 1,2,3,\dots,m \\ \dot{y} &= \phi_j(x,y), && j = 1,2,3,\dots,n \end{aligned} \qquad (24),$$

dengan ψ_i merupakan matriks dari banyaknya individu yang masuk dan menambah banyaknya individu dalam kelas terinfeksi, sedangkan ϕ_i merupakan matriks dari banyaknya individu yang keluar dan mengurangi banyaknya individu dalam kelas terinfeksi.

Perhitungan R_0 berdasarkan linierisasi dari sistem (24) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Misal F dan V matriks berukuran $n \times n$, kemudian didefinisikan

$K = FV^{-1}$, dengan $F = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ dan $V = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$. K disebut *Next Generation Matrix*. Bilangan reproduksi dasar $R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1})$, dengan ρ adalah nilai eigen terbesar dari matriks K (Driessche & Watmough, 2002: 32-33).

Contoh 6

Misal λ menyatakan laju kelahiran, μ menyatakan laju kematian alami, β menyatakan laju individu rentan yang terjangkit, k menyatakan laju individu terjangkit yang menjadi terinfeksi, dan γ menyatakan laju individu terinfeksi yang sembuh. Dengan menggunakan model $SEIJR$, didefinisikan kelompok E dan kelompok I sebagai berikut

$$\dot{E} = \beta SI - (\mu + k)E$$

$$\dot{I} = kE - (\gamma + \mu)I$$

Didapat matriks F dan V masing-masing yaitu

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} \mu + k & 0 \\ -k & \gamma + \mu \end{bmatrix}.$$

Invers dari V yaitu

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + k} & 0 \\ \frac{1}{(\mu + k)(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \mu} \end{bmatrix}.$$

Dari F dan V^{-1}, didapat

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta\lambda k}{\mu(\mu + k)(\gamma + \mu)} & \frac{\beta\lambda}{\mu(\gamma + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen terbesar dari K sebagai R_0 yaitu

$$R_0 = \frac{\beta\lambda k}{\mu(\mu + k)(\gamma + \mu)}.$$