

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan kajian teori mengenai matriks dan operasi matriks, program linear, penyelesaian program linear dengan metode simpleks, masalah transportasi, hubungan masalah transportasi dengan program linear, dan analisis sensitivitas.

A. Matriks dan Operasi Matriks

1. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom yang diapit oleh dua kurung siku sehingga berbentuk empat persegi panjang atau segiempat, dengan panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris. Unsur-unsur atau anggota dalam matriks berupa bilangan yang sering disebut dengan entri. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut *vektor kolom*, sedangkan yang terdiri dari satu baris disebut *vektor baris*. Suatu matriks A yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut matriks A berdimensi (ukuran) $m \times n$. Matriks dilambangkan dengan huruf besar sedangkan entri (elemen) dilambangkan dengan huruf kecil (Susanta, 1994:32)

$$A_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyaknya. Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom

dinamakan matriks persegi berorde n dengan entri-entrinya $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{n \times n}$ berada pada diagonal utama matriks A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks persegi yang semua bernilai nol, kecuali pada diagonal utamanya. Namun, pada diagonal utama juga dapat bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \neq j \\ a_{ii}, & \text{untuk } i = j \end{cases}$$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$

c. Matriks Skalar

Matriks skalar adalah suatu matriks persegi yang unsur-unsurnya bernilai sama pada diagonal utamanya, sedangkan unsur lainnya bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Di mana $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$

d. Matriks Identitas (I)

Matriks identitas adalah suatu matriks skalar yang nilai unsur-unsur diagonal utamanya sama dengan satu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas merupakan matriks persegi yang semua entri dibawah diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

f. Matriks Segitiga Bawah

Merupakan matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

g. Matriks Nol

Matriks nol merupakan matriks yang semua entrinya adalah bilangan nol. Jika ordo dipentingkan dalam matriks nol ini, maka dapat ditulis beserta banyak baris dan kolomnya.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh: $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

h. Matriks Invers

Matriks persegi A disebut mempunyai invers jika terdapat matriks B yang sedemikian rupa sehingga memenuhi $BA = AB = I$. Untuk perlambangan,

invers matriks A biasanya dinyatakan oleh A^{-1} . Untuk matriks berordo 2×2 :

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2. Operasi Matriks

a. Penjumlahan

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan (Anton, 2000: 47).

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. Komutatif : $A + B = B + A$
2. Asosiatif : $A + (B + C) = (A + B) + C$

b. Perkalian

1. Perkalian matriks dengan skalar

Jika A adalah sebarang matriks dan k adalah sebarang skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A oleh k (Anton, 2000: 48).

$$k(A + B) = kA + kB = (A + B)k, \text{ dengan } k = \text{skalar.}$$

2. Perkalian matriks dengan matriks

Jika A adalah matriks $m \times k$ dan B matriks $k \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entri-nya ditentukan sebagai berikut (Anton, 2000: 49) :

- a. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari perkalian AB , memilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B .
- b. Mengalikan entri-entri yang berpadanan dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian menambahkan hasil kali yang dihasilkan.

Sifat-sifat perkalian matriks :

1. Asosiatif : $A(BC) = (AB)C$
2. Distributif terhadap penjumlahan : $A(B + C) = AB + AC$

c. Transpose

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose A dinyatakan oleh A^T dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A , yaitu kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya (Anton, 2000: 55).

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat operasi transpose adalah (Anton, 2000: 69) :

1. $((A)^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$ dan $(A - B)^t = A^t - B^t$
3. $(kA)^t = kA^t$, dengan k adalah skalar
4. $(AB)^t = B^t A^t$

d. Determinan

Determinan suatu matriks persegi A dilambangkan dengan $\det A$, yaitu bilangan yang diperoleh dari unsur-unsur A dengan perhitungan tertentu seperti di bawah ini (Susanta, 1994: 36) :

1. Untuk $A_{1 \times 1} = [a]$ maka $\det(A) = a$
2. Untuk $A_{n \times n} = (a_{ij})$ maka $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$

dengan matriks M_{ij} merupakan submatriks dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A .

Sifat –sifat determinan untuk A matriks persegi adalah (Susanta, 1994:37) :

1. Bila tiap unsur dalam suatu baris (kolom) adalah nol maka $\det(A) = 0$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. Bila B diperoleh dari A dengan :
 - a. Mempertukarkan dua baris (kolom) maka $\det(A) = - \det(A)$
 - b. Mengalikan semua unsur suatu baris (kolom) dengan skalar k maka $\det(B) = k \det(A)$
 - c. Setiap unsur suatu baris (kolom) dikalikan dengan skalar k lalu ditambahkan pada unsur yang sesuai pada baris (kolom) lain maka $\det(B) = \det(A)$.

e. Invers

Jika A adalah matriks persegi, dan jika untuk mencari B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A dengan I adalah matriks identitas.

Invers suatu matriks A disimbolkan dengan A^{-1} dan memenuhi hubungan :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Tidak semua matriks mempunyai invers, hanya matriks non singular yang mempunyai invers. Matriks non singular adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol, sedangkan matriks singular adalah matriks yang determinannya sama dengan nol sehingga tidak mempunyai invers.

3. Sistem Persamaan Linear

Suatu persamaan linear dalam n variabel adalah persamaan dengan bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Dengan a_1, a_2, \dots, a_n dan b adalah konstanta dengan anggotanya bilangan real dan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel. Sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel dapat ditulis sebagai berikut (Anton, 2000:20) :

$$\begin{array}{r}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \dots \\ \end{array}} \right\} \quad (2.1)$$

Sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel dapat disingkat dengan hanya menuliskan susunan angka dalam bentuk matriks segiempat :

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Bentuk (2.2) merupakan bentuk matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan (2.1). Untuk mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear dalam bentuk (2.2) dapat diselesaikan dengan operasi Eliminasi Gauss dan

operasi Eliminasi Gauss-Jordan. Sebelum didefinisikan Eliminasi Gauss, perlu didefinisikan terlebih dahulu tentang Operasi Baris Elementer (OBE).

a. Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Baris Elementer (OBE) adalah operasi yang terdiri dari tiga tipe (Anton, 2000:22):

1. Mengalikan sebuah baris i dengan sebuah konstanta yang tidak sama dengan nol ($k \neq 0$) dengan notasi kB_i .
2. Menukarkan baris i dengan baris j dengan notasi B_{ij} .
3. Mengganti baris j dengan jumlah antara baris itu sendiri dengan k kali baris i dengan notasi $B_j + kB_i$.

Operasi-operasi tersebut tidak merubah penyelesaian dari sistem persamaan linear, sebab operasi tersebut hanya bersifat menyederhanakan masalah yang ada.

b. Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss adalah suatu eliminasi yang menggunakan operasi baris elementer untuk membuat elemen a_{ij} menjadi nol semua untuk $i > j$, sehingga diperoleh matriks segitiga atas $A_{n \times n}$ (Ruminta, 2009: 282).

c. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah suatu eliminasi menggunakan operasi baris elementer untuk membuat menjadi nol semua elemen yang ada di sebelah kiri di bawah diagonal utama dan disebelah kanan diatas

diagonal utama matriks $A_{n \times n}$ sehingga diperoleh matriks identitas (Ruminta, 2009:287).

Contoh 2.1:

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 2z = 6$$

$$y + 3z = 3$$

Akan ditentukan nilai x , y , dan z menggunakan Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan.

1. Eliminasi Gauss

Mengubah persamaan dalam bentuk matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian operasi matriks tersebut dengan menambahkan (-2) baris pertama pada baris kedua $[B_2 + (-2)B_1]$, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya mengalikan baris kedua dengan $\frac{-1}{2}$ $[\frac{-1}{2}B_2]$, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menambahkan (-1) baris kedua $[B_3 - B_2]$, akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Operasi berikutnya adalah mengalikan baris ketiga dengan $\frac{1}{3}$ [$\frac{1}{3}B_3$], maka diperoleh matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh persamaan baru yaitu:

$$x + y + z = 9$$

$$y = 6$$

$$z = -1$$

Substitusikan persamaan baru ke persamaan lama, maka diperoleh nilai

$$x = 4, y = 6, \text{ dan } z = -1.$$

2. Eliminasi Gauss-Jordan

Mengubah persamaan dalam bentuk matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian operasi matriks tersebut dengan menambahkan (-2) baris pertama pada baris kedua [$B_2 + (-2)B_1$], maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya mengalikan baris kedua dengan $\frac{-1}{2}$ [$\frac{-1}{2}B_2$], maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menambahkan (-1) baris kedua [$B_3 - B_2$], akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Operasi berikutnya adalah mengalikan baris ketiga dengan $\frac{1}{3}$ [$\frac{1}{3}B_3$], maka diperoleh matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian operasi berikutnya dengan menambahkan (-1) baris ketiga dengan baris pertama [$B_1 + (-1)B_3$], maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menambahkan (-1) pada baris kedua dengan baris pertama [$B_1 + (-1)B_2$], maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh matriks identitas untuk nilai $x = 4$, $y = 6$, dan $z = -1$.

B. Program Linear

1. Pengertian Program Linear

Program Linear (PL) adalah sebuah metode yang berhubungan dengan permasalahan pengalokasian sumber daya ditengah-tengah aktivitas-aktivitas yang saling bersaing dan juga berhubungan dengan permasalahan lain yang memiliki sebuah perumusan matematika yang hampir sama (Hillier dan Lieberman, 2008:65).

Pemrograman linear merupakan metode matematis yang berbentuk linear untuk menentukan suatu penyelesaian optimal dengan cara memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan terhadap suatu kendala (Siswanto, 2007:26).

Bentuk umum masalah program linear adalah sebagai berikut.

Memaksimalkan atau Meminimumkan:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Dengan kendala:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (=, \geq, \leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (=, \geq, \leq) b_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (=, \geq, \leq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (=, \geq, \leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (=, \geq, \leq) b_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (=, \geq, \leq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array}} \right\} \quad (2.3)$$

a_{ij} dan b_i merupakan bilangan anggota bilangan real, c_j anggota bilangan real positif karena merupakan koefisien fungsi tujuan sehingga nilainya bilangan real positif dan x_j merupakan variabel, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Persamaan (2.3) dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut (Susanta, 1994:7).

Mencari \mathbf{x}

Yang memaksimumkan atau meminimumkan $z = \mathbf{C}\mathbf{x}$

Dengan kendala $\mathbf{A}\mathbf{x} (\leq, =, \geq) \mathbf{B}; \mathbf{x} \geq 0$

$$\text{Dengan } \mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_n], \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Fungsi kendala bisa berbentuk persamaan (=) atau pertidaksamaan (\leq atau \geq). Konstanta (baik sebagai koefisien a_{ij} maupun nilai kanan (b_i)) dalam fungsi kendala maupun pada fungsi tujuan dikatakan sebagai parameter model. Simbol x_1, x_2, \dots, x_n (x_j) menunjukkan variabel keputusan, jumlah variabel keputusan (x_j) tergantung dari jumlah kegiatan atau aktifitas yang dilakukan untuk mencapai tujuan. Simbol c_1, c_2, \dots, c_n merupakan kontribusi atau biaya masing-masing variabel keputusan terhadap tujuan, disebut juga koefisien fungsi tujuan pada model matematika. Simbol $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$ merupakan penggunaan per unit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi atau disebut juga sebagai koefisien fungsi kendala pada model matematikanya. Simbol b_1, b_2, \dots, b_m

menunjukkan jumlah masing-masing sumber daya yang ada. Jumlah fungsi kendala akan tergantung dari banyaknya sumber daya yang digunakan (Hillier dan Lieberman, 2008: 26-27).

2. Sifat Umum Program Linier

Semua persoalan program linier mempunyai empat sifat umum yaitu sebagai berikut (Susanta, 1994:3).

a. Fungsi Tujuan (*objective function*)

Persoalan program linear bertujuan untuk memaksimalkan atau meminimumkan, pada umumnya mengoptimalkan laba atau biaya.

b. Adanya kendala atau batasan (*constrains*)

Kendala merupakan hal yang membatasi tingkat sampai di mana sasaran dapat dicapai. Oleh karena itu, untuk memaksimalkan atau meminimumkan suatu kuantitas fungsi tujuan bergantung pada sumber daya yang jumlahnya terbatas.

c. Harus ada beberapa alternatif solusi layak yang dapat dipilih.

d. Tujuan dan batasan dalam permasalahan program linear harus dinyatakan dalam hubungan dengan pertidaksamaan atau persamaan linear.

C. Penyelesaian Program Linear dengan Metode Simpleks

1. Pengertian Metode Simpleks (Algoritma 1)

Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah program linear adalah dengan menggunakan metode simpleks. Metode simpleks merupakan prosedur aljabar (bukan secara grafik) untuk mencari nilai optimal dari fungsi tujuan dalam masalah optimasi yang terkendala (Sirat, 2007:2).

Syarat-syarat yang harus dipenuhi dalam menggunakan metode simplek untuk menyelesaikan masalah program linear (Sirat, 2007:3).

- a. Semua kendala pertidaksamaan harus diubah menjadi bentuk persamaan
- b. Sisi kanan dari tanda pertidaksamaan kendala tidak boleh ada yang negatif
- c. Semua variabel dibatasi pada nilai non-negatif.

2. Penyelesaian Metode Simpleks

Berikut langkah-langkah penyelesaian masalah program linear dengan menggunakan metode simplek.

1. Masalah program linear harus diubah terlebih dahulu dalam bentuk kanonik.

Dari persamaan (2.3) dapat dimasukkan ke dalam bentuk umum tabel simpleks program linear, yang disajikan pada **Tabel 2.1** (Yamit, 1991:43).

Tabel 2.1 Bentuk Umum Tabel Simplek

| | | | | | | | |
|-------------|----------------------|-------------|-------------|---------|-------------|---------|---------|
| | c_j | c_1 | c_2 | \dots | c_n | b_i | R_i |
| \bar{c}_i | x_j \bar{x}_i | x_1 | x_2 | \dots | x_n | | |
| c_1 | x_1 | a_{11} | a_{12} | \dots | a_{1n} | b_1 | R_1 |
| c_2 | x_2 | a_{21} | a_{22} | \dots | a_{2n} | b_2 | R_2 |
| \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot |
| \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot |
| \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot |
| c_m | x_m | a_{m1} | a_{m2} | \dots | a_{mn} | b_m | R_m |
| | z_j | z_1 | z_2 | \dots | z_n | z | |
| | $z_j - c_j$ | $z_1 - c_1$ | $z_2 - c_2$ | \dots | $z_n - c_n$ | z | |

Keterangan tabel:

x_j = variabel-variabel keputusan, untuk $j = 1, 2, \dots, n$

\bar{x}_i = variabel basis.

c_j = koefisien ongkos, ongkos relatif dari fungsi tujuan.

\bar{c}_i = koefisien ongkos relatif untuk variabel dalam basis \bar{x}_i

a_{ij} = koefisien teknis (koefisien kendala).

b_i = konstanta ruas kanan setiap kendala.

z_j = hasil kali \bar{c}_i dengan a_{ij} dapat dirumuskan $\sum_{i=1}^m \bar{c}_i a_{ij}$.

z = hasil kali \bar{c}_i dengan b_i dapat dirumuskan $\sum_{i=1}^m \bar{c}_i b_i$.

$z_j - c_j$ = hasil selisih antara z_j dengan c_j .

Bentuk kanonik dari masalah program linear seperti pada persamaan (2.3) dapat diperoleh dengan menambahkan variabel pengetat, yaitu variabel *slack*, *surplus*, dan *artificial*.

a. Variabel Slack

Variabel slack adalah variabel yang digunakan untuk mengubah pertidaksamaan dengan tanda \leq menjadi persamaan (=). Misalnya kendala masalah program linear berbentuk: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$

maka pada ruas kiri disisipkan s_i sehingga kendala menjadi:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_i = b_i \text{ dengan } y_i \geq 0.$$

Variabel s_i inilah yang dinamakan dengan variabel slack memiliki koefisien ongkos sebesar nol (0).

b. Variabel Surplus

Variabel Surplus adalah variabel yang digunakan untuk mengubah pertidaksamaan dengan tanda \geq menjadi persamaan ($=$). Misalnya kendala masalah program linear berbentuk: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$

maka pada ruas kiri disisipkan s_i dan d_i sehingga kendala menjadi:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - s_i + d_i = b_i \text{ dengan } s_i, d_i \geq 0.$$

Variabel s_i inilah yang dinamakan dengan variabel surplus memiliki koefisien ongkos sebesar nol (0) dan d_i adalah variabel artificial.

c. Variabel Semu (Artificial).

Variabel semu adalah variabel yang ditambahkan jika dalam persamaan tidak ada variabel yang dapat menjadi basis (Ernawati, 2010:28). Variabel semu biasanya berbentuk persamaan ($=$) atau pelengkap pada pertidaksamaan (\geq), sehingga perlu ditambahkan d_i pada ruas kiri pada persamaan kendala menjadi: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i = b_i$ dengan $d_i \geq 0$.

Variabel d_i inilah yang dinamakan variabel *artificial* dengan besarnya koefisien ongkos sama dengan $-M$ untuk pola memaksimalkan dan M untuk pola meminimumkan, dengan M adalah bilangan positif sangat besar.

Mencari solusi basis awal pada kendala yang memiliki variabel *artificial* pada bentuk kanonik, ditambahkan variabel *artificial* juga pada fungsi tujuan. Nilai setiap variabel kendala yang bertanda sama dengan ($=$) harus sebesar 0 (nol), sehingga baris fungsi tujuan harus dikurangi dengan M untuk pola memaksimalkan dan $-M$ untuk pola meminimumkan yang dikalikan dengan baris batasan yang bersangkutan. Untuk pola meminimumkan, baris fungsi

tujuan akan dikali dengan (-1), dan baris fungsi tujuan untuk pola memaksimalkan akan dikali (1). Untuk fungsi tujuan meminimalkan, fungsi tujuan diubah menjadi maksimasi dengan cara mengganti tanda positif dan negatif (Hillier dan Lieberman, 2008:104-107).

Contoh 2.2:

Fungsi tujuan:

Meminimalkan: $3x_1 + 5x_2$

Kendala :

$$2x_1 = 8$$

$$3x_2 \leq 15$$

$$6x_1 + 5x_2 \geq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian:

Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala pada model program linear dengan menambahkan variabel pengetat atau dalam bentuk kanonik. Pada fungsi kendala terdapat kendala dengan tanda sama dengan (=) dan kendala dengan tanda lebih besar sama dengan (\geq). Maka bentuk fungsi tujuan dan kendala akan menjadi:

Meminimumkan: $z = 3x_1 + 2x_2 + Md_1 + 0s_1 - 0s_2 + Md_2$

Kendala:

$$2x_1 + d_1 = 8$$

$$3x_2 + s_1 = 15$$

$$6x_1 + 5x_2 - s_2 + d_2 = 30$$

Untuk fungsi kendala yang bertanda lebih besar sama dengan (\geq), maka dikurangi variabel surplus (s_2) dan ditambah variabel *artificial* (d_2). Fungsi kendala dengan tanda sama dengan (=) ditambahkan variabel *artificial* (d_1), dan untuk fungsi kendala yang bertanda kurang dari sama dengan (\leq) ditambah variabel *slack* (s_1). Untuk nilai setiap variabel kendala yang memiliki variabel dasar *artificial* harus sama dengan 0, sehingga baris z (baris fungsi tujuan) harus dikurangi dengan $-M$ yang dikalikan dengan baris batasan yang bersangkutan (Taufiq Rahman, 2015:13). Berikut nilai baris z baru:

Tabel 2.2 Baris z baru

| | | | | | | | | |
|------|----|-----------|-----------|-----|---|-----|-----|----------|
| | -1 | 3 | 5 | M | 0 | 0 | M | 0 |
| $-M$ | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| $-M$ | 0 | 6 | 5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 30 |
| | 1 | $(-8M+3)$ | $(-5M+5)$ | 0 | 0 | M | 0 | $(-38M)$ |

Dari **Tabel 2.2** didapat bentuk kanonik dari permasalahan di **Contoh 2.2** adalah:

Meminimumkan: $z = (-8M + 3)x_1 + (-5M + 5)x_2 + 0d_1 + 0s_1 + Ms_2 + 0d_2$

Kendala:

$$2x_1 + d_1 = 8$$

$$3x_2 + s_1 = 15$$

$$6x_1 + 5x_2 - s_2 + d_2 = 30$$

- Menentukan kriteria penyelesaian tabel basis awal metode simpleks program linear.

Berikut kriteria penyelesaian tabel basis awal metode simpleks.

- a. Menyusun semua nilai ke dalam tabel simpleks awal dari koefisien teknis (a_{ij}), koefisien ruas kanan (b_i) pada fungsi kendala dan koefisien ongkos pada fungsi tujuan (c_j).
- b. Menghitung nilai z_j pada setiap kolom variabel dan kolom b_i .
- c. Menghitung nilai $z_j - c_j$ pada setiap kolom variabel.
- d. Memeriksa nilai $z_j - c_j$. Nilai $z_j - c_j$ akan memberikan informasi apakah fungsi tujuan telah optimum atau belum.
 - a) Untuk masalah yang berpola memaksimumkan
 - i. Jika $z_j - c_j < 0$ maka lanjutkan ke langkah selanjutnya.
 - ii. Jika $z_j - c_j \geq 0$ sudah optimal maka penghitungan selesai.
 - b) Untuk masalah yang berpola meminimumkan
 - i. Jika $z_j - c_j > 0$ maka lanjut kelangkah selanjutnya.
 - ii. Jika $z_j - c_j \leq 0$ sudah optimum maka penghitungan selesai.

Penyelesaian tabel basis awal metode simpleks pada bentuk kanonik **Contoh 2.2** dapat dituliskan dalam tabel simpleks, sehingga didapat penyelesaian tabel basis awal yang disajikan pada **Tabel 2.3**.

Tabel 2.3 Tabel basis awal

| | c_j | $(-8M+3)$ | $(-5M+5)$ | 0 | 0 | M | 0 | | |
|-------------|----------------------|-----------|-----------|-------|-------|--------|-------|-------|-----|
| \bar{c}_i | x_j \bar{x}_j | x_1 | x_2 | d_1 | s_1 | s_2 | d_2 | b_i | C |
| 0 | d_1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 | 4 |
| 0 | s_1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15 | - |
| 0 | d_2 | 6 | -5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 30 | 5 |
| | z_j | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | $z_j - c_j$ | $(8M-3)$ | $(5M-5)$ | 0 | 0 | $(-M)$ | 0 | 0 | |

Jadi dari **Tabel 2.3** terlihat penyelesaian basis awal adalah:

$$(x_1, x_2, d_1, s_1, s_2, d_2) = (0, 0, 8, 15, 0, 30)$$

Dari penyelesaian tersebut belum optimal karena terdapat nilai $z_j - c_j$ yang lebih dari 0 (nol).

3. Iterasi tabel.

Jika pada tabel basis awal belum terdapat penyelesaian optimum, maka dilakukan iterasi tabel. Berikut langkah-langkah iterasi tabel:

- a. Menentukan kolom kunci (k_k) atau kolom masuk yaitu kolom dengan nilai $z_j - c_j$ negatif terbesar (untuk tujuan memaksimumkan) atau kolom dengan nilai $z_j - c_j$ positif terbesar (untuk tujuan meminimumkan).
- b. Menentukan baris kunci atau persamaan indeks (B_k) yaitu baris yang memiliki nilai positif terkecil, karena jika diambil yang lebih besar maka menyebabkan adanya nilai ruas kanan yang negatif sehingga menjadi tidak layak. Untuk menentukan B_k dapat ditentukan melalui *uji rasio minimum* yaitu dengan rumus $R_i = \frac{b_i}{k_k}$, di mana nilai ruas kanan setiap baris i dibagi dengan kolom kunci atau kolom masuk.
- c. Menentukan angka kunci (a_k) atau elemen indeks yaitu angka pada perpotongan baris kunci dan kolom kunci.
- d. Mengganti variabel c_i pada baris kunci dengan variabel kolom yang terletak pada kolom kunci. Nama variabel basis menjadi nama variabel yang dipindahkan.
- e. Transformasi dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan pada baris persamaan:

a) Menentukan baris kunci (B_k) baru, dapat disimbolkan B_k^* yaitu dengan

$$\text{rumus: } B_k^* = B_k \frac{1}{a_k}$$

Hal ini dilakukan agar angka kunci sama dengan 1.

b) Menentukan baris lain yang baru, dapat disimbolkan B_i^* yaitu dengan

$$\text{rumus: } B_i^* = B_i + (k_k B_k)$$

Penyelesaian basis awal dari **Contoh 2.2** belum optimal seperti pada **Tabel 2.3**, sehingga diperlukan langkah revisi sebagai berikut. Pada **Tabel 2.3** didapat kolom kunci (kolom berwarna merah) yaitu x_1 , karena $z_j - c_j$ untuk x_1 merupakan nilai positif yang terbesar, sedangkan untuk baris berwarna kuning (d_1) dipilih sebagai baris kunci, karena memiliki baris *rasio* (R_i) positif terkecil. Dari baris kunci dan kolom kunci didapat pivot (berwarna biru) yaitu 2, untuk melanjutkan iterasi dilakukan transformasi dengan Eliminasi Gauss-Jordan.

$$B_1^* = \frac{1}{2} B_1 ; B_2^* = B_2 ; B_3^* = B_3 - 6B_1^*$$

Berikut tabel iterasi dari tabel basis awal yang disajikan pada **Tabel 2.4**.

Tabel 2.4 Iterasi 1

| | c_j | $(-8M+3)$ | $(-5M+5)$ | 0 | 0 | M | 0 | b_i | R_i |
|-------------|--|-----------|-----------|---------------------|-------|--------|-------|-------|-------|
| \bar{c}_i | $\begin{matrix} x_j \\ \bar{x}_j \end{matrix}$ | x_1 | x_2 | d_1 | s_1 | s_2 | d_2 | | |
| $(-8M+3)$ | x_1 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 4 | - |
| 0 | s_1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15 | 5 |
| 0 | d_2 | 0 | -5 | -3 | 0 | -1 | 1 | 6 | - |
| z_j | | $(-8M+3)$ | 0 | $(-4M+\frac{3}{2})$ | 0 | 0 | 0 | 12 | |
| $z_j - c_j$ | | 0 | $(5M-5)$ | $(-4M+\frac{3}{2})$ | 0 | $(-M)$ | 0 | | |

Jadi dari **Tabel 2.4** terlihat penyelesaian revisi tabel (iterasi 1) adalah :

$$(x_1, x_2, d_1, s_1, s_2, d_2) = (4, 0, 0, 15, 0, 6)$$

Dari penyelesaian tersebut belum optimal karena terdapat nilai $z_j - c_j$ yang lebih dari 0 (nol). Penyelesaian revisi tabel (iterasi 1) dari **Contoh 2.2** belum optimal seperti pada **Tabel 2.4**, sehingga diperlukan langkah revisi lagi sebagai berikut.

Pada **Tabel 2.4** didapat kolom kunci (kolom berwarna merah) yaitu x_2 , karena $z_j - c_j$ untuk x_2 merupakan nilai positif yang terbesar, sedangkan untuk baris berwarna kuning (s_1) dipilih sebagai baris kunci, karena memiliki baris *rasio* (R_i) positif terkecil. Dari baris kunci dan kolom kunci didapat pivot (berwarna biru) yaitu 3, untuk melanjutkan iterasi dilakukan transformasi dengan Eliminasi Gauss-Jordan.

$$B_2^* = \frac{1}{3}B_2$$

$$B_1^* = B_1$$

$$B_3^* = B_3 + 5B_2^*$$

Dari revisian **Tabel 2.4** didapat penyelesaian revisi tabel yaitu:

$$(x_1, x_2, d_1, s_1, s_2, d_2) = (4, 5, 0, 0, 0, 31)$$

Penyelesaian tersebut sudah optimum, karena sudah memenuhi syarat ($z_j - c_j \leq 0$) dengan solusi optimal $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; dan $z_{min} = 37$. Jumlah produk yang harus di produksi untuk x_1 sebanyak 4 buah dan produksi untuk x_2 sebanyak 5 buah agar mendapatkan biaya yang minimum. Nilai solusi minimum yang bisa didapatkan adalah sebesar 37.

D. Masalah Transportasi (Algoritma 2)

1. Permasalahan Transportasi

Masalah transportasi merupakan salah satu masalah dalam program linear, disebut masalah transportasi karena aplikasinya banyak digunakan untuk mengoptimalkan kegiatan transportasi. Masalah transportasi termasuk masalah program linear yang khusus, karena hanya untuk memecahkan masalah-masalah yang berhubungan dengan transportasi (pengangkutan) atau distribusi produk. Persoalan transportasi menekankan masalah pendistribusian suatu produk dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan dengan tujuan untuk meminimumkan biaya pengangkutan atau pengiriman barang.

Dijelaskan oleh Cahaya Manurung (2010:7), ciri-ciri khusus persoalan transportasi adalah:

- a. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
- b. Kuantitas produk atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan besarnya tertentu.
- c. Produk atau barang yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan besarnya sesuai dengan permintaan atau kapasitas sumber.
- d. Biaya pengangkutan atau pengiriman produk dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu.

Untuk menjadikan suatu persoalan transportasi, dibutuhkan beberapa asumsi yang disyaratkan yaitu penyedia produk (*supply*) untuk setiap daerah sumber dan permintaan (*demand*) pada setiap daerah tujuan. *Supply* dan *demand* untuk masalah pendistribusian barang merupakan jumlah banyaknya produksi dan

jumlah banyaknya permintaan, dan biaya transportasi per unit produk dari setiap daerah sumber menuju ke daerah tujuan pada masalah pendistribusian disebut biaya produksi.

2. Model Transportasi

Secara khusus, masalah transportasi memperhatikan aktivitas pendistribusian suatu produk dari sekumpulan pusat (*supply*) disebut sumber, ke beberapa kelompok penerima (*demand*) disebut tujuan. Tujuan dari permasalahan transportasi merupakan untuk meminimalkan total biaya distribusi. Formulasi pengoptimalan masalah transportasi dalam program linear dapat ditunjukkan pada persamaan (2.5).

Meminimumkan:

$$z = c_{1,1}x_{1,1} + c_{1,2}x_{1,2} + \dots + c_{1,n}x_{1,n} + c_{2,1}x_{2,1} + c_{2,2}x_{2,2} + \dots + c_{2,n}x_{2,n} + \dots + c_{m,1}x_{m,1} + c_{m,2}x_{m,2} + \dots + c_{m,n}x_{m,n}$$

Dengan kendala :

$$x_{1,1} + x_{1,2} + \dots + x_{1,n} = b_1$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + \dots + x_{2,n} = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$x_{m,1} + x_{m,2} + \dots + x_{m,n} = b_m$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} + \dots + x_{m,1} = a_1$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} + \dots + x_{m,2} = a_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

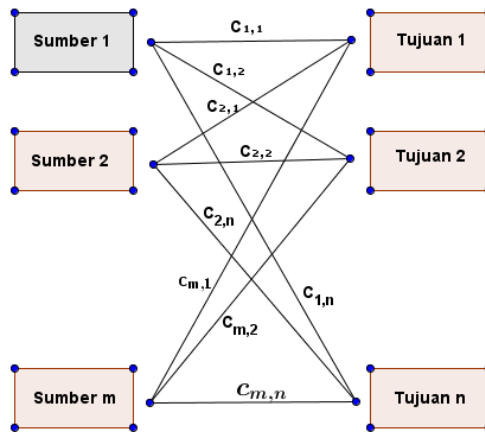
$$x_{1,n} + x_{2,n} + \dots + x_{m,n} = a_n$$

$$x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{m,n} \geq 0$$

(2.5)

Berdasarkan pada persamaan (2.5) model transportasi dapat dibuat sebuah model jaringan, di mana sebuah sumber atau tujuan diwakili dengan sebuah node. Busur yang menghubungkan sebuah sumber dan sebuah tujuan mewakili rute pengiriman barang, dengan jumlah penawaran di sumber i ($i = 1, 2, \dots, m$) adalah

b_i dan permintaan di tujuan j ($j = 1, 2, \dots, n$) adalah $a_{i,j}$ sehingga biaya unit transportasi antara sumber i dan tujuan j adalah $c_{i,j}$. Berikut representasi jaringan transportasi dengan banyak m sumber dan n tujuan di sajikan pada **Gambar 2.1**.



Gambar 2.1 Representasi Jaringan Model Transportasi

Keterangan:

Sumber 1 ke Tujuan 1: $c_{1,1}$

Sumber 1 ke Tujuan 2: $c_{1,2}$

Sumber 1 ke Tujuan n : $c_{1,n}$

Sumber 2 ke Tujuan 1: $c_{2,1}$

Sumber 2 ke Tujuan 2: $c_{2,2}$

Sumber 2 ke Tujuan n : $c_{2,n}$

Sumber m ke Tujuan 1: $c_{m,1}$

Sumber m ke Tujuan 2: $c_{m,2}$

Sumber m ke Tujuan n : $c_{m,n}$

Berdasarkan persamaan (2.5) didapat formulasi program linear dalam bentuk matriks untuk masalah transportasi pada persamaan (2.6).

Meminimumkan $z = Cx$

Dengan kendala: $x = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ (2.6)

$$x \geq 0$$

Dengan $C = [c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,n}]$, $x = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{m,n} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (2.5) didapat tabel umum masalah transportasi pada

Tabel 2.5.

Tabel 2.5 Tabel Umum Masalah Transportasi

| | D1 | D2 | ... | J | ... | n | Supply |
|--------|------------------------|------------------------|-----|------------------------|-----|------------------------|-----------------------|
| O1 | $c_{1,1}$ $x_{1,1}$ | $c_{1,2}$ $x_{1,2}$ | ... | $c_{1,j}$ $x_{1,j}$ | ... | $c_{1,n}$ $x_{1,n}$ | b_1 |
| O2 | $c_{2,1}$ $x_{2,1}$ | $c_{2,2}$ $x_{2,2}$ | ... | $c_{2,j}$ $x_{2,j}$ | ... | $c_{2,n}$ $x_{2,n}$ | b_2 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ | ... | ⋮ | ⋮ |
| i | $c_{i,1}$ $x_{i,1}$ | $c_{i,2}$ $x_{i,2}$ | ... | $c_{i,j}$ $x_{i,j}$ | ... | $c_{i,n}$ $x_{i,n}$ | b_i |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ | ... | ⋮ | ⋮ |
| m | $c_{m,1}$ $x_{m,1}$ | $c_{m,2}$ $x_{m,2}$ | ... | $c_{m,j}$ $x_{m,j}$ | ... | $c_{m,n}$ $x_{m,n}$ | b_m |
| Demand | a_1 | a_2 | ... | a_j | ... | a_n | $\sum b_i = \sum a_j$ |

Suatu model transportasi dikatakan setimbang apabila total *supply* dari sumber sama dengan total *demand* untuk tujuan. Sebuah masalah transportasi akan memiliki solusi layak jika dan hanya jika (Hiller dan Lieberman, 2008:277):

$$\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{j=1}^n a_j$$

Di mana b_i adalah *supply* dan a_j adalah *demand* untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Dalam beberapa permasalahan nyata, batasan tersebut tidak selalu terpenuhi atau dengan kata lain jumlah *supply* yang tersedia mungkin lebih besar atau lebih kecil dari pada jumlah *demand*, model permasalahan tersebut disebut model transportasi yang tidak setimbang. Namun, masalah masih mungkin dirumuskan ulang sehingga permasalahan transportasi dapat dibuat seimbang dengan menambahkan *kolom dummy* atau *baris dummy*. Untuk *demand* yang melebihi *supply* maka dibuat suatu sumber *dummy* yang akan men-*supply* kekurangan tersebut sebanyak,

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{i=1}^m b_i$$

Sedangkan jika jumlah *supply* melebihi jumlah *demand*, maka dibuat suatu tujuan *dummy* untuk menyerap kelebihan tersebut sebanyak,

$$\sum_{i=1}^m b_i - \sum_{j=1}^n a_j$$

Contoh 2.3:

Berikut contoh masalah transportasi tidak setimbang yang disajikan pada **Tabel 2.6.**

Tabel 2.6 Masalah transportasi tidak setimbang

| | Tujuan 1 | Tujuan 2 | Tujuan 3 | Tujuan 4 | <i>Supply</i> |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------------|
| Sumber 1 | 7 | 2 | 3 | 4 | 40 |
| Sumber 2 | 6 | 8 | 4 | 5 | 40 |
| Sumber 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | 60 |
| Sumber 4 | 5 | 7 | 4 | 8 | 60 |
| <i>Demand</i> | 60 | 30 | 45 | 50 | $b_i \geq a_j$ |

Masalah transportasi di atas tidak seimbang karena jumlah *supply* lebih besar dari jumlah *demand*, sehingga dapat ditambahkan kolom *dummy* yang disajikan pada **Tabel 2.7**.

Tabel 2.7 Penambahan *dummy* pada masalah transportasi tidak setimbang

| | Tujuan 1 | Tujuan 2 | Tujuan 3 | Tujuan 4 | <i>Dummy</i> | <i>Supply</i> |
|---------------|----------|----------|----------|----------|--------------|---------------|
| Sumber 1 | 7 | 2 | 3 | 4 | <i>M</i> | 40 |
| Sumber 2 | 6 | 8 | 4 | 5 | <i>M</i> | 40 |
| Sumber 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | <i>M</i> | 60 |
| Sumber 4 | 5 | 7 | 4 | 8 | <i>M</i> | 60 |
| <i>Demand</i> | 60 | 30 | 45 | 50 | 15 | $b_i = a_j$ |

Unit biaya menghadirkan asumsi dasar untuk setiap masalah transportasi yaitu biaya mendistribusikan produk dari sumber apapun ke tujuan apapun bersifat *proporsional* (sebanding) terhadap jumlah produk yang didistribusikan. Oleh karena itu, biaya diperoleh dari unit biaya distribusi dikali jumlah unit yang didistribusikan. Asumsi–asumsi permasalahan transportasi secara model transportasi umum adalah sebagai berikut.

1. Suatu produk yang ingin dimasukkan dalam model dengan jumlah atau rata rata yang tetap dan diketahui.
2. Produk tersebut akan dikirim melalui jaringan transportasi yang ada dengan memakai cara pengangkutan tertentu dari pusat-pusat permintaan.
3. Jumlah permintaan di pusat permintaan diketahui dalam jumlah atau rata-rata tertentu dan tetap.
4. Biaya angkutan per-unit produk yang diangkut diketahui, sehingga tujuan untuk meminimumkan biaya total pendistribusian dapat tercapai. Pada dasarnya setiap daerah tujuan dapat menerima komoditas dari sembarang daerah sumber.

3. Metode Penyelesaian

Langkah-langkah penyelesaian masalah transportasi dengan metode transportasi adalah sebagai berikut.

1. Langkah pertama dengan menyusun tabel masalah transportasi (**Tabel 2.5**). Tabel masalah transportasi menunjukkan sumber dari mana barang atau produk berasal dan kemana tujuan barang atau produk dikirim serta biaya pengiriman.
2. Langkah selanjutnya adalah menentukan tabel basis awal.

Penyelesaian tabel basis awal digunakan untuk menentukan penyelesaian awal dalam masalah transportasi. Ada beberapa metode yang biasa digunakan antara lain Metode Barat Laut, Metode Vogel, dan Metode Biaya Terkecil.

- a. Metode Barat laut merupakan metode yang paling mudah, metode tersebut biasanya dibutuhkan lebih banyak iterasi untuk mencapai penyelesaian optimal (Jong Jek Siang, 2011:176).
- b. Metode Biaya Terkecil tidak jauh berbeda dengan Metode Barat Laut, hanya saja pengisian tidak dilakukan dari sisi barat laut tetapi dari sel c_{ij} yang biaya pengirimannya terendah. Pada sel tersebut diisi dengan barang sebanyak mungkin, jika ada beberapa sel yang biaya terendahnya sama maka dipilih sel c_{ij} sembarang. Metode Biaya Terkecil sering disebut juga Metode Greedy karena sifatnya yang selalu memulai penyelesaian dari biaya yang terkecil tanpa memperhitungkan efeknya terhadap keseluruhan proses. Meskipun selalu dimulai dari sel yang biayanya terkecil, namun Metode Biaya Terkecil belum tentu menghasilkan penyelesaian optimal (Jong Jek Siang, 2011:180).
- c. Perhitungan penyelesaian awal atau tabel basis awal dengan metode Vogel lebih rumit dibandingkan dengan Metode Barat Laut dan Metode Biaya Terkecil, akan tetapi metode Vogel biasanya lebih mendekati penyelesaian optimum (Jong Jek Siang, 2011:182).

Pada penulisan Tugas Akhir ini, penulis membatasi masalah untuk masalah transportasi penyelesaian tabel basis awal menggunakan Metode Vogel, karena memberikan pemecahan awal yang lebih baik dari pada metode lainnya. Langkah-langkah menentukan penyelesaian tabel basis awal dengan Metode Vogel adalah sebagai berikut.

- a) Hitung nilai penalti (nilai selisih dari 2 ongkos terkecil dari semua baris dan kolom) pada semua baris dan kolom.
 - b) Pilih nilai pinalti dari kolom atau baris terbesar.
 - c) Alokasikan x_{ij} dengan kapasitas penuh dengan memenuhi salah satu *demand* atau *supply* pada sel dengan ongkos terkecil dari kolom atau baris pinalti terbesar atau yang terpilih.
 - d) Ulangi langkah (a) sampai (c) hingga semua kapasitas baris atau kolom terpenuhi.
3. Pengecekan keoptimalan.

Setelah tabel awal dibuat, langkah berikutnya adalah mengecek apakah tabel tersebut sudah optimal yaitu saat nilai *opportunity cost* lebih dari 0 (nol). Jika sudah optimal maka proses dihentikan dan tabel awal menjadi tabel optimal. Akan tetapi jika belum optimal, maka dilakukan perbaikan atau revisi tabel untuk meningkatkan optimalitas.

4. Revisi tabel.

Pada penulisan tugas akhir ini, diasumsikan penulis merevisi tabel dengan metode Stepping Stone, di mana jika terdapat *opportunity cost* kurang dari 0 (nol). Berikut langkah-langkah metode Stepping Stone (Aminudin, 2005:76).

- a. Cari jalur terdekat (gerakan atau jalannya hanya horizontal atau vertikal) dari sel kosong yang direvisi melalui pijakan sel lain yang terpakai dan kembali ke sel kosong semula. Hanya ada satu jalur terdekat untuk setiap sel kosong dalam suatu pemecahan tertentu. Jalur

terdekat hanya ada pada sel yang dijadikan batu loncatan dan sel kosong yang dinilai.

- b. Tanda tambah (+) dan kurang (-) muncul bergantian pada tiap sudut sel dari jalur terdekat, dimulai dengan tanda tambah (+) pada sel kosong. Berilah tanda putaran searah jarum jam atau sebaliknya.
- c. Jumlahkan unit biaya dalam jalur sel dengan tanda tambah (+) sebagai tanda penambahan biaya. Penurunan biaya diperoleh dari penjumlahan unit biaya dalam tiap sel negatif (-).
- d. Ulangi langkah (a) – (d) untuk sel kosong lainnya, dan bandingkan hasil evaluasi sel kosong tersebut. Pilih nilai evaluasi atau *opportunity cost* (biaya yang harus ditanggung bila satu alternatif keputusan dipilih) yang paling negatif yang berarti penurunan biaya yang paling besar, bila tidak ada nilai negatif pada saat merevisi tabel berarti pemecahan sudah optimal.
- e. Lakukan perubahan jalur pada sel yang terpilih dengan cara mengalokasikan sejumlah unit terkecil dari sel bertanda kurang (-) dan tambahkan terhadap sel bertanda tambah (+).

Contoh 2.4:

Sebuah perusahaan beroperasi dengan 5 buah pabrik serta jumlah permintaan dari 4 kota dengan kapasitas masing-masing seperti ditunjukkan pada **Tabel 2.8**.

Tabel 2.8 Produksi dan Permintaan

| Pabrik | Produksi |
|--------|----------|
| A | 80 ton |
| B | 70 ton |
| C | 40 ton |
| D | 60 ton |
| E | 50 ton |

| Kota | Permintaan |
|--------|------------|
| Kota 1 | 60 ton |
| Kota 2 | 90 ton |
| Kota 3 | 70 ton |
| Kota 4 | 80 ton |

Berikut perkiraan biaya transportasi (dalam ribuan/ton) dari setiap pabrik ke masing-masing kota adalah.

Dari pabrik A ke kota 1 = 12

Dari pabrik A ke kota 3 = 11

Dari pabrik B ke kota 1 = 10

Dari pabrik B ke kota 3 = 8

Dari pabrik C ke kota 1 = 11

Dari pabrik C ke kota 3 = 12

Dari pabrik D ke kota 1 = 9

Dari pabrik D ke kota 3 = 5

Dari pabrik E ke kota 1 = 5

Dari pabrik E ke kota 3 = 9

Dari pabrik A ke kota 2 = 10

Dari pabrik A ke kota 4 = 9

Dari pabrik B ke kota 2 = 12

Dari pabrik B ke kota 4 = 7

Dari pabrik C ke kota 2 = 8

Dari pabrik C ke kota 4 = 5

Dari pabrik D ke kota 2 = 7

Dari pabrik D ke kota 4 = 12

Dari pabrik E ke kota 2 = 6

Dari pabrik E ke kota 4 = 10

Berdasarkan data produksi, permintaan, dan biaya pendistribusian **Contoh 2.4**, dapat dibuat tabel masalah transportasi yang ditunjukkan pada **Tabel 2.9**.

Tabel 2.9 Masalah transporasi awal

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 12 | 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | 10 | 12 | 8 | 7 | 70 |
| C | 11 | 8 | 12 | 5 | 40 |
| D | 9 | 7 | 5 | 12 | 60 |
| E | 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Untuk menyelesaikan masalah transportasi di atas, menggunakan penyelesaian tabel basis awal dengan metode Vogel. Berikut tabel-tabel revisi (iterasi) masalah transportasi dari **Contoh 2.4**, dimulai dari tabel basis awal yang ditunjukkan pada **Tabel 2.10**.

Tabel 2.10 Tabel basis awal masalah transportasi

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 10 12 | 70 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | 10 | 12 | 10 8 | 60 7 | 70 |
| C | 11 | 20 8 | 12 | 20 5 | 40 |
| D | 9 | 7 | 60 5 | 12 | 60 |
| E | 50 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Solusi basis awal masalah transportasi memiliki jumlah sel yang terisi sebanyak $m + n - 1$ di mana m adalah jumlah baris dan n adalah jumlah kolom, sehingga solusi basis awal tersebut *feasible* (layak) karena jumlah sel terisi memenuhi $m + n - 1$. Jika kurang dari $m + n - 1$ maka akan terjadi kemerosotan.

Total biaya dari **Tabel 2.10**

$$\begin{aligned} z &= 10(12) + 70(10) + 10(8) + 60(7) + 20(8) + 20(5) + 60(5) + 50(5) \\ &= 120 + 700 + 80 + 420 + 160 + 100 + 300 + 250 \\ &= 2130. \end{aligned}$$

Selanjutnya pengecekan keoptimalan dengan mencari *opportunity cost*, yaitu biaya yang harus ditanggung bila satu alternatif keputusan dipilih. Pengecekan keoptimalan dari tabel basis awal disajikan pada **Tabel 2.11**.

Tabel 2.11 Pengecekan keoptimalan dari tabel basis awal

| Sel Kosong | Loop | Opportunity Cost |
|------------|---|-------------------------|
| $x_{1,3}$ | $x_{1,3} - x_{2,3} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2}$ | $11-8+7-5+8-10 = 3$ |
| $x_{1,4}$ | $x_{1,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2}$ | $9-5 +8-10 = 2$ |
| $x_{2,1}$ | $x_{2,1} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2} - x_{1,1}$ | $10-7+5-8+10-12 = -2$ |
| $x_{2,2}$ | $x_{2,2} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2}$ | $12-7+5-8 = 2$ |
| $x_{3,1}$ | $x_{3,1} - x_{3,2} - x_{1,2} - x_{1,1}$ | $11-8+10-12 = 1$ |
| $x_{3,3}$ | $x_{3,3} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,3}$ | $12-5+7-8 = 6$ |
| $x_{4,1}$ | $x_{4,1} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2} - x_{1,1}$ | $9-5+8-7+5-8+10-12 = 0$ |
| $x_{4,2}$ | $x_{4,2} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2}$ | $7-5+8-7+5-8 = 0$ |
| $x_{4,4}$ | $x_{4,4} - x_{2,4} - x_{2,3} - x_{4,4}$ | $12-7+8-5 = 8$ |
| $x_{5,2}$ | $x_{5,2} - x_{1,2} - x_{1,1} - x_{5,1}$ | $6-10+12-5 = 3$ |
| $x_{5,3}$ | $x_{5,3} - x_{2,3} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2} - x_{1,1} - x_{5,1}$ | $9-8+7-5+8-10+12-5 = 8$ |
| $x_{5,4}$ | $x_{5,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2} - x_{1,1} - x_{5,1}$ | $10-5+8-10+12-5 = 10$ |

Pada **Tabel 2.11** masih terdapat nilai *opportunity cost* yang negatif (belum optimal) pada sel kosong $x_{2,1}$, sehingga dilakukan revisi tabel dari $x_{2,1}$ dengan membuat loop (suatu barisan sel terurut yang sedikitnya terdiri dari empat buah sel berbeda).

Berdasarkan **Tabel 2.12** di bawah dapat diketahui pergerakan pada tanda plus atau minus (+ atau -), dari pergerakan tersebut perhatikan tanda yang bertanda minus (-) pada sel $x_{2,4}$, sel $x_{3,2}$, sel $x_{1,1}$. Dari ketiga sel bertanda minus, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Sel tersebut adalah $x_{1,1}$ dengan alokasi sebelumnya 10 ton, dan alokasi tersebut lebih kecil dari alokasi $x_{2,4}$ dan $x_{3,2}$ yaitu 60 ton dan 20 ton. Angka 10 ton di $x_{1,1}$ tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Berikut tabel untuk loop revisi tabel dari $x_{2,1}$.

Tabel 2.12 Loop revisi tabel basis awal dari $x_{2,1}$

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | (-) 12 | (+) 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | (+) 10 | 12 | 8 | (-) 7 | 70 |
| C | 11 | (-) 8 | 12 | (+) 5 | 40 |
| D | 9 | 7 | 5 | 12 | 60 |
| E | 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Dari **Tabel 2.12** didapat hasil revisi tabel basis awal sebagai berikut.

Sel $x_{2,1}$ menjadi 10 karena $0+10=10$

Sel $x_{2,4}$ menjadi 50 karena $60-10=50$

Sel $x_{3,4}$ menjadi 30 karena $20+10=30$

Sel $x_{3,2}$ menjadi 10 karena $20-10=10$

Sel $x_{1,2}$ menjadi 80 karena $70+10=80$

Sel $x_{1,1}$ menjadi 0 karena $10 - 10 = 0$

Hasil revisi tabel basis awal dari $x_{2,1}$ tersebut, diperoleh biaya total yang dapat dilihat pada iterasi 1 **Tabel 2.13**.

$$\begin{aligned}
 z &= 80(10) + 10(10) + 10(8) + 50(7) + 10(8) + 30(5) + 60(5) + 50(5) \\
 &= 800 + 100 + 80 + 350 + 80 + 150 + 300 + 250 \\
 &= 2110
 \end{aligned}$$

Tabel 2.13 Transportasi Iterasi 1

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 12 | 80 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | 10 10 | 12 | 10 8 | 50 7 | 70 |
| C | 11 | 10 8 | 12 | 30 5 | 40 |
| D | 9 | 7 | 60 5 | 12 | 60 |
| E | 50 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Selanjutnya pengecekan keoptimalan dengan mencari *opportunity cost* dari iterasi 1 disajikan pada **Tabel 2.14**

Tabel 2.14 Pengecekan Optimasi dari iterasi 1

| Sel Kosong | Loop | Opportunity Cost |
|------------|---|----------------------|
| $x_{1,1}$ | $x_{1,1} - x_{1,2} - x_{3,2} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,1}$ | $12-10+8-5+7-10 = 2$ |
| $x_{1,3}$ | $x_{1,3} - x_{2,3} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2}$ | $11-8 +7-5+8-10 = 3$ |
| $x_{1,4}$ | $x_{1,4} - x_{3,4} - x_{3,2} - x_{1,2}$ | $9-5+8-10 = 2$ |
| $x_{2,2}$ | $x_{2,2} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2}$ | $12-7+5-8 = 2$ |
| $x_{3,1}$ | $x_{3,1} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,1}$ | $11-5+7-10 = 3$ |
| $x_{3,3}$ | $x_{3,3} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,3}$ | $12-5+7-8 = 6$ |
| $x_{4,1}$ | $x_{4,1} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,1}$ | $9-5+8-10 = 2$ |
| $x_{4,2}$ | $x_{4,2} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,4} - x_{3,4} - x_{3,2}$ | $7-5+8-7+5-8 = 0$ |
| $x_{4,4}$ | $x_{4,4} - x_{2,4} - x_{2,3} - x_{2,1}$ | $12-7+8-5 = 8$ |
| $x_{5,2}$ | $x_{5,2} - x_{3,2} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,1} - x_{5,1}$ | $6-8+5-7+10-5 = 1$ |
| $x_{5,3}$ | $x_{5,3} - x_{2,3} - x_{2,1} - x_{5,1}$ | $9-8+10-5 = 6$ |
| $x_{5,4}$ | $x_{5,4} - x_{2,4} - x_{2,1} - x_{5,1}$ | $10-7+10-5 = 8$ |

Pengecekan optimalan **Tabel 2.14** di atas, tidak terdapat nilai negatif pada saat merevisi tabel sehingga pemecahan sudah optimal. Tabel iterasi 1 sudah optimum sehingga penghitungan selesai. Namun, karena masih terdapat nilai *opportunity cost* (perkiraan biaya yang harus ditanggung bila satu alternatif keputusan dipilih) yang bernilai nol, maka iterasi 1 masih terdapat kemungkinan penyelesaian lain. Pada kasus ini merupakan masalah transportasi yang memiliki solusi lain kejadian khusus, sehingga tabel optimum di atas dapat dilakukan merevisi tabel pengiriman dari $x_{4,2}$.

Berdasarkan **Tabel 2.15** di bawah dapat diketahui pergerakan pada tanda plus atau minus (+ atau -), dari pergerakan tersebut perhatikan tanda yang bertanda minus (-) pada sel $x_{4,3}$, sel $x_{2,4}$, sel $x_{3,2}$. Dari ketiga sel bertanda minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Sel tersebut adalah sel $x_{3,2}$, dengan alokasi sebelumnya 10 ton, dan alokasi sel

tersebut lebih kecil dari alokasi $x_{4,3}$ dan $x_{2,4}$ yaitu 60 ton dan 50 ton. Revisi tabel dari $x_{4,2}$ ditunjukkan pada **Tabel 2.15**.

Tabel 2.15 Loop revisi tabel dari $x_{4,2}$

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 12 | 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | 10 | 12 | (+) 8 | (-) 7 | 70 |
| C | 11 | (-) 8 | 12 | (+) 5 | 40 |
| D | 9 | (+) 7 | (-) 5 | 12 | 60 |
| E | 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Angka 10 ton di $x_{3,2}$ tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian).

Dengan demikian diperoleh hasil revisi tabel iterasi 1 sebagai berikut:

Sel $x_{4,2}$ menjadi 10 karena $0 + 10 = 10$

Sel $x_{4,3}$ menjadi 50 karena $60 - 10 = 50$

Sel $x_{2,3}$ menjadi 20 karena $10 + 10 = 20$

Sel $x_{2,4}$ menjadi 40 karena $50 - 10 = 40$

Sel $x_{3,4}$ menjadi 40 karena $30 + 10 = 40$

Sel $x_{3,2}$ menjadi 0 karena $10 - 10 = 0$

Hasil dari merevisi tabel iterasi 1 tersebut, dapat disajikan pada iterasi 2 **Tabel 2.16**.

Tabel 2.16 Transportasi Iterasi 2

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 12 | 80 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | 10 10 | 12 | 20 8 | 40 7 | 70 |
| C | 11 | 8 | 12 | 40 5 | 40 |
| D | 9 | 10 7 | 50 5 | 12 | 60 |
| E | 50 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Berdasarkan **Tabel 2.16** didapat biaya total sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 z &= 80(10) + 10(10) + 20(8) + 40(7) + 40(5) + 10(7) + 50(5) + 50(5) \\
 &= 800 + 100 + 160 + 280 + 200 + 70 + 250 + 250 \\
 &= 2110.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya pengecekan keoptimalan dengan mencari *opportunity cost* dari iterasi 2 yang disajikan pada **Tabel 2.17**.

Tabel 2.17 Pengecekan optimalisasi dari iterasi 2

| Sel Kosong | Loop | Opportunity Cost |
|------------|---|----------------------|
| $x_{1,1}$ | $x_{1,1} - x_{1,2} - x_{4,2} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,1}$ | $12-10+7-5+8-10 = 2$ |
| $x_{1,3}$ | $x_{1,3} - x_{4,3} - x_{4,2} - x_{1,2}$ | $11-5 +7-10 = 3$ |
| $x_{1,4}$ | $x_{1,4} - x_{2,4} - x_{2,3} - x_{4,3} - x_{4,2} - x_{1,2}$ | $9-7+8-5+7-10 = 2$ |
| $x_{2,2}$ | $x_{2,2} - x_{2,3} - x_{4,3} - x_{4,2}$ | $12-8+5-7 = 2$ |
| $x_{3,1}$ | $x_{3,1} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,1}$ | $11-5+7-10 = 3$ |
| $x_{3,2}$ | $x_{3,2} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,3} - x_{4,3} - x_{4,2}$ | $8-5+7-8+5-7 = 0$ |
| $x_{3,3}$ | $x_{3,3} - x_{3,4} - x_{2,4} - x_{2,3}$ | $12-5+7-8 = 7$ |
| $x_{4,1}$ | $x_{4,1} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,1}$ | $9-5+8-10 = 2$ |
| $x_{4,4}$ | $x_{4,4} - x_{2,4} - x_{2,3} - x_{4,3}$ | $12-7+8-5 = 8$ |

Tabel 2.17 Pengecekan optimalisasi dari iterasi 2

| Sel Kosong | Loop | Opportunity Cost |
|------------|---|--------------------|
| $x_{5,2}$ | $x_{5,2} - x_{4,2} - x_{4,3} - x_{2,3} - x_{2,1} - x_{5,1}$ | $6-7+5-8+10-5 = 1$ |
| $x_{5,3}$ | $x_{5,3} - x_{2,3} - x_{2,1} - x_{5,1}$ | $9-8+10-5 = 6$ |
| $x_{5,4}$ | $x_{5,4} - x_{2,4} - x_{2,1} - x_{5,1}$ | $10-7+10-5 = 8$ |

Pada pengecekan keoptimalan **Tabel 2.17** masih terdapat nilai *opportunity cost* (kemungkinan biaya yang harus ditanggung bila satu koefisien alternatif keputusan dipilih) yang bernilai nol, maka iterasi 2 masih terdapat kemungkinan belum optimal atau sudah optimal. Langkah selanjutnya adalah melakukan revisi tabel iterasi 2 dari $x_{3,2}$. Berikut tabel revisi iterasi 2 yang ditunjukkan pada **Tabel 2.18**.

Tabel 2.18 Loop revisi tabel dari $x_{3,2}$

| Tujuan Sumber | Kota 1 | Kota 2 | Kota 3 | Kota 4 | Total |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 12 | 10 | 11 | 9 | 80 |
| B | 10 | 12 | (-) 8 | (+) 7 | 70 |
| C | 11 | (+) 8 | 12 | (-) 5 | 40 |
| D | 9 | (-) 7 | (+) 5 | 12 | 60 |
| E | 5 | 6 | 9 | 10 | 50 |
| | 60 | 90 | 70 | 80 | |

Berdasarkan **Tabel 2.18** di bawah dapat diketahui pergerakan pada tanda plus atau minus (+ atau -), dari pergerakan tersebut perhatikan tanda yang bertanda minus (-) pada sel $x_{3,4}$, sel $x_{2,3}$, sel $x_{4,2}$. Ketiga sel bertanda minus

tersebut, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Sel yang memiliki alokasi paling kecil adalah sel $x_{4,2}$, dengan alokasi sebelumnya 10 ton, dan alokasi tersebut lebih kecil dari alokasi $x_{3,4}$ dan $x_{2,3}$ yaitu 40 ton dan 20 ton. Angka 10 ton di $x_{4,2}$ tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan pergeseran alokasi sel sebagai berikut:

Sel $x_{3,2}$ menjadi 10 karena $0+10=10$

Sel $x_{3,4}$ menjadi 30 karena $40-10=30$

Sel $x_{2,4}$ menjadi 50 karena $40+10=50$

Sel $x_{2,3}$ menjadi 10 karena $20-10=10$

Sel $x_{4,3}$ menjadi 60 karena $50+10=60$

Sel $x_{4,2}$ menjadi 0 karena $10-10=0$

Hasil dari merevisi tabel iterasi 2 tersebut, merupakan iterasi ke 3, di mana tabel iterasi 3 sama dengan iterasi 1 pada **Tabel 2.13**, dan dari permasalahan transportasi tersebut didapat nilai optimal yang paling minimal yang sama yaitu 2110. Dari masalah transportasi **Contoh 2.4**, didapat 2 kemungkinan tabel optimal masalah transportasi.

Pertama, **Tabel 2.13** didapat alokasi produksi dengan biaya terendah adalah 80 ton unit produksi dari pabrik A ke Kota 2, sebanyak 10 ton unit produksi dari pabrik B ke Kota 1, 10 ton unit produksi dari pabrik B ke Kota kota 3, 50 ton unit produksi dari pabrik B ke Kota 4, 10 ton unit produksi dari pabrik C ke Kota 2, 30 ton unit produksi dari pabrik C ke Kota 4, 60 ton unit produksi dari

pabrik D ke Kota 3, serta 50 ton unit produksi dari pabrik E ke Kota 1, dengan biaya minimum transportasi keseluruhan yang harus dikeluarkan sebesar 2110 (ribu).

Kedua, **Tabel 2.16** didapat alokasi produksi dengan biaya terendah adalah 80 ton unit produksi dari pabrik A ke Kota 2, sebanyak 10 ton unit produksi dari pabrik B ke Kota 1, 20 ton unit produksi dari pabrik B ke Kota kota 3, 40 ton unit produksi dari pabrik B ke Kota 4, 40 ton unit produksi dari pabrik C ke Kota 4, 10 ton unit produksi dari pabrik D ke Kota 2, 50 ton unit produksi dari pabrik D ke Kota 3, serta 50 ton unit produksi dari pabrik E ke Kota 1, dengan biaya minimum transportasi keseluruhan yang harus dikeluarkan sebesar 2110 (ribu).

E. Hubungan Masalah Transportasi dengan Program Linear

Salah satu jenis masalah dalam program linear adalah masalah transportasi, disebut masalah transportasi karena aplikasinya banyak digunakan untuk mengoptimalkan kegiatan transportasi. Masalah transportasi merupakan masalah aliran biaya optimum jenis khusus. Pengaplikasian jenis ini cenderung memerlukan sejumlah besar kendala dan variabel, sehingga aplikasi perhitungan dengan langsung menggunakan metode simpleks akan memerlukan banyak perhitungan. Karakteristik kunci masalah ini adalah kebanyakan koefisien a_{ij} dalam kendala-kendala memiliki nilai nol dan beberapa koefisien relatif bukan nol tampil dalam pola yang berbeda. Sebagai hasilnya, dimungkinkan untuk mengembangkan algoritma khusus yang mampu mempersingkat perhitungan

dengan memanfaatkan struktur khusus masalah yang ada (Hiller dan Lieberman, 2008:274).

Untuk menjelaskan struktur khusus ini, akan digunakan tabel dalam bentuk matriks koefisien kendala di mana a_{ij} merupakan koefisien dari variabel ke - j pada kendala-kendala ke - i .

Matriks Koefisien kendala untuk program linear:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Masalah transportasi dapat dideskripsikan dalam *tabel parameter* dan memenuhi *asumsi yang disyaratkan* dan *asumsi biaya*. Tujuannya adalah meminimalkan total biaya pendistribusian produk (Hiller dan Lieberman, 2008:277).

Asumsi yang disyaratkan: Masing-masing sumber memiliki *supply* yang tetap untuk produk, di mana seluruh penawaran pasti didistribusikan ke tujuan, misal b_i sebagai jumlah produk yang ditawarkan sumber i , untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Begitu juga masing-masing tujuan memiliki permintaan yang tetap untuk unit, di mana keseluruhan permintaan harus diterima dari sumber, misal a_j sebagai jumlah produk yang diterima tujuan j , untuk $j = 1, 2, \dots, n$.

Asumsi biaya: Biaya mendistribusikan produk dari sumber apa pun ke tujuan apa pun bersifat proposional secara langsung terhadap jumlah produk yang didistribusikan. Oleh karena itu, biaya ini diperoleh dari biaya distribusi produk dikali jumlah produk yang didistribusi.

Formulasi program linear pada masalah transportasi dan tabel koefisien kendala yang memiliki struktur khusus, menunjukkan bahwa masalah transportasi

merupakan jenis pemrograman linear yang khusus. Berikut tabel yang menunjukkan koefisien-koefisien kendala pada masalah transportasi yang disajikan pada **Tabel 2.19** di mana untuk tanda blok yang horizontal merupakan kendala *supply*, sedangkan untuk tanda blok miring menunjukkan kendala *demand*.

Tabel 2.19 Koefisien kendala untuk masalah transportasi

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} & \cdots & x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \\
 A = & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} \\
 & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\
 & 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & & 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 \\
 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & & 0 & 0 & \cdots & \boxed{1}
 \end{array}$$

Masalah transportasi merupakan masalah pemrograman linear tipe khusus, maka masalah transportasi dapat diselesaikan menggunakan metode simpleks. Dalam bagian ini, beberapa langkah-langkah penghitungan dapat dilakukan dengan memanfaatkan struktur khusus. Formulasi program linear pada masalah transportasi dan metode simpleks, dapat dilihat pada persamaan (2.5) dan persamaan (2.3). Dari kedua formulasi tersebut dapat dilihat bahwa masalah transportasi merupakan program linear dengan keistimewaan tersendiri yaitu (Manurung, 2007:7).

- a. Fungsi tujuan untuk masalah transportasi pasti akan meminimalkan, karena tujuan untuk masalah transportasi adalah meminimalkan biaya total pendistribusian produk.
- b. Semua kendala masalah transportasi berbentuk persamaan (=).

- c. Untuk indeks masalah transportasi memiliki 2 (dua) indeks dan pada metode simpleks memiliki 1 (satu) indeks. Untuk menyelesaikan masalah transportasi dengan metode simpleks harus menggunakan tabel perubahan indeks dari tabel masalah transportasi ke tabel metode simpleks.
- d. Semua a_{ij} bernilai 1 atau 0 .

Pengisian sel-sel untuk angka 1 merupakan pengisian pada koefisien kendala untuk setiap sumber dan setiap tujuan, selebihnya akan diisi 0. Koefisien kendala masalah transportasi dapat dilihat pada **Tabel 2.19**.

Salah satu keistimewaan masalah transportasi ke program linear di atas, dijelaskan bahwa masalah transportasi memiliki 2 indeks (i sumber dan j tujuan) dan pada metode simpleks program linear memiliki 1 indeks. Untuk menyelesaikan masalah tersebut harus dibuat tabel perubahan indeks terlebih dahulu, di mana tabel umum masalah transportasi dapat dilihat pada **Tabel 2.5**.

Untuk menyamakan indeks antara masalah transportasi dan metode simpleks dapat dijelaskan sebagai berikut.

Untuk $i = 1$; maka $c_{i,j} = c_k$; dengan $k = j$

Untuk $i = 2$; maka $c_{i,j} = c_k$; dengan $k = n + j$

Untuk $i = 3$; maka $c_{i,j} = c_k$; dengan $k = 2n + j$

Untuk $i = m$; maka $c_{i,j} = c_k$; dengan $k = (m - 1)n + j$

Di mana $j = 1, 2, \dots, n$

Dari penjelasan di atas dapat diterapkan pada tabel perubahan indeks dari masalah transportasi ke metode simpleks, yang ditunjukkan **Tabel 2.20**.

Tabel 2.20 Tabel Perubahan Indeks dari Masalah Transportasi ke Metode Simpleks

| | D_1 | D_2 | ... | D_n | Suplay |
|---------------|----------------------------------|----------------------------------|-----|----------------------|----------|
| O_1 | c_1 x_1 | c_2 x_2 | ... | c_n x_n | b_1 |
| O_2 | c_{n+1} x_{n+1} | c_{n+2} x_{n+2} | ... | c_{2n} x_{2n} | b_2 |
| \vdots | \vdots | \vdots | ... | \vdots | \vdots |
| O_m | $c_{(m-1)n+1}$ $x_{(m-1)n+1}$ | $c_{(m-1)n+2}$ $x_{(m-1)n+2}$ | ... | c_{mn} x_{mn} | b_m |
| <i>Demand</i> | a_1 | a_2 | ... | a_n | |

Tabel perubahan yang ditunjukkan pada **Tabel 2.20** dapat dibawa ke tabel simpleks program linear (**Tabel 2.1**), kemudian dibahas lebih lanjut keterkaitan antara masalah transportasi dengan metode simpleks. Jika pada **Tabel 2.20** merupakan permasalahan transportasi secara umum dan dihitung optimasinya menggunakan tabel simpleks, sedangkan untuk masalah transportasi yang dihitung optimasinya menggunakan tabel transportasi baik penyelesaiannya tabel basis awal dengan *metode barat laut*, *metode vogel*, atau *metode biaya terkecil* dan pengecekan keoptimalan dengan *stepping stone*, atau *modi*, sehingga didapat tabel optimal masalah transportasi. Dari tabel optimal masalah transportasi juga dapat dibuat dalam bentuk tabel simpleks yaitu tabel simpleks optimum masalah transportasi.

Permasalahan tersebut dapat dibandingkan dengan antar formulasi untuk masalah transportasi dan metode simpleks program linear, serta tabel perubahan indeks masalah transportasi ke metode simpleks. Pada fungsi tujuan masalah

transportasi memiliki kesamaan dengan fungsi tujuan metode simpleks program linear.

$$c_{i,j} \rightarrow c_k, \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, mn$$

$$x_{i,j} \rightarrow x_k, \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, mn$$

Dari kesamaan tersebut dapat dibentuk formulasi program linear pada simpleks optimum masalah transportasi

$$\left. \begin{array}{l} z = \sum_{j=1}^n c_k x_k \\ \text{Dengan kendala} \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_l \\ \text{dengan } l = 1, 2, \dots, m + n \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Di mana nilai a_{ij} pada tabel simpleks optimal dari tabel optimum masalah transportasi adalah -1, 1, atau 0. Nilai a_{ij} pada masalah transportasi akan dinotasikan dengan I , sehingga kendala program linear untuk masalah transportasi:

$$\sum_{j=1}^n (I) x_j = b_l$$

Dengan $j = 1, 2, \dots, m + n$

Pengisian sel-sel pada variabel basis dengan matriks identitas yang terdiri dari 1 dan 0. Sel-sel variabel non basis diisi dengan 1 untuk pergeseran langkah stepping stone bertanda (+), untuk angka -1 digunakan pada pergeseran stepping stone bertanda (-), dan selebihnya sel-sel variabel non basis diisi dengan 0. Dari

perubahan tersebut maka didapat ditunjukkan tabel simpleks optimal dari tabel optimal masalah transportasi pada **Tabel 2.21**.

Tabel 2.21 Tabel simpleks optimal dari tabel optimal masalah transportasi

| | | | | | | | | | | |
|-------------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|---------|-----------|-----------|-------|
| c_j | c_1 | c_2 | \dots | c_{mn} | M | M | \dots | M | b_i | R_i |
| x_j | x_1 | x_2 | \dots | x_{mn} | d_1 | d_2 | \dots | d_{m+n} | | |
| \bar{x}_i | | | | | | | | | | |
| x_1 | 1 | 0 | \dots | 0 | I | I | \dots | I | b_1 | |
| x_2 | 0 | 1 | \dots | 0 | I | I | \dots | I | b_2 | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \dots | \vdots | \vdots | \vdots | \dots | \vdots | \vdots | |
| \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots | |
| x_{m+n-1} | 0 | 0 | \dots | I | I | I | \dots | I | \vdots | |
| d_p | 0 | 0 | \dots | 0 | I | I | \dots | I | b_{m+n} | |
| z_j | z_1 | z_2 | z_3 | \dots | \dots | \dots | \dots | z_{mn} | | |
| $z_j - c_j$ | z_1 | z_2 | z_3 | \dots | \dots | \dots | \dots | z_{mn} | | |

Keterangan: d_p adalah salah satu bilangan *artificial* dari d_1 sampai d_{m+n} .

I adalah koefisien kendala yang memiliki nilai 1, -1, atau 0.

F. Analisis Sensitivitas (Sensitivity Analysis)

1. Pengertian Analisis Sensitivitas (Algoritma 3)

Setelah ditemukan penyelesaian yang optimal dari suatu masalah Program Linear, terkadang perlu untuk menelaah lebih jauh kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai akibat seandainya terjadi perubahan pada koefisien-koefisien dalam model pada saat tabel optimal telah diselesaikan. Secara spontan, apabila hal itu terjadi, seseorang dapat saja memutuskan untuk menghitung kembali dari awal, dengan masalah baru (karena perubahan koefisien-koefisien tersebut). Bila

cara ini dilakukan akan memakan waktu yang lama karena harus menghitung segala sesuatunya kembali. Untuk menghindari hal tersebut akan lebih baik memakai suatu cara yang dinamakan Analisis Sensitivitas, di mana merupakan suatu usaha untuk mempelajari nilai-nilai dari variabel-variabel pengambilan keputusan dalam suatu model matematika jika satu atau beberapa atau semua parameter model tersebut berubah atau menjelaskan pengaruh perubahan data terhadap penyelesaian optimal yang sudah ada (Pangestu, Marwan, dan Hani, 2013:71).

Analisis sensitivitas dilakukan setelah dicapai penyelesaian optimal, sehingga analisis ini sering disebut pula *Post Optimality Analysis*. Jadi, tujuan analisis sensitivitas ini adalah mengurangi perhitungan-perhitungan dan menghindari perhitungan ulang (Hiller dan Lieberman, 2008:120).

Analisis sensitivitas dapat dikelompokkan menjadi lima berdasarkan perubahan-perubahan parameter yang terjadi, yaitu:

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan (c_j)
- b. Perubahan koefisien teknis (a_{ij})
- c. Perubahan koefisien kapasitas sumber daya dari fungsi kendala (b_i)
- d. Adanya tambahan fungsi kendala baru
- e. Adanya tambahan variabel pengambilan keputusan (x_j) atau adanya penambahan kegiatan baru.

Pada penelitian ini, perubahan koefisien yang dibahas atau dikaji adalah perubahan pada koefisien fungsi tujuan pada masalah transportasi. Perubahan koefisien fungsi tujuan masalah transportasi yang digunakan adalah perubahan

salah satu koefisien fungsi tujuan masalah transportasi. Pada analisis perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan, di mana perubahan terjadi pada salah satu koefisien ongkos pada fungsi tujuan.

2. Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan (c_j)

Perubahan koefisien fungsi tujuan merupakan perubahan yang terjadi karena adanya penambahan atau pengurangan pada koefisien ongkos yang merupakan kontribusi dari setiap satuan kegiatan terhadap tujuan. Merujuk pada persamaan (2.3), untuk perubahan pada koefisien ongkos soal lama (c_j) menjadi koefisien ongkos baru (c_j^*) adalah:

$$c_j^* = c_j + \Delta c_j$$

Dijelaskan pada B. Susanta (1994:262-265), merujuk pada persamaan (2.4) jika ditulis dengan notasi matriks untuk c_j menjadi \mathbf{C} maka berubah menjadi $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}$.

Dengan adanya perubahan koefisien fungsi tujuan variable basis, maka matriks koefisien fungsi tujuan untuk variable basis berubah dari $\bar{\mathbf{C}}$ menjadi $\bar{\mathbf{C}}^* = \bar{\mathbf{C}} + \Delta\bar{\mathbf{C}}$.

Dengan:

$\bar{\mathbf{C}}$: matriks yang anggotanya merupakan koefisien ongkos lama dari variabel yang menjadi basis optimal pada soal lama.

$\Delta\bar{\mathbf{C}}$: matriks yang anggotanya merupakan besarnya perubahan koefisien ongkos untuk variabel basis.

$\bar{\mathbf{C}}^*$: matriks yang anggotanya merupakan koefisien ongkos baru dari variabel basis optimum pada soal lama.

Diketahui koefisien control pada tabel optimum adalah:

$$z_j - c_j = \bar{C}Y_j - c_j$$

Dengan perubahan pada salah satu koefisien tujuan, koefisien control berubah menjadi:

$$\begin{aligned} z_j^* - c_j^* &= \bar{C}^* Y_j - c_j^* = (\bar{C} + \Delta\bar{C})Y_j - (c_j + \Delta c_j) \\ &= (\bar{C} + \Delta\bar{C})Y_j - c_j - \Delta c_j \\ &= \bar{C}Y_j + \Delta\bar{C}Y_j - c_j - \Delta c_j \\ &= (\bar{C}Y_j - c_j) + \Delta\bar{C}Y_j - \Delta c_j \end{aligned}$$

Karena $z_j - c_j = \bar{C}Y_j - c_j$ maka:

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta\bar{C}Y_j - \Delta c_j$$

Di mana Y_j adalah matriks kolom yang bersesuaian dengan x_j , untuk x_j variabel bukan basis yang diperoleh dari tabel simpleks optimal dari masalah lama.

Dari perubahan tersebut, penyelesaian optimal soal lama akan tetap menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru (soal lama yang mengalami perubahan) jika:

$$z_j^* - c_j^* \geq 0 \text{ (untuk pola memaksimumkan)}$$

Atau

$$(z_j - c_j) + \Delta\bar{C}Y_j - \Delta c_j \geq 0.$$

$$z_j^* - c_j^* \leq 0 \text{ (untuk pola meminimumkan)}$$

Atau

$$(z_j - c_j) + \Delta\bar{C}Y_j - \Delta c_j \leq 0.$$

Jika persamaan tersebut dipenuhi maka variabel basis yang menyusun penyelesaian optimal dan nilainya tidak berubah, yang berubah adalah nilai optimum yang semula $z = \bar{C}\bar{x}$ berubah menjadi:

$$\begin{aligned} z^* &= \bar{C}^* \bar{x} = (\bar{C} + \Delta\bar{C})\bar{x} \\ &= \bar{C}\bar{x} + \Delta\bar{C}\bar{x} = z + \Delta z \end{aligned}$$

Jadi nilai optimum mengalami perubahan sebesar $\Delta z = \Delta\bar{C}\bar{x}$.

Analisis sensitivitas parameter c_j merupakan penentu batasan di mana pada batas itu nilai optimal variabel keputusan tidak berubah. Perubahan yang terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan dilakukan dengan asumsi bahwa koefisien yang lain bersifat tetap, maka kemungkinan perubahan yang terjadi dari koefisien fungsi tujuan pada program linear adalah perubahan yang terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan variabel basis atau perubahan yang terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan variabel bukan basis. Perubahan variabel basis diambil dari $m + n - 1$ persamaan untuk $m \times n$ persamaan, dan variabel non basis diambil dari selain variabel basis ditambah dengan persamaan dari kolom variabel pengetat. Berikut akan dijelaskan langkah-langkah analisis sensitivitas perubahan untuk salah satu koefisien fungsi tujuan (Ernawati, 2010:34).

a. Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis.

Perubahan koefisien untuk variabel basis merupakan perubahan yang terjadi pada koefisien fungsi tujuan dari variabel yang menjadi basis pada penyelesaian optimal lama. Karena perubahan hanya terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis, maka untuk koefisien fungsi tujuan dari variabel bukan basis bernilai tetap. Oleh karena itu perubahan

dari variabel bukan basis sama dengan nol atau $\Delta c_j = 0$, untuk x_j variabel bukan basis.

Karena koefisien kontrol yang diselidiki adalah koefisien kontrol untuk x_j variabel bukan basis dengan $\Delta c_j = 0$ maka rumus untuk menghitung koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis akan berubah menjadi:

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{C} Y_j$$

Langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis pada program linear dapat ditentukan sebagai berikut (Ernawati, 2010:53).

Langkah 1:

Mencari besar perubahan untuk salah satu koefisien fungsi tujuan menggunakan tabel simpleks optimal pada soal lama, dengan rumus:

$$BB \leq c_m \leq BA$$

BB adalah batas bawah dan BA adalah batas atas.

Langkah 2:

Menentukan nilai-nilai dari rumus perubahan koefisien fungsi tujuan variabel basis.

- a) Besar perubahan pada koefisien fungsi tujuan (Δc_j).
- b) $z_j - c_j$ untuk x_j variabel bukan basis.
- c) Y_j untuk x_j variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simplek optimal dari masalah lama.
- d) Menentukan ($\Delta \bar{C}$)

Langkah 3:

Menghitung nilai $z_j^* - c_j^*$ dan mencari solusi optimal, untuk x_j variabel bukan basis.

- a) Jika $z_j^* - c_j^* \leq 0$ (meminimumkan) atau $z_j^* - c_j^* \geq 0$ (memaksimalkan) maka penyelesaian optimum, dan soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini disebabkan nilai dari koefisien kontrol yang baru masih bernilai positif (memaksimumkan) dan negatif (meminimumkan), sehingga tabel optimal soal lama masih optimal untuk masalah baru (masalah program linear yang telah mengalami perubahan). Oleh karena itu, adanya perubahan dari koefisien fungsi tujuan tidak mengubah penyelesaian soal lama.

Perubahan hanya terjadi pada nilai tujuan dengan penambahan nilai tujuan: $\Delta z = \Delta \overline{CX}$

Nilai tujuan yang baru adalah:

$$z^* = z_{min} + \Delta z = z_{min} + \Delta \overline{CX}$$

- b) Jika $z_j^* - c_j^* > 0$ (meminimumkan) atau $z_j^* - c_j^* < 0$ (memaksimal) maka tabel simplek belum optimal, sehingga tabel optimal soal lama belum menjadi tabel optimal bagi soal yang baru. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan dengan memasukkan x_j yang menyebabkan $z_j^* - c_j^* > 0$ (meminimumkan) atau $z_j^* - c_j^* < 0$ (memaksimal) menjadi variabel basis.

Setelah diperoleh penyelesaian yang optimal dan layak, maka penyelesaian optimal inilah yang menjadi penyelesaian optimal pada masalah program linear yang mengalami perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut.

b. Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Bukan Basis.

Perubahan koefisien untuk variabel bukan basis merupakan perubahan yang terjadi pada koefisien fungsi tujuan dari variabel yang tidak menjadi basis pada penyelesaian optimal lama. Langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel bukan basis pada program linear sebenarnya sama dengan perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis. Perbedaannya hanya terletak pada rumus yang digunakan untuk menghitung koefisien kontrol yang baru (Ernawati, 2010:59).

Karena perubahan yang terjadi bukan merupakan perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis, maka nilai dari $\Delta\bar{C} = 0$ sehingga diperoleh:

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + 0Y_j - \Delta c_j$$

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) - \Delta c_j$$

Langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel bukan basis pada program linear dapat ditentukan sebagai berikut.

Langkah 1:

Mencari besar perubahan untuk salah satu koefisien fungsi tujuan menggunakan tabel optimal soal lama, dengan rumus:

$$BB \leq c_m \leq BA$$

BB adalah batas bawah dan BA adalah batas atas.

Langkah 2:

Menentukan nilai-nilai dari rumus perubahan koefisien fungsi tujuan variabel bukan basis.

- a) Besarnya perubahan koefisien fungsi tujuan (Δc_j).
- b) Menentukan $z_j - c_j$ untuk x_j variabel bukan basis.

Langkah 3:

Menghitung nilai $z_j^* - c_j^*$ dan mencari solusi optimal, untuk x_j variabel bukan basis. Dari perhitungan pada langkah 2 di atas diperoleh:

- a) Jika $z_j^* - c_j^* \leq 0$ (meminimumkan) atau $z_j^* - c_j^* \geq 0$ (memaksimalkan) maka penyelesaian optimum, soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini disebabkan nilai dari koefisien kontrol yang baru masih bernilai positif (memaksimumkan) dan negatif (meminimumkan), sehingga tabel optimal soal lama masih optimal untuk masalah baru (masalah program linear yang telah mengalami perubahan). Oleh karena itu, adanya perubahan dari koefisien fungsi tujuan tidak mengubah penyelesaian soal lama. Perubahan hanya terjadi pada nilai tujuan dengan pertambahan nilai tujuan: $\Delta z = \Delta \overline{CX}$

Nilai tujuan yang baru adalah:

$$z^* = z_{min} + \Delta z = z_{min} + \Delta \overline{CX}$$

- b) Jika $z_j^* - c_j^* > 0$ (meminimumkan) atau $z_j^* - c_j^* < 0$ (memaksimal) maka tabel simplek belum optimal, sehingga tabel optimal soal lama belum menjadi penyelesaian tabel optimal bagi soal yang baru. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan dengan memasukkan x_j yang menyebabkan $z_j^* - c_j^* > 0$ (meminimumkan) atau $z_j^* - c_j^* < 0$ (memaksimal) menjadi variabel basis.

Setelah diperoleh penyelesaian yang optimal dan layak, maka penyelesaian optimal inilah yang menjadi penyelesaian optimal pada masalah program linear yang mengalami perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut.

Contoh 2.5:

Analisis sensitivitas pada variabel basis dan variabel non basis.

Fungsi tujuan:

Meminimumkan $z = 3x_1 + 2x_2$

Fungsi kendala:

$$x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 = 11$$

Dengan tabel optimal yang ditunjukkan pada **Lampiran 3** akan dicari penyelesaian analisis sensitivitas perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis.

Langkah 1:

Mencari besarnya perubahan, misal diambil untuk perubahan x_2 . Berikut tabel perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan variabel basis x_2 , yang disajikan pada **Tabel 2.22**.

Tabel 2.22 Perubahan Salah Satu Koefisien Fungsi Tujuan Variabel Basis

| | c_j | 3 | c_2 | 0 | M | M | | |
|-------------|--|-----------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|
| \bar{c}_i | $\begin{matrix} x_j \\ \bar{x}_j \end{matrix}$ | x_1 | x_2 | s_1 | d_1 | d_2 | b_i | R_i |
| c_2 | x_2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 11 | 11 |
| 0 | s_1 | 3 | 0 | 1 | -1 | 4 | 36 | 3 |
| z_j | | c_2 | c_2 | 0 | 0 | c_2 | | |
| $z_j - c_j$ | | $c_2 - 3$ | 0 | 0 | 0 | $(c_2 - M)$ | | |

Dari perubahan tabel diatas dapat ditentukan batasan untuk nilai perubahan pada koefisien c_2 yaitu:

$$c_2 - 3 \leq 0$$

$$c_2 \leq 3$$

Misal perubahan yang terjadi pada c_2 akan berubah menjadi 3 yang diambil secara sembarang maka persamaan menjadi:

$$\text{Meminimumkan } z = 3x_1 + 3x_2$$

Fungsi kendala:

$$x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 = 11$$

Langkah 2:

Menentukan nilai dari:

a) Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru.

$$\Delta c_1 = 0 \text{ (} x_1 \text{ , variabel non basis)}$$

$$\Delta c_2 = 1 \text{ (} x_2 \text{ , variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 0 \text{ (} s_1 \text{ , variabel basis)}$$

$$\Delta c_4 = 0 \text{ (} d_1 \text{ , variabel non basis)}$$

$$\Delta c_5 = 0 \text{ (} d_2 \text{ , variabel non basis)}$$

b) $(z_j - c_j)$ untuk x_j variabel bukan basis.

Dari tabel optimal diatas diketahui nilai dari koefisien kontrol lama untuk variabel bukan basis yaitu:

$$z_1 - c_1 = -1$$

$$z_4 - c_4 = -M$$

$$z_5 - c_5 = -M + 2$$

c) Y_j untuk x_j variabel bukan basis yang diperoleh dari tabel simplek optimal dari masalah lama.

Dari tabel optimal diatas diketahui nilai dari Y_j untuk variabel bukan basis yaitu:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Y_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d) Menentukan $\Delta\bar{C}$

Dari tabel optimal diatas diketahui bahwa variabel yang merupakan variabel basis optimal adalah x_1, s_1, x_2 sehingga:

$$\Delta\bar{C} = (\Delta c_2, \Delta c_3) = (1, 0)$$

Langkah 3:

Menghitung $z_j^* - c_j^*$ untuk x_j variabel bukan basis dengan rumus:

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta\bar{C}Y_j$$

$$z_1^* - c_1^* = (z_1 - c_1) + \Delta\bar{C}Y_1 = -1 + (1, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$z_4^* - c_4^* = (z_4 - c_4) + \Delta\bar{C}Y_4 = -M + (1, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -M$$

$$z_5^* - c_5^* = (z_5 - c_5) + \Delta\bar{C}Y_5 = -M + 2 + (1, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -M + 3$$

Karena $z_j^* - c_j^* \leq 0$ untuk x_j variabel bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru dengan perubahan nilai sebesar:

$$\Delta z = \Delta\bar{C}\bar{X} = (1, 0) \begin{bmatrix} 11 \\ 36 \end{bmatrix} = 11$$

Sehingga nilai tujuan yang baru adalah:

$$z^* = z_{min} + \Delta z = 22 + 11 = 33$$

Dengan tabel optimal yang ditunjukkan pada **Lampiran 3** akan dicari penyelesaian analisis sensitivitas perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan untuk variabel non basis dari **Contoh 2.5**, yaitu:

Langkah 1:

Mencari besarnya perubahan. Misal diambil untuk perubahan x_1 . Berikut tabel perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan variabel basis x_1 , yang disajikan pada **Tabel 2.23**.

Tabel 2.23 Perubahan Salah Satu Koefisien Fungsi Tujuan Variabel Non Basis

| | c_j | c_1 | 2 | 0 | M | M | b_i | R_i |
|-------------|----------------------|-----------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|
| \bar{c}_i | x_j \bar{x}_j | x_1 | x_2 | s_1 | d_1 | d_2 | | |
| 2 | x_2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 11 | 11 |
| 0 | s_1 | 3 | 0 | 1 | -1 | 4 | 36 | 3 |
| z_j | | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | | |
| $z_j - c_j$ | | $2 - c_1$ | 0 | 0 | 0 | $(2-M)$ | | |

Dari tabel perubahan di atas dapat ditentukan batasan untuk nilai perubahan pada koefisien c_1 yaitu:

$$2 - c_1 \leq 0$$

$$2 \leq c_1$$

$$c_1 \geq 2$$

Misal perubahan yang terjadi pada c_1 akan berubah menjadi 2 yang diambil secara sembarang maka persamaan menjadi:

Meminimumkan $z = 2x_1 + 2x_2$

Fungsi kendala:

$$x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 = 11$$

Langkah 2:

- a. Mencari besar perubahan untuk salah satu koefisien fungsi tujuan menggunakan tabel optimal soal lama.

$$\Delta c_1 = -1 \text{ (} x_1 \text{ , variabel non basis)}$$

$$\Delta c_2 = 0 \text{ (} x_2 \text{ , variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 0 \text{ (} s_1 \text{ , variabel basis)}$$

$$\Delta c_4 = 0 \text{ (} d_1 \text{ , variabel non basis)}$$

$$\Delta c_5 = 0 \text{ (} d_2 \text{ , variabel non basis)}$$

- b. $(z_j - c_j)$ untuk x_j variabel bukan basis.

Dari tabel optimal diatas diketahui nilai dari koefisien kontrol lama untuk variabel bukan basis yaitu:

$$z_1 - c_1 = -1$$

$$z_4 - c_4 = -M$$

$$z_5 - c_5 = -M + 2$$

Langkah 3:

Menghitung nilai $z_j^* - c_j^*$ dan mencari solusi optimal, untuk x_j variabel bukan basis dengan menggunakan rumus:

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j$$

Dari perhitungan pada langkah 2 di atas diperoleh:

$$z_1^* - c_1^* = z_1 - c_1 - \Delta c_1 = -1 - (-1) = 0$$

$$z_4^* - c_4^* = z_4 - c_4 - \Delta c_4 = -M - 0 = -M$$

$$z_5^* - c_5^* = z_5 - c_5 - \Delta c_5 = -M + 2 - 0 = -M + 2$$

Karena $z_j^* - c_j^* \leq 0$ untuk x_j variabel bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru dengan perubahan nilai sebesar:

$$\Delta z = \Delta \overline{C\mathbf{X}} = (0,0) \begin{bmatrix} 11 \\ 36 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga nilai tujuan yang baru adalah:

$$z^* = z_{min} + \Delta z = 22 + 0 = 22$$

Dari **Contoh 2.5** didapat nilai perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan, perubahan pada variabel basis dilakukan pada x_2 didapat nilai optimum sebesar 33. Untuk perubahan variabel non basis dilakukan pada x_1 didapat nilai optimum sebesar 22.