BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini menguraikan tentang kajian literatur yang diperlukan dalam analisis sistem antrean dalam penelitian. Adapun hal-hal yang di kaji meliputi teori antrean, model-model antrean, uji distribusi Kolmogorov-Smirnov, simulasi Monte Carlo, Software SPSS dan WinQSB.

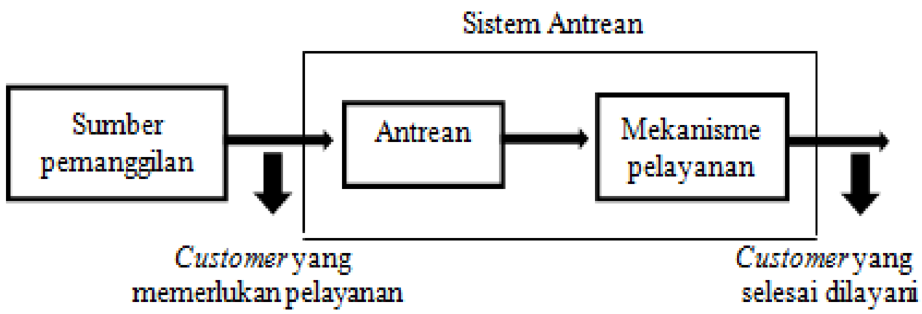
A. Teori Antrean

Terdapat pernyataan yang menjadi dasar dalam kasus antrean yaitu *customer* dan *server*. Keberadaan *customer* pada fasilitas pelayanan dihasilkan dari sebuah sumber, dimana *customer* langsung dilayani atau menunggu dalam sebuah antrean jika fasilitas yang digunakan sibuk. Dalam hal ini ketika pelayanan selesai dilakukan dalam fasilitas pelayanan, secara otomatis akan menarik *customer* yang menunggu, jika terdapat banyak *customer* maka terbentuklah sebuah antrean.

Hal utama dalam analisis antrean, waktu antar kedatangan antar *customer* mewakili kedatangan dari *customer*. Sementara waktu pelayanan per *customer* mewakili pelayanan yang diberikan *server* kepada *customer*. Secara umum lamanya waktu pelayanan dapat terjadi secara seragam selama periode tertentu maupun acak. Seperti halnya dengan kedatangan *customer*. Hal ini dapat terjadi karena waktu pelayanan yang tidak sama ataupun perbedaan waktu dari *customer* yang datang. Proses antrean pada suatu sistem antrean merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* ke sebuah sistem antrean. *Customer* tersebut melakukan antrean untuk menunggu pelayanan dari *server* untuk dilayani berdasarkan disiplin antrean hingga *customer* meninggalkan sistem antrean setelah selesai dilayani.

1. Struktur Dasar Sistem Antrean

Proses dasar yang dianggap oleh model antrean ialah bahwa *customer* yang memerlukan pelayanan berasal dari suatu populasi yang disebut sumber masukan (*input source*). *Customer* memasuki sistem antrean (*queuing system*) dan menggabungkan diri atau membentuk suatu antrean. Pada waktu tertentu, anggota dalam antrean dipilih untuk memperoleh pelayanan dengan menggunakan aturan tertentu yang disebut disiplin pelayanan (*service discipline*). Pelayanan yang diperlukan oleh *customer* kemudian dilakukan oleh mekanisme pelayanan (*service mechanism*). Setelah pelayanan diperoleh, maka *customer* meninggalkan sistem (Supranto, 2013: 325). Berdasarkan proses ini, maka dapat dilihat struktur dasar sistem antrean berikut:

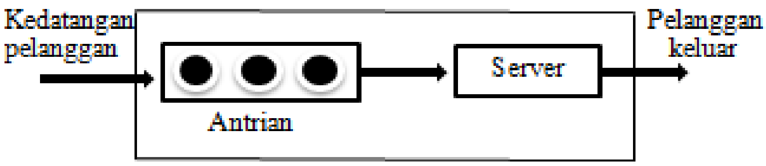


(Kakiay, 2004: 10)
Gambar 2.1 Struktur Antrean

Desain dari fasilitas pelayanan dapat berupa pelayanan secara paralel, misalnya pada kantor pos atau pada pelayanan bank. Pelayanan juga dapat disusun secara seri, misalnya pada proses kerja pada mesin yang berurutan, atau bisa pada jaringan seperti *router* pada jaringan komputer (Taha, 2007: 552). Desain fasilitas pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk struktur antrean yang berbeda-beda. *Channel* menggambarkan jumlah fasilitas pelayanan yang dilalui dalam sistem pelayanan sedangkan *phase* menggambarkan banyaknya tahap pelayanan yang dilalui *customer*. Berikut ini adalah model struktur antrean yang biasa diterapkan dalam sistem antrean:

a. *Single Channel Single Phase*

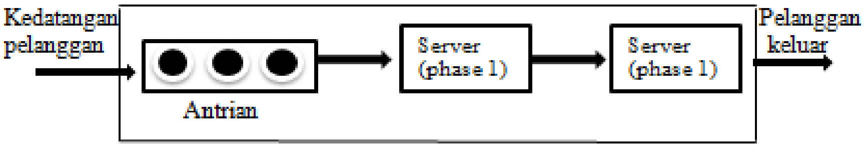
Single channel artinya bahwa struktur antrean hanya ada satu server yang menyediakan pelayanan kepada *customer*. *Single phase* berarti bahwa hanya ada satu tahap pelayanan pada sistem antrean. Contohnya adalah pembelian tiket kereta api yang dilayani satu loket, pelayanan pajak listrik yang memiliki satu loket, dan lain-lain.



(Kakiay, 2004: 13)
Gambar 2.2 *Single Channel Single Phase*

b. *Single Channel Multiple Phase*

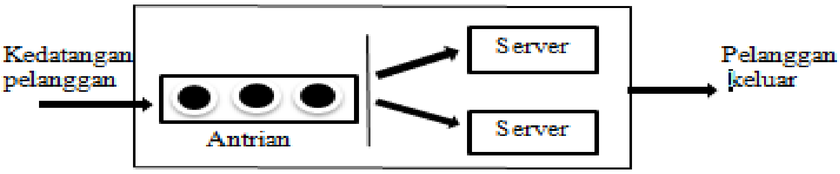
Desain pelayanan *Single Channel Multiple Phase* merupakan sistem antrean yang terjadi jika memilki lebih dari satu pelayanan yang dilakukan secara seri. Contohnya, pada pembuatan SIM kendaraan yang melalui beberapa tahap pelayanan.



(Kakiay, 2004: 14)
Gambar 2.3 *Single Channel Multiple Phase*

c. *Multiple Channel Single Phase*

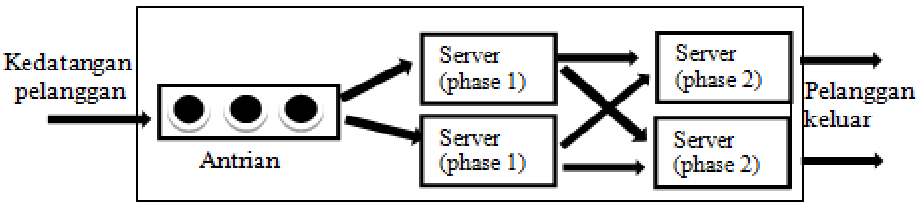
Desain pelayanan *Multiple Channel Single Phase* merupakan sistem antrean yang terjadi jika memiliki lebih dari satu fasilitas pelayanan yang terdiri dari satu tahap antrean tunggal. Contohnya adalah pelayanan nasabah bank, pembelian tiket yang dilayani lebih dari satu loket.



(Kakiay, 2004: 15)
Gambar 2.4 *Multiple Channel Single Phase*

d. *Multiple Channel Multiple Phase*

Desain pelayanan *Multiple Channel Multiple Phase* merupakan sistem antrean yang terjadi jika memiliki lebih dari satu fasilitas pelayanan dengan pelayanan lebih satu tahap pelayanan. Contohnya adalah pelayanan pasien di rumah sakit, dimana pasien menuju loket pendaftaran, diagnosa, pemeriksaan, dan dilanjutkan pembayaran serta penerimaan obat.



(Kakiay, 2004: 16)
Gambar 2.5 *Multiple Channel Multiple Phase*

2. Faktor dalam Sistem Antrean

Fasilitas pelayanan sangat diperlukan dalam melayani *customer* yang berdatangan agar proses antrean berjalan dengan baik. Faktor yang berpengaruh terhadap suatu sistem antrean ada enam komponen dasar yang harus diperhatikan (Kakiay, 2004: 11) suatu sistem antrean, antara lain:

a. Distribusi Kedatangan (Pola Kedatangan)

Distribusi kedatangan *customer* berkaitan dengan waktu antar kedatangan yaitu waktu antara pelangan yang datang secara berturut-turut pada suatu fasilitas pelayanan. Distribusi kedatangan *customer* bisa terjadi secara individu maupun berkelompok. Jika distribusi kedatangan tidak disebutkan secara khusus, maka kedatangan *customer* dianggap datang satu peri satu. Kedatangan *customer* diasumsikan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak dipengaruhi oleh kedatangan sebelumnya ataupun setelahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan *customer* bersifat acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar lambda (λ).

b. Distribusi Waktu Pelayanan (Pola Pelayanan)

Distribusi pelayanan ditentukan oleh waktu yang dibutuhkan untuk melayani *customer* pada fasilitas pelayanan yang disediakan. Lamanya waktu pelayanan dapat tergantung dari jumlah *customer* yang antre dalam fasilitas pelayanan ataupun tergantung pada kondisi tersebut. Distribusi pelayanan *customer* bisa terjadi secara individu maupun berkelompok. Jika distribusi pelayanan tidak disebutkan secara khusus, maka dianggap *customer* dianggap bahwa satu pelayanan dapat melayani secara tuntas satu pelanggan. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, berbeda dengan waktu antar pelayanan yang diasumsikan berdistribusi Eksponensial, dimana waktu antar pelayanan tidak dipengaruhi oleh pelayanan sebelumnya ataupun setelahnya. Rata-rata laju pelayanan diberi simbol μ, sedangkan rata-rata waktu yang diperlukan untuk melayani setiap *customer* disimbolkan $\frac{1}{\mu}$ unit (satuan).

c. Rancangan Fasilitas Pelayanan

Dalam rancangan fasilitas pelayanan terbagi menjadi tiga bentuk, dimana fasilitas pelayanan berhubungan dengan bentuk baris antrean pada sistem pelayanan. Adapun tiga bentuknya, yaitu:

1) Bentuk seri

   Bentuk baris pada sistem pelayanan ini berupa fasilitas pelayanan yang berurutan secara berjajar lurus.

2) Bentuk paralel

   Bentuk baris pada sistem pelayanan ini berupa fasilitas pelayanan yang dilakukan secara bercabang dengan fungsi yang sama.

3) Bentuk antrean jaringan

   Bentuk baris pada sistem pelayanan ini berupa fasilitas pelayanan yang merupakan gabungan dari bentuk seri dan paralel yang dilakukan secara bersama-sama.

d. Disiplin Pelayanan

Disiplin pelayanan adalah aturan yang mewakili urutan dimana *customer* dipilih dari antrean, yang merupakan faktor penting dalam analisis dari model antrean (Taha, 2007: 552). Terdapat empat disiplin antrean yang paling sering digunakan, antara lain:

1) *First Come First Served (FCFS)* atau *First In First Out (FIFO)*

   Merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah *customer* yang datang pertama. Contohnya pada antrean di loket-loket penjualan karcis kereta api.

2) *Last Come First Served (LCFS)* atau *Last In Last Out (LILO)*

   Merupakan antrean dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal. Contohnya adalah pada sistem bongkar muat barang di dalam truk. Barang yang masuk terakhir akan keluar terlebih dahulu.

3) *Service in Random Order (SIRO)* atau *Random Selection for Service (RSS)*

   SIRO atau *RSS* adalah disiplin antrean yang pelayanannya dilakukan secara acak. Contohnya pada arisan yang pelayanannya dilakukan berdasarkan undian.

4) Prioritas pelayanan (PS)

   Prioritas pelayanan merupakan disiplin antrean yang pelayanannya diberikan berdasarkan prioritas khusus. Contohnya seorang yang keadaan penyakitnya lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter.

e. Ukuran dalam Antrean/ Kapasitas Sistem

Ukuran dalam antrean menunjukkan banyaknya *customer* yang dapat ditampung dalam sistem antrean. Terdapat dua ukuran antrean, yaitu ukuran kedatangan *customer* yang terbatas (*finite queue)* dan ukuran kedatangan yang tidak terbatas (*infinite queue).*

f. Sumber Pemanggilan

Sumber pemanggilan merupakan fasilitas pelayanan yang berfungsi memanggil *customer* dalam antrean untuk mendapatkan pelayanan. Sumber pemanggilan pada fasilitas pelayanan dapat berupa mesin maupun manusia. Ada dua sumber pemanggilan yaitu sumber pemanggilan yang terbatas (*finite calling source*) dan tidak terbatas (*infinite calling source*).

3. Notasi Kendall

Menurut Taha (2007: 568-569) dalam penulisan notasi, simbol pertama dari notasi *(a/b/c)* yang dikemukakan oleh D.G. Kendall pada tahun 1953 dan dikenal dengan notasi Kendall. Pada tahun 1966, A.M. Lee menambahkan simbol *d* dan *e* pada notasi dan menambahkan simbol terakhir, yaitu simbol *f* di tahun 1968. Sehingga diperoleh karakteristik suatu antrean dapat dinotasikan dengan notasi baku *(a/b/c) :(d/e/f)*, dengan:

a : Distribusi kedatangan (*Arrival distribution*)

b : Distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan

c : Banyaknya server ($c = 1, 2, ..., \infty$)

d : Disiplin antrean

e : Jumlah maksimum *customer* (*finite* atau *infinite)* yang diizinkan dalam sistem (dalam antrean ditambah dalam pelayanan)

f : Ukuran dari sumber pemanggilan (*finite* atau *infinite)*

Notasi standar untuk melambangkan distribusi kedatangan dan keberangkatan (simbol *a* dan *b*) adalah:

M : Distribusi kedatangan dan keberangkatan dari proses Poisson (*Markovian*)

D : *Deterministic inter arrival* atau waktu pelayanan

E_k : Waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang

GI : Distribusi umum yang independen dari waktu antar kedatangan *(General Independent)*

G : Distribusi umum dari waktu pelayanan

K : jumlah pelayan dalam bentuk paralel atau seri

N : jumlah maksimum *customer* (*customer*) dalam sistem

NPD : *Non-Preemtive Discipline*

PRD : *Preemtive Discipline.*

Sedangkan notasi disiplin antrean (simbol *d*)

FCFS : *First come, first served*

LCFS : *Last come, first served*

SIRO : *Service in random order*

GD : *General dicipline (*contoh dari bentuk disiplin)

Untuk mengilustrasikan penggunaan penotasian, misal diberikan model *(M/D/10) : (GD/20/∞)* menggunakan distribusi kedatangan Poisson (waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial), waktu pelayanan konstan, dan banyaknya *server* ada 10, disiplin antrean secara umum (*GD)*, dan ada batas 20 *customer* dalam kapasitas sistem. kapasitas sumber pemanggilan dari kedatangan *customer* tidak terbatas.

4. Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial

Berikut ini akan dijelaskan mengenai distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial.

a. Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan nilai-nilai bagi suatu peubah acak X, yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu tertentu atau disuatu daerah tertentu, sering disebut percobaan Poisson. Selang waktu tersebut dapat berapa saja panjangnya, misalnya semenit, sehari, seminggu, sebulan, atau bahkan setahun (Walpole, 1995:173). Bilangan X yang menyatakan banyaknya hasil percobaan dalam suatu percobaan Poisson disebut variabel acak dan distribusi peluangnya disebut distribusi Poisson.

Karakteristik percobaan Poisson diantaranya:

1) Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu, tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.

2) Probabilitas terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya derah tersebut, dan tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi diluar selang waktu atau daerah tersebut.

3) Probabilitas bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang terkecil tersebut, dapat diabaikan.

Kegunaan distribusi Poisson untuk mengukur probabilitas dari variabel acak yang mencakup rentang yang cukup panjang, mengukur peluang yang mungkin terjadi dalam waktu atau daerah tertentu. Penerapan distribusi Poisson yaitu dalam menghitung atau mengolah suatu data, diantaranya dalam menghitung data suatu antrean yang terjadi selama selang waktu atau daerah tertentu.

Definisi 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992: 103). *Variabel acak diskrit X dikatakan terdistribusi Poisson dengan parameter* $\lambda > 0$ *jika memiliki fungsi densitas probabilitas diskrit yang berbentuk:*

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Dengan, $x =$ *banyaknya hasil yang mungkin dari variabel acak diskrit X*

e =konstanta dasar (basis) logaritma natural =2,71828 . . .

$\lambda =$ *nilai harapan dari* X, *untuk* X *variabel acak diskrit*

b. Distribusi Eksponensial

Pada sebagian situasi antrean, kedatangan *customer* terjadi secara benar-benar acak. Artinya, bahwa terjadinya suatu kejadian (misalnya, kedatangan *customer* atau selesai pelayanan) tidak dipengaruhi oleh lamanya waktu yang telah dihabiskan untuk melayani kedatangan *customer* sebelumnya dan tidak dipengaruhi oleh jumlah *customer* yang menunggu untuk dilayani.

Kegunaan distribusi Eksponensial yaitu untuk mencari selisih waktu yang terjadi dalam suatu peluang pada daerah tertentu. Dalam penerapannya, distribusi Eksponensial sangat berperan sekali, misalnya untuk mengukur selisisih waktu antara orang ke-1 dengan orang ke-2 dalam suatu antrean.

Definisi 2.2 (Taha, 2007: 553). *Waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan yang acak di jelaskan secara kuantitatif dalam model antrean oleh distribusi eksponensial dengan parameter* μ *, yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & untuk\ x \geq 0 \\ 0, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases} \tag{2.2}$$

dengan x menyatakan waktu antar kejadian yang terjadi secara berurutan dan μ menyatakan rata-rata laju kedatangan unit per satuan waktu.

Fungsi distribusi kumulatif Eksponensialnya merupakan integral dari Persamaan (2.2), *diperoleh*

$$F(t,\mu) = \begin{cases} \int_0^x \mu\, e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu t}, & untuk\ x \geq 0 \\ 0, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases} \tag{2.3}$$

Definisi 2.3 (Ross,1999: 60). Fungsi $f(\Delta t)$ dikatakan menjadi $o(\Delta t)$ *jika*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \tag{2.4}$$

Definisi 2.4 (Purcell & Varberg, 1987:141). *Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen" yang nilainya pada sebarang bilangan t adalah*

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt} \tag{2.5}$$

asalkan limit fungsinya ada.

5. Proses Kelahiran dan Kematian *(Birth and Death)*

Proses kelahiran dan kematian di dalam sistem antrean dimaknai sebagai proses kedatangan dan keberangkatan. Proses kelahiran terjadi ketika *customer* memasuki suatu sistem antrean, sedangkan proses kematian terjadi ketika *customer* meninggalkan suatu sistem antrean.

Distribusi eksponensial digunakan untuk mendiskripsikan waktu antar kedatangan dalam kelahiran murni dan kematian murni. Hasil dari pengembangan proses kelahiran dan kematian adalah untuk menunjukkan hubungan antara distribusi Eksponensial dan distribusi Poisson, dengan pengertian bahwa satu distribusi (distribusi Poisson) secara otomatis mendefinisikan yang lainnya (Distribusi Eksponensial)(Taha, 2007: 556).

a. Model Kelahiran Murni

Model kelahiran murni berfungsi menentukan penyelesaian dari probabilitas *steady state*. Selain itu, model ini menunjukkan hubungan antara rata-rata kedatangan yang terdistribusi Poisson dan waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial.

Menurut Gross & Haris (1997: 16), secara umum model antrean diasumsikan jika rata-rata laju kedatangan dan rata-rata laju pelayanan mengikuti distribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial. Distribusi Poisson juga merupakan probabilitas diskrit yang dapat meramalkan jumlah kedatangan pada suatu waktu tertentu.

Proses jumlah kedatangan $\{N(t), t \geq 0\}$, dimana $N(t)$ dinotasikan banyaknya kedatangan pada waktu t, dengan $N(0) = 0$. Proses stokastik yang dinyatakan $N(t)$ dimisalkan proses Poisson dengan parameter λ dinyatakan dengan tiga asumsi, yaitu:

i. Probabilitas kejadian kedatangan antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah $\lambda\Delta t + o(\Delta t\ )$. Dapat ditulis P {terjadi 1 kedatangan antara $t + \Delta t\} =$ $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, dimana λ konstanta independen dari $N(t)$. Pengenalan notasi $o(\Delta t\ )$ untuk menotasikan sebuah fungsi Δt yang mendekati nol yang memenuhi persaman:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \tag{2.6}$$

ii. Probabilitas kejadian lebih dari satu kedatangan antara t dan $t + \Delta t$ sangat kecil atau bisa dikatakan $o(\Delta t\ )$.

iii. Angka kedatangan dalam interval yang tidak tumpang tindih yang berarti bahwa proses kedatangan tiap interval waktu tidak tergantung pada interval waktu sebelumnya.

Berdasarkan ketiga asumsi tersebut, diberikan teorema yang menyatakan bahwa rata-rata laju kedatangan mengikuti distribusi Poisson sebagai berikut:

Teorema 2.1. (Sari, 2011: 18). *Untuk suatu proses Poisson, kedatangan yang terjadi dalam interval waktu* t *adalah variabel acak yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter* $\lambda\, t$ *dan peluang dari* n *kedatangan adalah* $\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$.

Bukti:

Misalkan $P_n(t)$ adalah probabilitas dari n kedatangan dalam interval waktu t, dengan n bilangan bulat dan $n \geq 0$, maka:

$P_n(t + \Delta t) = P\{ n$ kedatangan pada saat t dan 0 kedatangan pada saat $\Delta t\}$

$+P\{n-1$ kedatangan pada saat t dan 1 kedatangan pada saat $\Delta t\}$

$+P\{n-2$ kedatangan pada saat t dan 2 kedatangan saat $\Delta t\} + \cdots$

$+P\{0$ kedatangan dalam t dan n kedatangan pada saat $\Delta t\}$ (2.7)

dengan asumsi i, ii, dan iii, maka Persamaan (2.7) didapatkan

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t) \tag{2.8}$$

pada akhir Persamaan (2.8) yaitu $o(\Delta t)$ menyatakan suku-suku $P\{n - j$ kedatangan pada saat t dan j kedatangan pada saat $\Delta t; 2 \leq j \leq n$.

Berdasarkan Persamaan (2.8), untuk $n = 0$ diperoleh:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad (2.9)$$

Kemudian, dari Persamaan (2.8) dan (2.9) ditulis kembali dengan menggabungkan semua bentuk yang memuat $o(\Delta t)$, sehingga didapat:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - \lambda P_0(t)\Delta t - P_0(t)o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\lambda P_0(t)\Delta t - P_0(t)o(\Delta t) + o(\Delta t) \quad (2.10)$$

Suku $o(\Delta t)P_0(t)$ diabaikan pada (2.10), maka diperoleh

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t) \quad (2.11)$$

dan menggunakan cara yang sama, untuk $n \geq 1$ diperoleh:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + o\Delta t$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) - \lambda\Delta t P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o\Delta t$$

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = -\lambda\Delta t P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o\Delta t \quad (2.12)$$

Selanjutnya, untuk $n = 0$, kedua ruas dari Persamaan (2.11) dibagi dengan Δt dan diambil limit $\Delta t \to 0$, maka diperoleh:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{-\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t)}{\Delta t}\right],$$

dengan menggunakan Definisi 2.3 dan 2.4, maka diperoleh

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \qquad (n = 0) \quad (2.13)$$

Penyelesaian Persamaan (2.13), maka untuk $n = 0$ diperoleh:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda\, dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda \mathrm{t}$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Jadi solusi dari (2.13) adalah $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, untuk $n = 0$ (2.14)

Untuk nilai $n \geq 1$, kedua ruas dari Persamaan (2.12) dibagi dengan Δt dan di ambil limit $\Delta t \to 0$, maka diperoleh:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{-\lambda \Delta t P_n(t) + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) + o(\Delta t)}{\Delta t}\right] \quad (2.15)$$

dengan menggunakan Definisi 2.3 dan 2.4, maka Persamaan (2.15) menjadi

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (2.16)$$

Berdasarkan Persamaan (2.16), maka penyelesaian untuk $n = 1$ diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) = \lambda$$

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \int \lambda \, dt$$

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Jadi penyelesaian dari (2.16) adalah $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$, unttuk $n = 1$ (2.17)

Berdasarkan Persamaan (2.16) dengan mensubitusikan Persamaan (2.17), maka untuk $n = 2$ diperoleh:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda\, \lambda\, t\, e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_2(t)\right) = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t} P_2(t) = \int \lambda^2 t\, dt$$

$$e^{\lambda t} P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2$$

$$P_2(t) = \tfrac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2.1} e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Jadi solusi dari (2.16) adalah $P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$, untuk $n = 2$ (2.18)

Untuk mencari probabilitas kedatangan dengan n =3,4, . . . pada Persamaan (2.16) dengan proses yang serupa, diperoleh bahwa:

$$P_3(t) = \frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{3!} \quad , \quad P_4(t) = \frac{(\lambda t)^4 e^{-\lambda t}}{4!} \quad , \ldots \tag{2.19}$$

Sehingga dapat diambil suatu rumus umumnya adalah

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \qquad n = 0,1,2, \ldots \tag{2.20}$$

Jadi terbukti bahwa distribusi probabilitas untuk $P_n(t)$ yang merupakan peluang n kedatangan yang terjadi secara acak pada interval waktu t mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λt dengan λ rata-rata laju kedatangan. ■

Berikut ini diberikan teorema untuk menyatakan bahwa rata-rata laju pelayanan mengikuti distribusi eksponensial jika kedatangan mengikuti distribusi Poisson.

Teorema 2.2 (Sari, 2011: 20)**.** *Jika kedatangan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel acak waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter* $\frac{1}{\lambda}$

Bukti:

Diberikan $f(t)$ adalah fungsi densitas probabilitas dari interval waktu t antar kejadian yang berturut-turut, $t \geq 0$, dan $F(t)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari t.

Jika dimisalkan T adalah suatu variabel acak, yaitu waktu antar dua kedatangan, maka

$$P\{T > t\} = P\{\text{tidak ada kedatangan dalam waktu t}\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - \{\text{ waktu antar kedatangan} \leq t\}$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$$

Kemudian diambil $F(t)$ sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T, diperoleh:

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (2.21)$$

Sehingga fungsi densitas $f(t)$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \tag{2.22}$$

dengan parameter λ, diperoleh rata-rata fungsi pembangkit momennya, yaitu:

$$M_x(t)\text{=E}(e^{tx}) = \begin{cases} \int e^{tx}\,\text{f(t)dt} ; \text{t } kontinu \\ \sum e^{tx}\text{f(t)} \quad ; \text{t } \ diskrit \end{cases}$$

$$M_x(t)\text{=E}(e^{tx})\text{=}\int_0^\infty e^{tx}\ \lambda e^{-\lambda t}\text{dt} \quad = \int_0^\infty \lambda \text{e}^{-(\lambda-\text{x})\text{t}}\text{dt} \ = \lambda \int_0^\infty \text{e}^{-(\lambda-\text{x})\text{t}}\text{dt}$$

$$= \lambda \ \lim_{b\to\infty} \int_0^{\text{b}} \text{e}^{-(\lambda-\text{x})\text{t}}\ \text{dt} = \lambda \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(\lambda-\text{x})\text{t}}}{-(\lambda-x)}\Big]_0^b$$

$$= \lambda \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(\lambda-\text{x})\text{b}}}{-(\lambda-x)} - \frac{e^{-(\lambda-\text{x})0}}{-(\lambda-x)}$$

$$= \lambda \left(0 - \frac{1}{-(\lambda-x)}\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda-x}\right) = \frac{\lambda}{\lambda-x} \tag{2.23}$$

$$M_x{}'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-x)^2} \text{ dan } M_x{}''(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-x)^2} \tag{2.24}$$

karena T merupakan kurun waktu antar kedatangan, maka E(T) adalah ekspektasi waktu antar kedatangan diperoleh dari Persamaan (2.24) diperoleh:

$$M_T'(x) = \frac{\lambda}{(\lambda-x)^2} \ \text{ dan } \ M_T''(x) = \frac{2\lambda}{(\lambda-x)^3}$$

E(T) diperoleh dari:

$$\text{E(T)} = \ M_T'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda-0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{E(T}^2\text{)} = M_T''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda-0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

sehingga

$$Var(T) = E(\text{T}^2) - (\text{E(T)})^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ dan } \ E(T) \ = \frac{1}{\lambda} \qquad \blacksquare \tag{2.25}$$

Jadi, waktu antar kedatangan yang berurutan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Jika waktu antar kedatangan $\frac{1}{\lambda}$ maka jumlah kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah distribusi Poisson dengan rata-rata kedatangan adalah λ.

b. Model Kematian Murni

Dalam model kematian murni tidak ada proses kelahiraan pada suatu sistem. Pada model ini sebuah sistem dimulai dengan state $N, N-1, \dots, 2, 1$ dan terakhir pada state 0 (*extinction*). Proses kematian murni ditentukan oleh parameter kematian $\mu_{k,}$ untuk $k = 1,2, \dots, n$. Parameter μ_k merupakan operasi "laju kematian" atau pengaruh keberangkatan pada state k. Berikut definisi untuk membuktikan probabilitas pada model kematian murni mengikuti distribusi Poisson:

Definisi 2.5 (Osaki, 1992:141). *Jika proses stokastik* $\{X(t), t \geq 0\}$, *dengan* $X(t)$ *adalah banyaknya keberangkatan customer pada waktu t dengan* $t > 0$, *merupakan rantai Makov dengan peluang transisi yang tetap, ruang keadaan* $\{k, k = 0, 1, 2, \dots, n\}$, *dengan n bilangan bulat, maka berlaku:*

(i) $X(0) = N$

(ii) $P\{X(t+\Delta t) - X(t) = -1 \mid X(t) = k\} = \mu\Delta t + o(\Delta t)$

(iii) $P\{X(t+\Delta t) - X(t) \geq -2 \mid X(t) = k = o(\Delta t)$

maka proses tersebut dinamakan proses kematian murni dengan parameter $\mu_k, k = 0,1,2, \dots, n$. *Pada proses kematian murni saat state 0, hal ini menunjukkan tidak ada peristiwa yang terjadi.*

Berikut akan dijelaskan mengenai pembentukan rumus umum untuk probabilitas kematian murni:

Kejadian pada proses kematian murni sering terjadi pada interval waktu yang tak terbatas. Akan tetapi pada proses kematian murni, sebagian besar N kejadian terjadi di semua interval waktu kecuali status 0 dimana tidak ada kejadian yang terjadi. Oleh sebab itu, status 0 merupakan status penyerapan.

dimisalkan:

$P_n(t) = P\{X(t) = n \mid X(0) = N\}$, untuk $n = 0,1,2,\dots,N-1$

merupakan peluang transisi dengan menentukan asumsi (i) pada definisi 2.5,

kemudian diterapkan untuk menentukan nilai $P_n(t+\Delta t)$ sebagai berikut:

$$P_n(t+\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = n\}$$

$$= P\{X(t) = n\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = 0 \mid X(t) = n\}$$

$$+P\{X(t) = n+1\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = -1 \mid X(t) = n+1\}$$

$$+P\left\{X(t) = n+2\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = -2 \mid X(t) = n+2\right\} + \cdots$$

$$+P\left\{X(t) = n+i\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = -i \mid X(t) = n+i\right\}$$

$$P_n(t+\Delta t) = P\{X(t) = n\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = 0 \mid X(t) = n\}$$

$$+P\left\{X(t) = n+1\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = -1 \mid X(t) = n+1\right\}$$

$$+\sum_{i=2}^{N-1} P\left\{X(t) = n+i\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = -i \mid X(t) = n+i\right\}$$

$$= P_n(t)[1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[\mu\Delta t + o(\Delta t)] +$$

$$\sum_{i=2}^{N-1} P_{n+i}(t)o(\Delta t)$$

$$= P_n(t) - \mu\Delta t P_n(t) + o(\Delta t)P_n(t) + \mu\Delta t P_{n+1}(t) +$$
$$o(\Delta t)P_{n+1} + \sum_{i=2}^{N-1} P_{n+i}(t)o(\Delta t)$$

$$= P_n(t) - \mu\Delta t P_n(t) + \mu\Delta t P_{n+1}(t) \ + \sum_{i=2}^{N-1} P_{n+i}(t)o(\Delta t) \qquad (2.26)$$

Selanjutnya memindahkan $P_n(t)$ ke ruas kiri, maka diperoleh

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = -\mu\Delta t P_n(t) + \mu\Delta t P_{n+1}(t) + \sum_{i=2}^{N-1} P_{n+i}(t)o(\Delta t) \qquad (2.27)$$

Membagi Persamaan (2.27) dengan Δt , karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, ambil limit $\Delta t \to 0$, dan diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\mu\Delta t P_{n+1}(t)}{\Delta t} - \frac{\mu\Delta t P_n(t)}{\Delta t} + \sum_{i=2}^{N-1}\frac{P_{n+i}(t)o(\Delta t)}{\Delta t}\right] \qquad (2.28)$$

Dengan definisi 2.3 dan 2.4, maka Persamaan (2.28) menjadi

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t),\ n = 1,2,3,\dots,N-1 \qquad (2.29)$$

Berdasarkan definisi 2.5 pada asumsi (i) menyatakan bahwa sistem antrean hanya mempunyai N *customer* dengan tidak ada *customer* yang datang. Jumlah N *customer* ini membatasi nilai n dari 0 hingga $N-1$. Pada Persamaan (2.29) telah mencakup nilai $n = 1,2,3,\dots,N-1$. untuk itu diperlukan nilai $P_N(t)$ untuk melengkapi Persamaan (2.29)

Dari asumsi (i) $X(0) = N$, untuk menentukan nilai $P_N(t)$ maka dengan proses stokastik didapatkan

$$P_N(t) = P\{X(t) = n \mid X(0) = N\}, \qquad \text{untuk } n = N$$

Merupakan peluang transisi, yang kemudian diterapkan untuk menentukan nilai $P_N(t+\Delta t)$ dengan definisi 2.5 didapatkan

$$P_N(t+\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = N\}$$

$$= P\{X(t) = N\}P\{X(t+\Delta t) - X(t) = 0 \mid X(t) = N\}$$

$$= P_N(t)[1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)]$$

$$P_N(t+\Delta t) = P_N(t) - \mu\Delta t P_N(t) + o(\Delta t)P_N(t)$$

$$P_N(t+\Delta t) - P_N(t) = -\mu\Delta t P_N(t) + o(\Delta t)P_N(t) \tag{2.30}$$

Selanjutnya, membagi (2.30) dengan Δt, karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, ambil limit $\Delta t \rightarrow 0$, dan diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_N(t+\Delta t) - P_N}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{-\mu\Delta t P_N(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)P_N(t)}{\Delta t}\right] \tag{2.31}$$

Dengan definisi 2.3 dan definisi 2.4, maka Persamaan (2.31) menjadi

$\frac{dP_N(t)}{dt} = -\mu P_N(t)$, untuk $n = N$ (2.32)

Penyelesaian dari Persamaan (2.32) adalah

$$\frac{dP_N(t)}{P_N(t)} = -\mu dt$$

$$\ln(P_N(t)) = -\mu t$$

$$P_N(t) = e^{-\mu . t} \tag{2.33}$$

Selanjutnya dari Persamaan (2.33) untuk $n = N - 1$, maka dengan Persamaan (2.29) diperoleh:

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} = \mu P_N(t) - \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu P_N(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu e^{-\mu.t}$$

dikalikan kedua ruas dengan $e^{\mu.t}$, maka diperoleh

$$e^{\mu.t}\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu e^{\mu.t}P_{N-1}(t) = \mu$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu.t}P_{N-1}(t)) = \mu$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan, diperoleh

$$e^{\mu.t}P_{N-1}(t) = \int \mu$$

$$e^{\mu.t}P_{N-1}(t) = \mu t + c$$

P_{N-1} adalah fungsi probabilitas, maka nilai $c = 0$. Jadi nilai P_{N-1} yaitu

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu.t} \quad (2.34)$$

Jika $n = N - 2$, maka dari Persamaan (2.29) diperoleh

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} = \mu P_{N-1}(t) - \mu P_{N-2}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu^2 t e^{-\mu.t}$$

dikalikan kedua ruas dengan $e^{\mu.t}$, maka diperoleh

$$e^{\mu.t}\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu e^{\mu.t}P_{N-2}(t) = \mu^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu.t}P_{N-2}(t)) = \mu^2 t$$

selanjutnya kedua ruas diintegralkan, diperoleh

$$e^{\mu.t}P_{N-2}(t) = \int \mu^2 t\, dt$$

$$e^{\mu.t}P_{N-2}(t) = \frac{\mu^2 t^2}{2} + c$$

P_{N-2} adalah fungsi probabilitas, maka nilai $c = 0$. Jadi nilai P_{N-2} yaitu

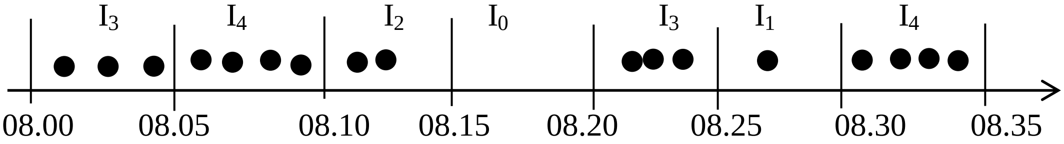
$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2!} e^{-\mu t} \tag{2.35}$$

Berdasarkan Persamaan (2.34) dan (2.35), maka diperoleh rumus umum probabilitas untuk kematian murni, yaitu

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n}}{(N-n)!} e^{-\mu t} \tag{2.36}$$

6. Tingkat Kedatangan

Berasarkan pengamatan A.K. Erlang di Copenhagen Telephone dimana pola permintaan *customer* telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus (*continuous of time*) dapat dibagi ke dalam beberapa interval waktu yang sama (*fixed interval*). Dalam hal ini, permintaan *customer* terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus dan disebut sebagai proses *Poisson* (Siswanto, 2007:219). Berikut ilustrasi proses *Poisson* pada keadatangan *customer* yang terjadi dalam interval waktu tetap selama kurun waktu yang tidak terputus.



Gambar 2.6 Ilustrasi frekuensi jumlah kedatangan *customer* di beberapa interval

Berdasarkan ilustrasi proses *Poisson* pada Gambar 2.6 menunjukkan jumlah kedatangan *customer* sebanyak 17 yang datang pada rentang waktu pukul 08.00 – 08.35. Kurun waktu proses *Poisson* tersebut adalah 35 menit terbagi menjadi tujuh interval yang masing-masing terdapat *customer*, kecuali pada I_0 tidak ada *customer* yang datang. Jika I menunjukkan banyaknya interval waktu maka

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{2.37}$$

Dengan I_i adalah interval ke- i. Jika N menunjukkan banyaknya *customer* yang datang selama I interval dan pada I_i terdapat K_i *customer*, maka banyaknya *customer* selama kurun waktu I adalah:

$$N = \sum_{i=1}^{n} K_i I_i \tag{2.38}$$

dengan K_i menunjukkan banyaknya *customer* yang datang pada interval I. Pada proses yang sama, masing-masing interval terdapat *customer* yang datang secara acak. Jika setiap interval dibagi menjadi n subinterval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada setiap interval waku tetap dapat dinyatakan dengan distribusi *Poisson* (Siswanto, 2007:220). Dengan demikian, rata-rata laju kedatangan *customer* pada setiap interval waktu tersebut dapat diestimasi dengan

$$\lambda = \frac{N}{I} \tag{2.39}$$

Pada Gambar 2.6 distribusi kedatangan *customer* pada setiap interval dapat dijabarkan melalui penjelasan berikut:

a. Terdapat 1 interval yang memiliki 0 *customer* pada I_0

b. Terdapat 1 interval yang memiliki 1 *customer* pada I_1

c. Terdapat 1 interval yang memiliki 2 *customer* pada I_2

d. Terdapat 2 interval yang memiliki 3 *customer* pada I_3

e. Terdapat 2 interval yang memiliki 4 *customer* pada I_4

Selanjutnya menghitung rata-rata laju kedatangan *customer* pada setiap interval, yang didapatkan pada tabel berikut:

Tabel 2.1 Frekuensi banyaknya kedatangan customer pada setiap interval

Interval	Banyaknya kedatangan pasien pada *Phase* 1 interval I_i (K_i)	Frekuensi atau banyaknya interval (I_i)	Banyaknya pasien yang datang selama kurun waktu I_i $(K_i \times I_i)$
I_0	0	1	0
I_1	1	1	1
I_2	2	1	2
I_3	3	2	6
I_4	4	2	8
		$\sum_{i=0}^{4} I = 7$	$\sum_{i=0}^{9} N = 17$

Berdasarkan Persamaan (2.39) maka rata-rata laju kedatangan *customer* adalah:

$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{17}{7} = 2{,}428$ *customer*/ 5 menit= $0,485$ *customer*/ 5 menit.

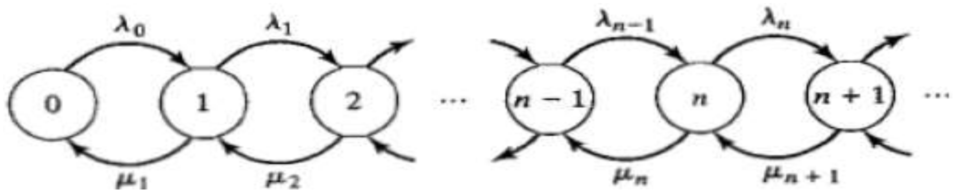
Artinya setiap menit rata-rata laju kedatangan *customer* adalah $0{,}485$

7. Model Antrean

a. Model Antrean Poisson Umum

Model antrean umum yang menggabungkan kedua kedatangan dan kepergian berdasarkan asumsi Poisson, waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Eksponensial.

Pengembangan model umum didasarkan pada situasi antrean yang dalam kondisi *steady state* yang dicapai setelah sistem beroperasai dalam jangka waktu yang panjang. Model secara umum diasumsikan bahwa rata-rata kedatangan dan kepergian merupakan *state* yang dependen, yang artinya bahwa kedua aspek tersebut bergantung banyak *customer* pada sarana antrean. Misalnya terjadi pada pintu tol,dimana petugas cenderung mempercepat pengumpulan tol pada jam sibuk. Berikut adalah diagram transisi antrean Poisson:



Gambar 2.7 Diagram Transisi

dengan

n: banyak *customer* dalam sistem

λ_n: rata-rata kedatangan n *customer* pada sistem

μ_n: rata-rata kepergian n *customer* pada sistem

P_n: peluang *steady state* dari n *customer* pada sistem

Model antrean Poisson umum diperoleh P_n sebagai fungsi dari λ_n dan μ_n. P_n digunakan untuk mengetahui rata-rata panjang antrean, waktu mengantre, dan rata-rata pemanfaatan fasilitas. Probabilitas P_n ditentukan dengan menggunakan diagram transisi. Berikut adalah intepretsi dari Gambar 2.7 (Taha,2007: 564)

a. Sistem antrean pada *state* n ketika banyaknya *customer* dalam sistem adalah n.

b. Probabilitas lebih dari satu kejadian selama interval Δt yang lebih kecil mendekati nol dinyatakan $\Delta t \to 0$. Hal ini berarti untuk $n > 0$, status n dapat dirubah hanya untuk dua *state* yang mungkin:

$n + 1$ ketika kedatangan terjadi pada laju λ_n

$n - 1$ ketika kepergian terjadi pada laju μ_n

c. *State* 0 hanya dapat berubah ke *state* 1 ketika terjadi kedatangan pada laju λ_0 dan μ_0 tidak terdefinisi karena tidak ada kepergian yang terjadi jika dalam sistem kosong.

Pada kondisi *steady state,* untuk $n > 0$, laju yang diharapkan dari aliran yang masuk dan keluar pada *state n* harus sama. Berdasarkan intepretasi diatas bahwa n dapat diubah hanya pada *state* $n - 1$ dan $n + 1$, diperoleh

$$\begin{pmatrix} \text{laju yang diharapkan pada} \\ \text{aliran yang masuk } state\ n \end{pmatrix} = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} \tag{2.40}$$

Demikian pula,

$$\begin{pmatrix} \text{laju yang diharapkan pada} \\ \text{aliran yang keluar } state\ n \end{pmatrix} = (\lambda_n + \mu_n) P_n \tag{2.41}$$

Persamaan (2.41) dan (2.42), karena laju yang diharapkan dari aliran yang masuk dan keluar pada *state n* harus sama, maka diperoleh **persamaan keseimbangan**,

$$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n, \text{ untuk } n = 1,2, \ldots \tag{2.42}$$

Berdasarkan Gambar 2.7, untuk $n = 0$, maka dengan menggunakan Persamaan (2.42) diperoleh:

$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \tag{2.43}$$

Selanjutnya untuk $n = 1$ dengan menggunakan Persamaan (2.42) diperoleh:

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1 \tag{2.44}$$

Mensubtitusikan Persamaan (2.43) kedalam Persamaan (2.44), maka diperoleh persamaan:

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \tag{2.45}$$

Berdasarkan Persamaan (2.43) dan (2.45), maka didapatkan rumus umum untuk P_n, yaitu:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\cdots\mu_1} P_0 \quad \text{untuk } n=1,2,3,.. \tag{2.46}$$

Untuk nilai P_0 ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{2.47}$$

a. Ukuran *Steady State* dari Kinerja

Peluang *steady state* untuk ukuran atau parameter suatu sistem adalah dengan menentukan ukuran keefektifan sistem itu sendiri.

Ukuran yang biasa digunakan pada kinerja dalam situasi antrean adalah:

L_s = Rata-rata banyaknya *customer* dalam sistem

L_q = Rata-rata banyaknya *customer* dalam antrean

W_q = Rata-rata waktu menunggu dalam antrean

W_s = Rata-rata waktu menunggu dalam sistem

$\bar{c}$ = Rata-rata banyaknya *server* yang sibuk

n = Banyaknya *customer* dalam sistem.

Disebut sistem termasuk antrean dan fasilitas pelayanan. Menurut (Taha, 2007:570) ukuran-ukuran probabilitas *steady state* dari n dalam sistem, P_n sebagai berikut:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n \tag{2.48}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)\, P_n \tag{2.49}$$

Hubungan antara L_s dan W_s (begitu pula L_q dan W_q) dikenal sebagai **Little's formula**, yaitu:

$$L_s = \lambda_{eff} W_s \tag{2.50}$$

$$L_q = \lambda_{eff} W_q \tag{2.51}$$

Hubungan rumus ini berlaku dalam kondisi yang cukup umum. Parameter λ_{eff} adalah laju kedatangan efektif pada sistem. Persaman ini merupakan laju kedatangan λ ketika semua kedatangan *customer* dapat bergabung dalam sistem dalam arti tidak ada kedatangan *customer* yang tidak dapat masuk sistem. Sebaliknya, jika beberapa *customer* tidak bergabung karena sistem penuh (misal, tempat parkir), maka $\lambda_{eff} < \lambda$.

Hubungan langsung antara W_s dan W_q didefinisikan sebagai berikut (Taha, 2007:570):

$$\begin{pmatrix}\text{Waktu menunggu}\\ \text{yang diperkirakan}\\ \text{dalam sistem}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Waktu menunggu}\\ \text{yang diperkirakan}\\ \text{dalam antrean}\end{pmatrix} + (\text{Waktu pelayanan})$$

Diketahui μ adalah rata-rata laju pelayanan, maka waktu pelayanan yang diperkirakan adalah $\frac{1}{\mu}$. Berdasarkan definisi diatas diperoleh:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.52)$$

Selanjutnya, mengalikan kedua ruas Persamaan (2.52) dengan λ_{eff} untuk mendapatkan hubungan antara L_s ke L_q. Demikian dari *Little's formula* diperoleh:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.53)$$

Berdasarkan definisi, selisih antara (L_s) dan (L_q) harus sama dengan rata-rata banyaknya server yang sibuk $(\bar{c}) = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$ (2.54)

Misalkan c adalah banyaknya *server*, dapat diperoleh kepadatan *server* (ρ) dimana

$$\rho = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{\lambda_{eff}}{c\mu} \quad (2.55)$$

Solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean diatas diturunkan dengan asumsi bahwa parameter-paramater λ_n dan μ_n adalah sedemikian sehingga kondisi *steady state* terpenuhi, jika

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \quad (2.56)$$

Kondisi *steady state* terpenuhi jika ρ<1. Jika nilai ρ>1 maka laju kedatangan lebih cepat dari pada laju pelayanan. Hal ini berarti panjang antrean yang diharapkan bertambah tanpa batas sehingga kondisinya tidak stabil.

b. Model Antrean *Single Server*

Terdapat dua model dari antrean *single server* $(c = 1)$. Model pertama tidak ada batasan pada jumlah maksimum dalam sistem, dan model kedua diasumsikan memiliki kapasitas sistem yang terbatas. kedua model tersebut diasumsikan memiliki kapasitas sistem yang tak terbatas. Laju kedatangan terjadi pada λ *customer* per satuan waktu dan laju pelayanan adalah μ *customer* per satuan waktu. Model ini memiliki notasi Kendall (M/M/1) : (GD/∞/∞) dengan waktu antar kedatangan dan pelayanan berdistribusi eksponensial, terdapat satu *server* dengan disiplin antrean khusus, yaitu disimbolkan GD (*General Dicipline*) digunakan sebagai notasi (Taha, 2007: 573).

Dengan menggunaan notasi dari model yang digeneralisasikan, diperoleh:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu\end{array}\right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Jika λ_{eff} adalah laju kedatangan efektif pada sistem dan λ_{toss} adalah laju kedatangan yang tidak dapat masuk kedalam sistem, maka $\lambda_{eff} = \lambda$ dan $\lambda_{toss} = 0$. Hal ini karena semua *customer* yang datang dapat masuk kedalam sistem dan tidak ada *customer* yang terbuang. Misal $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, pernyataan untuk nilai P_n dari Persamaan (2.46) menjadi

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 = \rho^n P_0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.57}$$

Nilai P_0 ditentukan dengan menggunakan Persamaan (2.57) yaitu jumlah semua nilai P_n sama dengan 1,untuk $n = 0, 1, 2, \dots$

Sehingga diperoleh:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 1$$

$$P_0 + \rho^1 P_1 + \rho^2 P_2 + \rho^3 P_3 + \cdots + \rho^n P_n = 1$$

$$P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^n) = 1$$

Persamaan tersebut merupakan deret geometri, maka dapat disubtitusikan ke dalam rumus deret geometri tak hingga yang didefinisikan sebagai berikut:

$S_\infty = \left(\frac{a}{1-r}\right)$, untuk $\rho < 1$, maka diperoleh

$$P_0 = \frac{1}{1-\rho} = 1$$

$$P_0 = 1 - \rho \tag{2.58}$$

Rumus umum dari P_n diperoleh dengan mensubtitusikan Persamaan (2.58) ke dalam Persamaan (2.57), sehingga diperoleh:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, n = 1, 2, \ldots \tag{2.59}$$

yang merupakan distribusi geometris.

Persyaratan matematis dari P_n, dengan $\rho < 1$ untuk memastikan konvergensi dari deret geometri $[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots]$. Intinya bahwa $\rho < 1$ atau $\lambda < \mu$ menyatakan bahwa laju kedatangan harus lebih kecil dari laju pelayanan agar tercapai sistem antrean yang *steady state*.

Ukuran dari kinerja L_s diperoleh dengan mensubtitusikan Persamaan (2.59) ke (2.48), didapatkan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\ (1-\rho)\rho^n$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^n$$

$$= (1-\rho)[\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots)$$

$$= (1-\rho)\rho[1 + 2\rho^1 + 3\rho^2 + \cdots)$$

$$= (1-\rho)\,\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\,\rho^{n-1}$$

$$= (1-\rho)\,\rho\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^n$$

$$= (1-\rho)\,\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= (1-\rho)\,\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Jadi $L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$ (2.60)

Untuk nilai $\lambda_{eff} = \lambda$ dimana tidak ada batas laju kedatangan, ukuran kinerja yang tersisa dapat ditentukan dengan ***Little's formula***. Rumus W_s dapat dicari dengan mensubtitusikan rumus (2.60) ke Persamaan (2.50), diperoleh

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda}$$

$$= \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda(1-\frac{\lambda}{\mu})}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(\frac{\lambda\mu-\lambda^2}{\mu}\right)} = \frac{\lambda}{\lambda\mu-\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Jadi $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$ (2.61)

Selanjutnya untuk menentukan rumus W_q dengan mensubtitusikan Persamaan (2.61) ke Persamaan (2.52), diperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - (\mu - \lambda)}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \times \frac{1/\mu}{1/\mu}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})} = \mu \frac{\rho}{(1 - \rho)}$$

Jadi $W_q = \mu \frac{\rho}{(1-\rho)}$ (2.62)

Untuk menentukan rumus L_q dengan mensubtitusikan Persamaan (2.62) ke Persamaan (2.51), diperoleh

$$L_q = \lambda W_q$$

$$= \lambda \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

$$= \rho \frac{\rho}{(1 - \rho)}$$

$$= \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}$$

Jadi $L_q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$ (2.63)

Untuk menentukan banyak pelayanan yang sibuk atau kepadatan *customer* ($\bar{c}$) dengan mensubtitusikan Persamaan (2.60) dan (2.63) ke Persamaan (2.54) diperoleh

$$\bar{c} = L_s - L_q$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

$$= \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)} = \rho$$

Jadi $\bar{c} = \rho$ (2.64)

c. Model Antrean *Multiple Server*

Model antrean ini terdapat *c server* yang tersusun secara paralel yang memiliki notasi Kendall (M/M/c) : (GD/∞/∞) dengan waktu antar kedatangan dan pelayanan terdistribusi eksponensial. Laju kedatangan terjadi pada λ *customer* per satuan waktu dan laju pelayanan adalah μ dengan disiplin antrean khusus, yaitu disimbolkan GD (*General Dicipline*). $\lambda_{eff} = \lambda$ karena banyaknya kedatangan *customer* tidak terbatas dalam sistem.

Akibat dari *c server* yang tersusun secara paralel adalah bertambahnya laju fasilitas pelayanan yang memungkinkan beberapa pelayanan dilakukan dalam waktu yang bersamaan. Berdasarkan penggunaan notasi dari model yang digeneralisasikan, diperoleh

$$\lambda_n = \lambda,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Sehingga probabilitas n sebagai berikut:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0 = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} P_0 & n < c \\ \\ \frac{\lambda^n}{(\prod_{i=1}^{c} i\mu)(c\mu)^{n-c}} P_0 = \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0 & n \geq c \end{cases} \quad (2.65)$$

misalkan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ dan diasumsikan $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, nilai P_0 ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ dengan mensubtitusikan Persamaan (2.65), seperti berikut

$$\left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}\right\} P_0 = 1$$

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}}\right\}^{-1}$$

Misalkan $j = n - c$, maka diperoleh persamaan berikut

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j\right\}^{-1}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j$ merupakan deret geometri tak hingga, sehingga

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - {\rho}/{c}}\right)\right\}^{-1}, \frac{\rho}{c} < 1 \quad (2.66)$$

Berikutnya adalah menentukan ukuran keefektifan dari model antrean tersebut , yang meliputi nilai L_q, L_s, W_q, dan W_s.

Untuk nilai L_q dapat ditentukan dengan menggunakan Persamaan (2.49)

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c)\, P_n$$

dimisalkan untuk $k = n - c$, sehingga dari Persamaan (2.49) jika disubtitusikan menjadi

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_{k+c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c!\, c^k} P_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c!\, c^k} P_0$$

$$= \frac{\rho^c P_0}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^k}{c^k}$$

$$= \frac{\rho^{c+1} P_0}{c!\, c} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k-1}}{c^{k-1}}$$

$$= \frac{\rho^{c+1} P_0}{c!\, c} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

dimana untuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k}$$

$$= \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

sehingga,

$$L_q = \frac{\rho^{c+1} P_0}{c!\, c} \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

$$= \frac{\rho^{c+1} P_0}{c!\, c \left(\frac{c-\rho}{c}\right)^2}$$

$$= \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!\, c^2 \frac{(c-\rho)^2}{c^2}}$$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

Jadi $L_q = \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}$ (2.67)

Nilai L_s dengan mensubtitusikan Persamaan (2.67) kedalam Persamaan (2.53), diperoleh

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= L_q + \rho$$

$$= \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!\,(c-\rho)^2} + \rho$$

Jadi $L_s = \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!(c-\rho)^2} + \rho$ (2.68)

Nilai W_q ditentukan dengan mensubtitusikan Persamaan (2.68) kedalam Persamaan (2.51), diperoleh

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}}{\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu} \rho^c P_0}{\lambda (c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

$$= \frac{\lambda \rho^c P_0}{\lambda \mu (c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

Jadi $W_q = \frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2}$ (2.69)

Nilai W_s ditentukan dengan mensubtitusikan Persamaan (2.69) kedalam Persamaan (2.52), diperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = \frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} + \frac{1}{\mu} \quad (2.70\ )$$

d. Model Antrean M/G/1

Model (M/G/1) : (GD/∞/∞) atau disebut juga dengan formula *Pollazck Khintchine* (P-K) adalah suatu formula dimana akan diperoleh pada situasi pelayanan tunggal yang memiliki tiga asumsi sebagai berikut (Kakiay, 2004:139):

1. Kedatangan poisson dengan rata-rata kedatangan λ.
2. Distribusi waktu pelayanan umum atau *general* dengan ekspektasi rata-rata pelayanan $E[t] = \frac{1}{\mu}, E[t]^2 = \frac{1}{\mu^2}$, dan varian var[$t$].
3. Keadaan *steady state* dimana $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Rata-rata sistem yang dilayani berhubungan dengan rata-rata jumlah atau ukuran satuan yaitu dengan menggunaka *Little's formula* yang diperoleh dari:

Misalkan P_n adalah probabilitas dari n kedatangan selama waktu tunggu T.

$$P_n = \int_0^\infty P_r \left\{ n\ arrival\ selama\ waktu\ tunggu\ T\ \middle|\ T = t \right\} dW_s(t)$$

dimana W_t adalah fungsi distribusi kumulatif dari waktu tunggu, T_q adalah waktu *customer* menunggu dalam antrean dan T adalah waktu total *customer* menunggu dalam sistem ($T = T_q + t$, dimana t adalah waktu pelayanan dengan T, T_q, dan t adalah variabel acak) dan $W_q = E[T_q]$ serta $W_s = E[T]$.

Maka,

$$P_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_s(t)\,, n \geq 0 \text{ dan } L_s = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

Dimana n adalah variabel acak dari jumlah *customer* dalam sistem pada saat keadaan *steady state* dan L_s adalah nilai ekspektasinya. Sehingga diperoleh:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n-1)!} (\lambda t)^n dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dW_s(t)$$

$$= \lambda \int_0^\infty t dW_s(t)$$

$$L_s = \lambda E[t] \tag{2.71}$$

Untuk mencari W_s dengan menggunakan Persamaan (2.50), diperoleh

$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$

e. Model Antrean M/G/c

Model (M/G/c) : (GD/∞/∞) adalah model antrean dengan pelayanan ganda, distribusi kedatangan *Poisson* dan distribusi pelayanan *general.* Probabilitas dari banyaknya *customer* dalam model (M/G/c) : (GD/∞/∞) diperoleh dari rumus:

$$L_s = L_q + c$$

Untuk ekspektasi waktu tunggu dalam sistem model (M/G/c) diperoleh dari Persamaan (2.50):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

Untuk waktu tunggu dalam antrean diperoleh dari persamaan:

$$\pi_n^q = P_r\{n\ dalam\ antrean\ setelah\ kepergian\}$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_s(t)$$

dengan probabilitas banyaknya customer dalam antrean yaitu L_q didapatkan:

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n^q = \int_0^\infty \lambda t dW_q(t) = \lambda W_q \tag{2.72}$$

Menurut Shirlay & Ross (1978: 832) sebagaimana dikutip oleh Sugito dan Marissa (2009:113) nilai W_q dapat dicari dengan:

$$W_q = \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda E[t])^2\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda E[t])^n}{n!}+\frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t]}\right]}$$

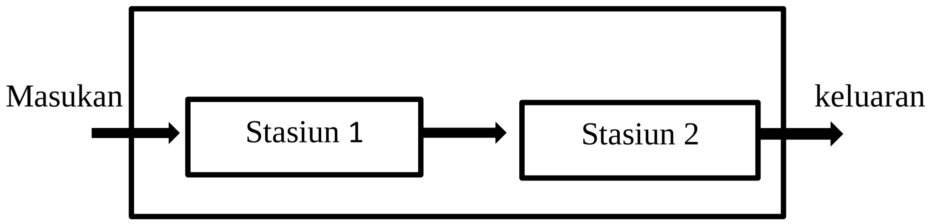
(2.73)

Dengan W_q =ekspektasi waktu tunggu dalam antrean

f. Model Antrean Tandem atau Seri

Model antrean tandem atau seri terdiri dari beberapa stasiun pelayanan dimana *cutomer* harus melalui semua sistem antrean secara berurutan sebelum menyelesaikan pelayanan. Model antrean seri di uraikan melalui distribusi tertentu yang menunjukkan kedatangan kedatangan *customer* pada suatu tempat dengan menggunakan sistem antrean tersebut (Kakiay, 2004: 189).

Sistem antrean seri yang terdiri dari dua stasiun pelayanan dapat terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.8 Sistem antrean seri dua stasiun

Setiap *cutomer* yang datang harus melalui tahapan pelayanan di stasiun 1 selanjutnya ke stasiun 2. Pada antrean seri dua stasiun, antrean tidak diizinkan berada didepan stasiun 1 atau stasiun 2 saja. Waktu antar pelayanan masing-masing stasiun mengikuti distribusi eksponensial dengan laju pelayanan adalah ρ. Laju kedatangan mengikuti distribusi poisson dengan laju kedatangannya adalah λ.

Pengembangan model ini mengharuskan pertama-tama keadaan sistem yang setiap saat diidentifikasi. Hal ini dapat dicapai jika setiap stasiun dalam keadaan bebas, sibuk, atau *customer* tertahan di stasiun 1 karena *customer* pada stasiun ini telah selesai dilayani namun stasiun 2 masih terdapat *customer* yang sedang dilayani. Berdasarkan keadaan tersebut maka dapat dinyatakan melalui simbol 0,1, b yang menandai bebas, sibuk, dan ditahan. Dengan demikian keadaan dalam aistem antrean ini dapat dinyatakan:

$$\{(i,j)\} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(b,1)\}$$

Didefinisikan $P_{ij}(t)$ sebagai probabilitas bahwa sistem tersebut berada dalam keadaan (i,j) pada waktu t. Probabilitas transisi antara keadaan saat t dan $t+h$ tidak mungkin samadengan 0, dimana h adalah sebuah kenaikan positif dalam waktu. Sehingga diperoleh persamaan:

$$P_{00} = \frac{2}{A}$$

$$P_{01} = \frac{2\rho}{A}$$

$$P_{10} = \frac{\rho^2 + 2\rho}{A}$$

$$P_{11} = P_{b1} = \frac{\rho^2}{A}$$

dengan $A = 3\rho^2 + 4\rho + 2$

Jumlah customer yang diperkirakan didalam sistem antrean dapat dinyatakan dengan:

$$L_s = 0(P_{00}) + 1(P_{01} + P_{10}) + 2(P_{11} + P_{b0})$$

$$= 0\left(\frac{2\rho}{A}\right) + 1\left(\frac{2\rho}{A} + \frac{\rho^2 + 2\rho}{A}\right) + 2\left(\frac{\rho^2}{A} + \frac{\rho^2}{A}\right)$$

$$= \frac{5\rho^2 + 4\rho}{A}$$

Jadi $L_s = \frac{5\rho^2+4\rho}{A}$ (2.74)

(Taha, 1997: 214-215).

B. Uji Distribusi Kolmogorov-Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk menguji apakah distribusi data sampel yang teramati sesuai dengan distribusi teoretis tertentu atau tidak. Uji Kolmogorov-Smirnov beranggapan bahwa distribusi data yang diuji bersifat kontinu dan sampel diambil dari populasi secara acak. Prinsip uji Kolmogorov-Smirnov adalah menghitung selisih absolut antara fungsi distribusi frekuensi kumulatif sampel [$F_s(x)$] dan fungsi distribusi kumulatif teoretis [$F_t(x)$] pada masing-masing interval kelas. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov merupakan selisih absolute terbesar antara $F_s(x)$ dengan $F_t(x)$ yang disebut D (deviasi maximum) dirumuskan dengan (Quadratullah, 2014:218).

$$D = max|F_s(x_i) - F_t(x_i)|, \text{ dimana } i = 1,2,....n.$$

Menurut (Quadratullah, 2014:218), terdapat beberapa langkah dalam uji Kolmogorov-Smirnov yaitu:

1) Menentukan hipotesis uji

H_0 : Laju kedatangan pasien berdistribusi Poisson

H_1 : Laju kedatangan pasien tidak berdistribusi Poisson

2) Membandingkan nilai statistik D dengan nilai kritis pada tabel kuantil statistik Kolmogrof-Smirnov *(D-tabel)*, pada ukuran sampel n dan tingkat signifikan α

3) H_0 diterima, jika nilai $p \geq \alpha$ atau $D \leq D$-*tabel* yang berarti distribusi data sampel yang teramati memiliki distribusi yang sama dengan distribusi teoristis yang dimaksud.

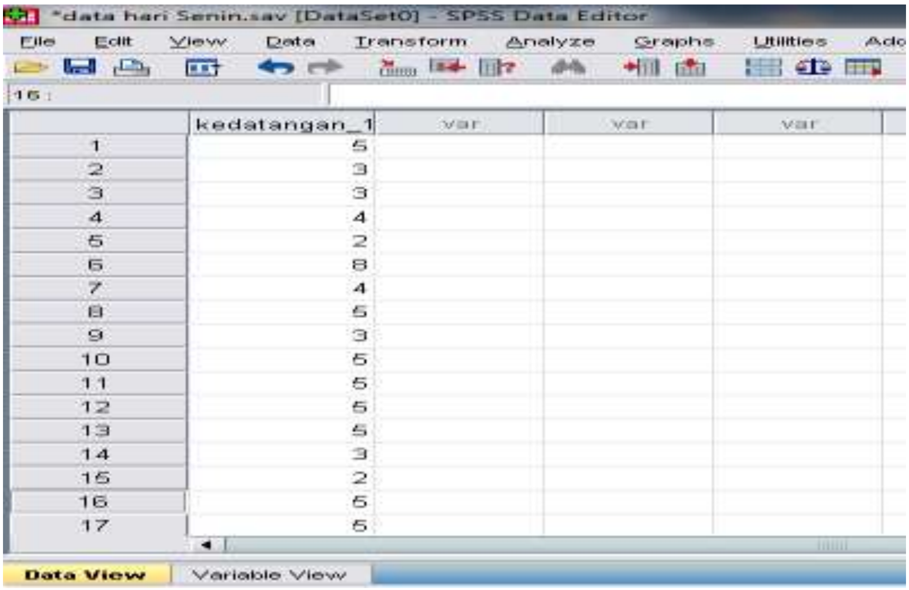
   H_0 ditolak, jika $D > D - tabel$ yang berarti distribusi sampel tidak sesuai dengan distribusi teoristis.

Uji Kolmogorov-Smirnov dapat digunakan untuk menguji sampel yang sangat kecil. Hal ini menunjukkan bahwa uji Kolmogorov-Smirnov cenderung sangat kuat untuk penyimpangan kecil pada distribusi normal ketika ukuran sampel besar.

C. Program MS.Excel

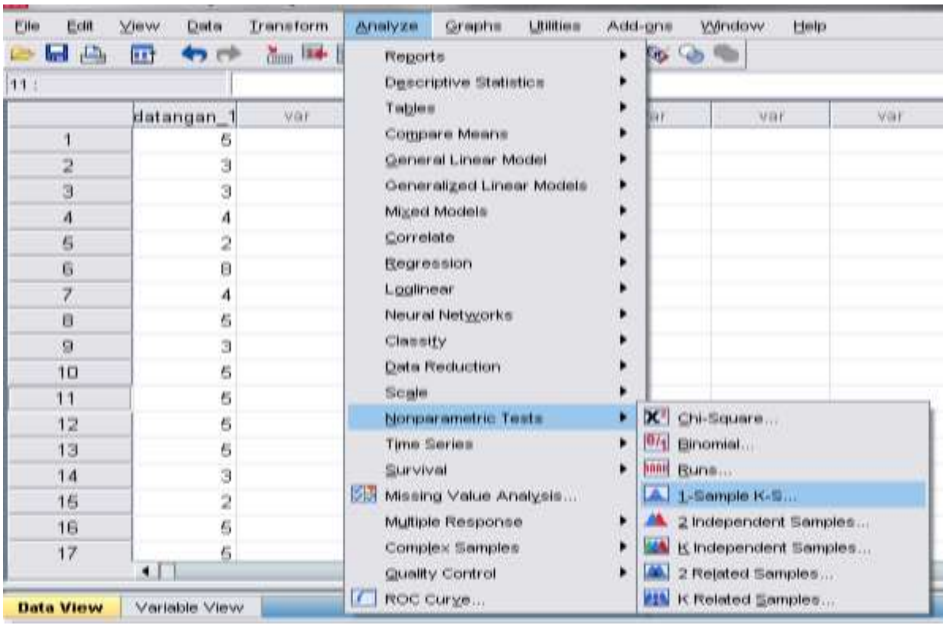
Langkah-langkah dalam uji Kolmogorov-Smirnov dengan menggunakan program MS.Excel sebagai berikut:

1. Masukkan data



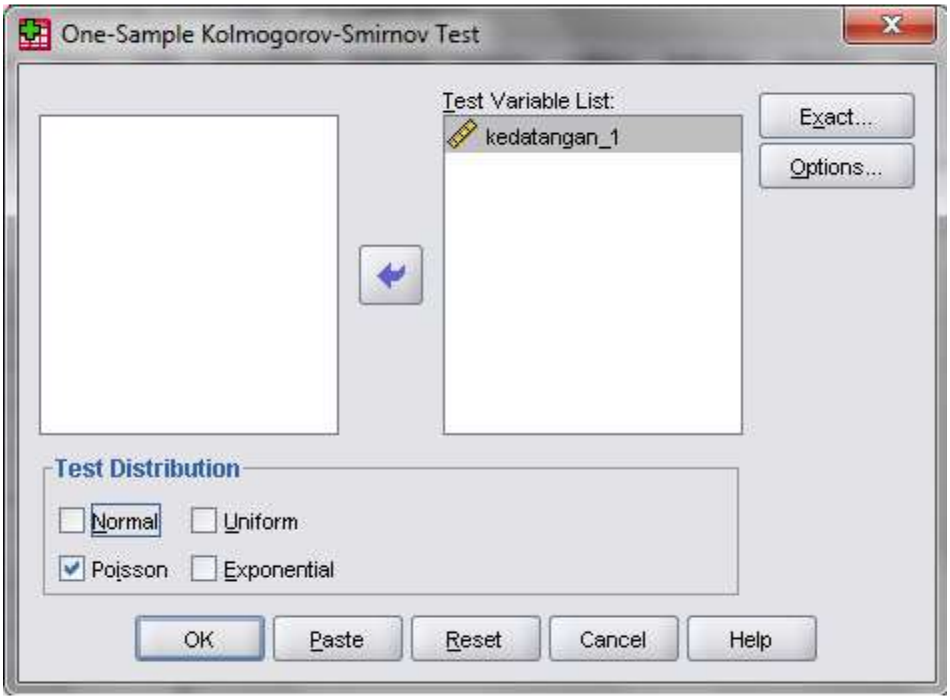
Gambar 2.9 Tampilan input data pada program SPSS

1. Klik *Analize* > *Nonparemetric Tes*t > *1-Sample K-S*



Gambar 2.10 Analisis uji Kolmogorov-Smirnov

2. Muncul kotak dialog One-Sample Kolmogorov-Smirnov test. Pindahkan data yang akan duji ke *Test Variable List* dengan klik tanda panah. Kemudian, pilih Poisson pada *Test Distribution* dan klik OK.



Gambar 2.11 Uji distribusi Poisson

3. Output dari uji tersebut akan muncul sebagai berikut:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		kedatangan_1
N		36
Poisson Parameter[a]	Mean	4.78
Most Extreme Differences	Absolute	.095
	Positive	.095
	Negative	-.036
Kolmogorov-Smirnov Z		.571
Asymp. Sig. (2-tailed)		.901

a. Test distribution is Poisson.

Gambar 2.12 Output uji Kolmogorov-Smirnov

Berikut adalah intepretasi dari *output* uji Kolmogorov-Smirnov pada gambar 2.12:

a. *N* menyatakan jumlah data sample yang diuji Kolmogorov-Smirnov.

b. Poisson Parameter Mean menyatakan parameter (rata-rata laju kedatangan atau pelayanan) *customer* per satuan waktu.

c. Most Extreme Differences Absolute menyatakan nilai statistik *D* pada Uji Kolmogorov-Smirnov. Nilai *Absolut* dari *ourput* diatas adalah 0,095.

d. Most Extreme Differences Positif merupakan bilangan positif terbesar dikolom $F_s(x_i) - F_t(x_i)$. Nilai *Positive* dari *ourput* diatas adalah 0,095.

e. Most Extreme Differences Negative merupakan bilangan positif terkecil dikolom $F_s(x_i) - F_t(x_i)$. Nilai *Negative* dari *ourput* diatas adalah -0,036

f. Nilai Kolmogorov-Smirnov *Z* pada hasil *output* tersebut sebesar 0,571. Hal ini berarti *p-value* > 0,05, sehingga H_0 diterima dan data terdistribusi secara normal.

g. Asymp. Sig. (2-tailed) merupakan *p-value* yang dihasilkan dari uji H_0 . Pada hasil *output* nilai Asymp. Sig. (2-tailed) sebesar 0,901. sehingga memenuhi asumsi normalitas karena nilainya diatas 0,05.

C. Simulasi Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo adalah suatu pendekatan yang melibatkan penggunaan angka acak untuk membentuk kembali distribusi peluang. Teknik simulasi Monte Carlo merupakan suatu teknik untuk memilih angka-angka secara acak dari distribusi probabilitas yang digunakan dalam suatu percobaan (komputer) (Taylor, 2008:242). Berdasarkan definisi tersebut Simulasi Monte Carlo dilakukan dengan menggunakan bantuan program MS.Excel. Berikut langkah-langkah simulasi Monte Carlo:

1) Membuat distribusi probabilitas pada masing-masing waktu kedatangan dan waktu pelayanan.
2) Membangun distribusi kumulatif dengan menjumlahkan tiap angka kemungkinan dengan jumlah sebelumnya. Selanjunya menentukan distribusi kumulatif untuk masing-masing variabel.
3) Menentukan interval angka acak untuk tiap variabel. Penentuan interval berdasarkan pada distribusi.
4) Membuat angka acak dengan menggunakan rumus yang tersedia pada MS.Excel.
5) Membuat simulasi dari rangkaian percobaan untuk menentukan nilai keefektifan dalam antrean.

Nilai keefektifan sistem antrean dengan simulasi Monte Carlo dilakukan beberapa kali pengulangan, maka untuk menentukan nilai keefektifannya diambil nilai tengah (median).

Median gugusan data yang telah diurutkan dari yang terkecil sampai terbesar adalah pengamatan yang tepat ditengah-tengah bila banyaknya pengamatan ganjil, atau rata-rata kedua pengamatan yang ditengah bila banyakknya pengamatan genap (Walpole, 1995: 25)

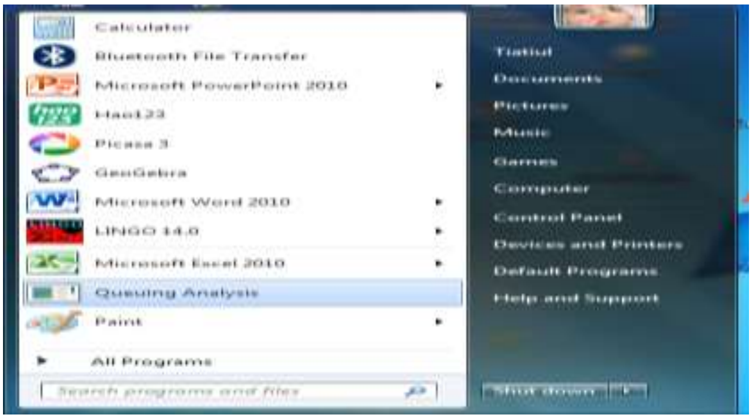
Untuk mencari nilai tengah (median) berupa data tunggal yaitu dengan rumus $Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ (2.75)

Dimana x adalah nilai data, n adalah banyaknya data (Setiawan & Permana, 2004).

D. Program WinQSB

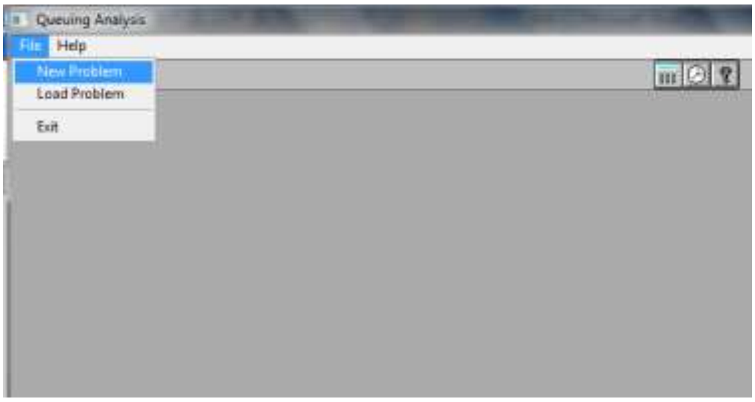
Langkah-langkah penyelesaian model antrean dengan program WinQSB adalah sebagai berikut:

1. Buka aplikasi dengan cara klik *Start* > *Program* >*WinQSB* > *Queuing Analysis*



Gambar 2.13 Aplikasi untuk membuka *queuing analize*

2. Kemudian akan muncul tampilan awal dari WinQSB dan *pilih File >New Problem* .



Gambar 2.14 Tampilan *File New Problem* pada *queuing analize* .

3. Muncul problem Spesification

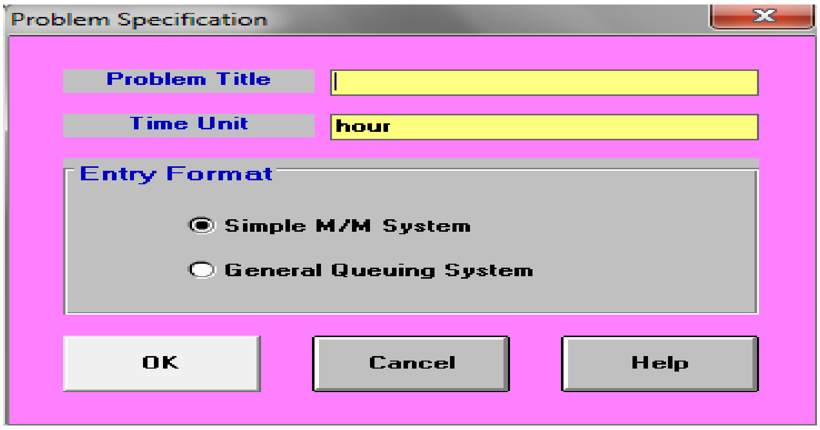
Langkah pertama : Masukkan judul masalah di Problem title. Judul kemudian muncul pada bagian atas untuk tampilan windows berikutnya.

Langkah kedua : Masukkan satuan waktu yang sesuai dengan masalah.

Langkah ketiga : Pilih salah satu dari format masukannya.

a. **Simple M/M System** jika diketahui bahwa kedatangan *customer* dan pelayanannya terdistribusi Poisson.

b. **General Queueing System**. Format GQS digunakan untuk model secara umum. Model *M/M* dapat pula dientrikan pada format GQS.



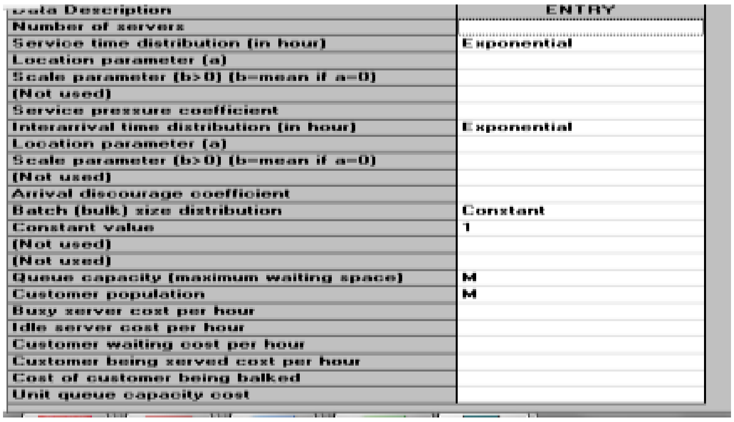
Gambar 2.15 *input* format untuk model M/M

Berikut *output* yang muncul apabila memilih Simple M/M System

Data Description	ENTRY
Number of servers	
Service rate (per server per hour)	
Customer arrival rate (per hour)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Gambar 2.16 Output format untuk model M/ M

Berikut *output* yang muncul apabila memilih General Queuing System

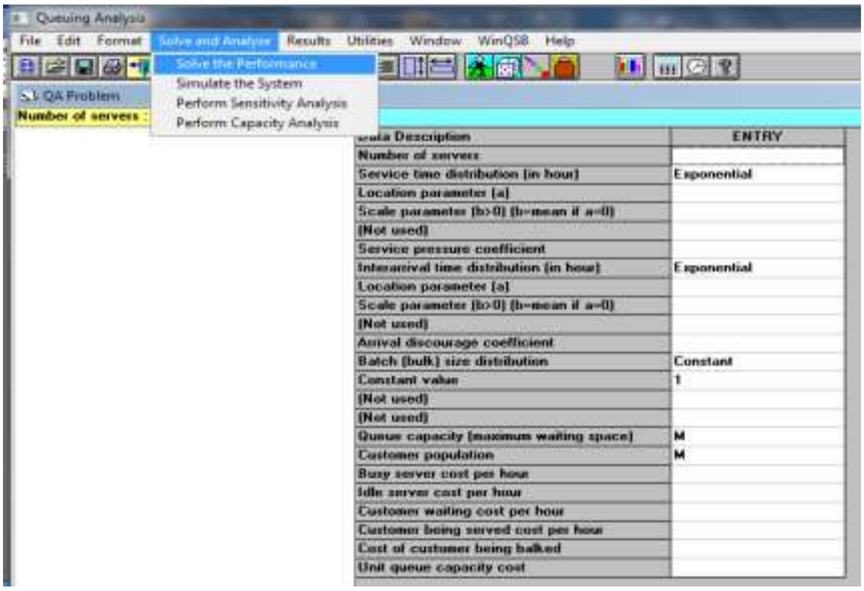


Data Description	ENTRY
Number of servers	
Service time distribution (in hour)	Exponential
Location parameter (a)	
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in hour)	Exponential
Location parameter (a)	
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Gambar 2.17 *output* format *GQS* **(**General Queuing System)

4. Isi kolom dengan nilai sesuai dengan kasus yang akan diselesaikan.

5. Kemudian pilih menu *Solve and Analyze* → *Solve The Performance* atau klik icon dari *Solve The Performance* berikut:



Gambar 2.18 *Solve the performance* dari *queuing analize*

6. Kemudian akan muncul tampilan hasil analisis winQSB.