

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjabarkan beberapa kajian literatur yang digunakan untuk analisis sistem antrean pada penelitian. Beberapa hal yang akan dibahas berkaitan dengan teori antrean, model-model antrean, uji distribusi Kolmogorov-Smirnov, simulasi Monte Carlo, teori parkir, *software* SPSS dan *software* excel yang digunakan untuk membantu perhitungan.

A. Teori Antrean

Pembahasan teori antrean lebih difokuskan pada upaya penguraian waktu tunggu dan panjang antrean yang terjadi dalam sistem antrean. Antrean dapat dilihat dalam berbagai situasi yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, kendaraan yang menunggu untuk parkir atau pasien yang menunggu untuk diperiksa.

1. Pengertian Teori Antrean

Teori antrean adalah cabang dari terapan teori probabilitas yang awalnya digunakan untuk mempelajari kemacetan lalu lintas, Pertama kali diperkenalkan oleh seorang ahli matematika dari Denmark, Agner Kramp Erlang (1878-1929). Proses antrean adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan kemudian menunggu dalam suatu baris atau antrean karena pelayannya sedang sibuk dan akhirnya meninggalkan sistem setelah selesai dilayani. Sedangkan yang dimaksud dengan sistem antrean adalah himpunan pelanggan, pelayan dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pemrosesan masalahnya.

2. Elemen Sistem Antrean

Elemen sistem antrean merupakan komponen yang merupakan bagian atau anggota dari sistem antrean, yaitu :

a. Pelanggan

Pelanggan adalah orang atau barang yang menunggu untuk dilayani. Arti dari pelanggan tidak harus berupa orang, misalnya saja antrean pada loket pembayaran di supermarket.

b. Pelayan

Pelayan adalah orang atau sesuatu yang memberikan pelayanan. Seperti halnya pelanggan, pelayan juga tidak harus berupa orang. Misalnya pada pengambilan uang melalui ATM, mesin ATM dalam hal ini merupakan pelayan.

c. Antrean

Antrean merupakan kumpulan pelanggan yang menunggu untuk dilayani.

3. Karakteristik Sistem Antrean

Ada tiga komponen dalam sistem antrean yaitu tingkat kedatangan populasi yang akan dilayani, antrean dan tingkat pelayanan. Masing-masing komponen dalam sistem antrean tersebut mempunyai karakteristik sendiri-sendiri.

Karakteristik dari masing-masing komponen tersebut adalah (Miftahul:2007) :

a. Tingkat kedatangan populasi yang akan dilayani (*calling population*)

Menurut pengamatan A. K. Erlang di Copenhagen Telephone, pola permintaan *costumer* telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak

terputus (*continuous of time*) dapat dibagi dalam beberapa interval waktu yang sama. Dalam hal ini, permintaan *costumer* terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus disebut proses Poisson (Siswanto, 2007: 218). Berikut ini adalah asumsi kedatangan dengan proses Poisson :

- 1) Kedatangan *costumer* bersifat acak
- 2) Kedatangan *costumer* antar interval waktu tidak saling mempengaruhi

Jika I menandai banyaknya interval waktu maka,

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.1)$$

Dengan I_i adalah interval ke i . Selanjutnya N menandai banyaknya *costumer* yang datang selama I interval di interval I_i ada K_i *costumer*, maka banyaknya *costumer* selama kurun waktu I adalah:

$$N = \sum_{i=1}^n K_i I_i \quad (2.2)$$

dimana, K_i adalah banyaknya *costumer* yang datang pada interval I_i . Jadi, di dalam setiap interval yang sama tersebut *costumer* datang secara acak (*random*). Jika pada setiap interval tersebut dibagi menjadi n sub interval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada setiap interval waktu tetap dapat dinyatakan dengan distribusi Poisson (Siswanto, 2007: 219). Dengan demikian, rata-rata laju kedatangan *costumer* pada setiap interval waktu tersebut dapat diestimasi dengan:

$$\lambda = \frac{N}{I} \quad (2.3)$$

Dengan demikian, jika λ menyatakan rata-rata laju kedatangan *costumer* per interval waktu, maka $\frac{1}{\lambda}$ menyatakan rata-rata waktu antar kedatangan *costumer*.

b. Antrean

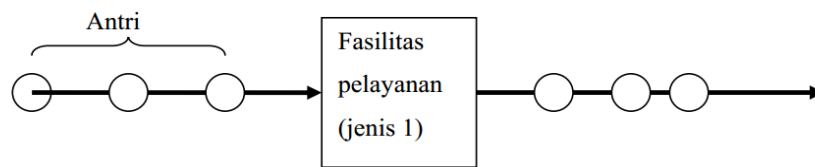
Batasan panjang antrean bisa terbatas (*limited*) bisa juga tidak terbatas (*unlimited*). Sebagai contoh antrean di jalan tol masuk dalam kategori panjang antrean yang tidak terbatas. Sementara antrean di rumah makan, masuk kategori panjang antrean yang terbatas karena keterbatasan tempat. Dalam kasus batasan panjang antrean yang tertentu (*definite line-length*) dapat menyebabkan penundaan kedatangan antrean bila batasan telah tercapai. Contoh : sejumlah tertentu pesawat pada landasan telah melebihi suatu kapasitas bandara, kedatangan pesawat yang baru dialihkan ke bandara yang lain.

c. Tingkat Pelayanan

Karakteristik fasilitas pelayanan dapat dilihat dari tiga hal, yaitu tata letak (*lay out*) secara fisik dari sistem antrean, disiplin antrean, waktu pelayanan. Tata letak fisik dari sistem antrean digambarkan dengan jumlah saluran, juga disebut sebagai jumlah pelayan. Sistem antrean jalur tunggal (*single channel, single server*) berarti bahwa dalam sistem antrean tersebut hanya terdapat satu pemberi layanan serta satu jenis layanan yang diberikan. Sementara sistem antrean jalur tunggal tahapan berganda (*single channel multi server*) berarti dalam sistem antrean tersebut terdapat lebih dari satu jenis layanan yang diberikan, tetapi dalam setiap jenis layanan hanya terdapat satu pemberi layanan. Sistem antrean jalur berganda satu tahap (*multi channel single server*) adalah terdapat satu jenis layanan dalam sistem antrean tersebut , namun terdapat lebih dari satu pemberi

layanan. Sedangkan sistem antrean jalur berganda dengan tahapan berganda (*multi channel, multi server*) adalah sistem antrean dimana terdapat lebih dari satu jenis layanan dan terdapat lebih dari satu pemberi layanan dalam setiap jenis layanan. Berikut adalah desain berbagai metode pelayanan sistem antrean :

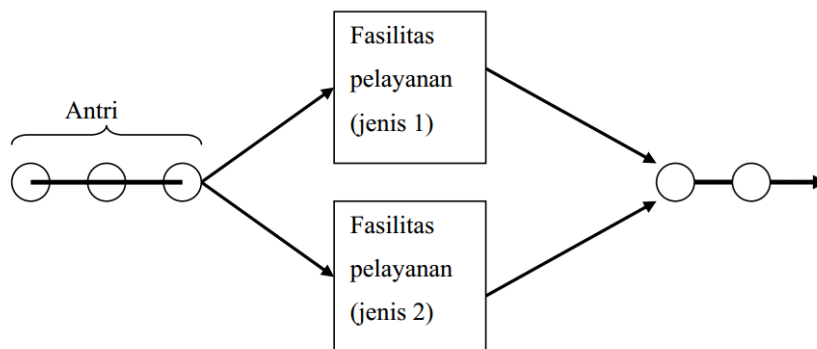
1) *Single Channel, Single Server*



Gambar 2.1 Desain *Single Channel, Single Server*

Single Channel, Single Server merupakan suatu sistem antrean dimana *costumer* hanya dilayani oleh satu penyedia layanan (*server*) dan melalui satu *phase* pelayanan.

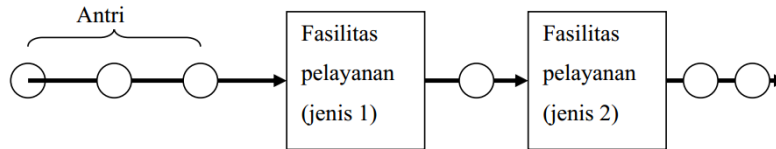
2) *Single channel, Multi Server*



Gambar 2.2 *Single channel, Multi Server*

Single channel, Multi Server merupakan suatu sistem antrean dimana *costumer* hanya dilayani oleh lebih dari satu penyedia layanan (*server*) dan melalui satu *phase* pelayanan.

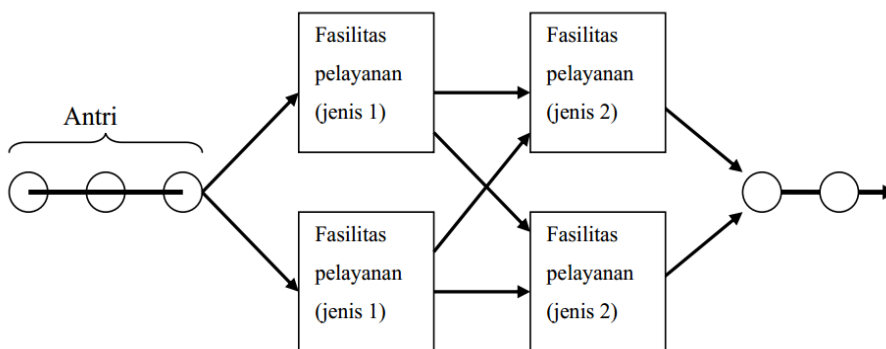
3) Multi Channel, Single Server



Gambar 2.3 Multi Channel, Single Server

Multi Channel, Single Server merupakan suatu sistem antrean dimana *costumer* hanya dilayani oleh satu penyedia layanan (*server*) dan melalui lebih dari satu *phase* pelayanan.

4) Multi Channel, Multi Server



Gambar 2.4 Multi Channel, Multi Server

Multi Channel, Multi Server merupakan suatu sistem antrean dimana *costumer* hanya dilayani oleh lebih dari satu penyedia layanan (*server*) dan melalui lebih dari satu *phase* pelayanan.

Dalam sistem antrean rata-rata waktu pelayanan (*mean server rate*) diberi simbol μ merupakan banyaknya *costumer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu. Lain halnya dengan rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani setiap *costumer* diberi simbol $\frac{1}{\mu}$ satuan (Kakiay, 2004: 11).

Apabila rata-rata waktu antar pelayanan $\frac{1}{\mu}$ dalam satuan waktu per *costumer* mengikuti distribusi Eksponensial, maka rata-rata pelayanan (μ) dalam *costumer* per satuan waktu mengikuti distribusi Poisson (Siswanto, 2007: 221).

B. Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth and Death*)

Kebanyakan model dasar antrean menganggap bahwa kedatangan (*input*) dan keberangkatan (*output*) dari sistem antrean terjadi menurut proses *birth-death* (kelahiran-kematian). Kelahiran adalah kedatangan *calling* unit yang baru dalam sistem antrean, sedangkan kematian adalah keberangkatan unit yang telah dilayani. Proses kelahiran dan kematian terjadi secara acak yang rata-rata terjadinya bergantung pada keadaan yang sedang berlangsung (*current state*) dari sistem (Dimiyati, 2002: 356).

Menurut Workpakrik (1996:297), asumsi-asumsi kelahiran dan kematian sebagai berikut :

- i. Semua kejadian pada suatu interval waktu yang sangat pendek Δt mempunyai probabilitas yang sama apabila sebanyak n *costumer* berada dalam sistem antrean, maka probabilitas sebuah kedatangan terjadi antara t dan $t + \Delta t$ dinyatakan dengan :

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) = 1) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t).$$

- ii. Probabilitas tidak ada kedatangan antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan :

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) = 0) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t).$$

- iii. Probabilitas ada satu kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan :

$$P(Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t).$$

iv. Probabilitas tidak ada kepergian antara t dan Δt , dinyatakan dengan :

$$(Y(t + \Delta t) - Y(t) = 0) = 1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t).$$

v. Probabilitas terjadi lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dapat dinyatakan dengan:

$$P(Y(t + \Delta t) - Y(t) > 1) = o(\Delta t).$$

vi. Proses kedatangan dan pelayanan merupakan kejadian yang saling bebas.

Berdasarkan asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian – kejadian pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sebelumnya atau kejadian pada interval waktu sesudahnya. Kemungkinan-kemungkinan proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian sesuai asumsi – asumsi di atas ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Kejadian-Kejadian terdapat n customer dalam Sistem pada saat $t + \Delta t$

Kasus	Jumlah customer pada waktu t	Jumlah kedatangan pada waktu Δt	Jumlah kepergian pada waktu Δt	Jumlah customer pada waktu $t + \Delta t$
1	n	0	0	n
2	$n + 1$	0	1	n
3	$n - 1$	1	0	n
4	n	1	1	n

Menurut asumsi-asumsi di atas kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing-masing kejadian pada tabel 2.1 tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$1. \text{ Probabilitas kasus 1} = P_n(t) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \quad 1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

2. Probabilitas kasus 2 = $P_{n+1} t \quad 1 - \lambda_{n+1}\Delta t + o \Delta t \quad \mu_{n+1}\Delta t + o \Delta t$
3. Probabilitas kasus 3 = $P_{n-1} t \quad \lambda_{n-1}\Delta t + o \Delta t \quad 1 - \mu_{n-1}\Delta t + o \Delta t$

$$= P_{n-1} t \quad \lambda_{n-1}\Delta t + o \Delta t$$
4. Probabilitas kasus 4 adalah $o\Delta t = P(Y(t + \Delta t) - Y(t) > 1)$

Kasus-kasus yang dinyatakan di atas merupakan kasus yang saling asing, maka probabilitas *steady state* pada proses kelahiran dan kematian dapat dinyatakan sebagai berikut :

Menurut Okoro Otonritse Joshua (2013). Jika dinyatakan bahwa λ adalah laju kedatangan atau kelahiran, μ adalah laju kepergian atau kematian dan n adalah, maka kondisi *steady state* berada pada saat $\frac{\lambda}{\mu} < 1$. Dalam keadaan *steady state* pada saat $n > 0$ berarti laju arus masuk sama dengan laju arus keluar. Kondisi ketika keadaan n dapat berubah menjadi $n - 1$ atau $n + 1$, dengan ekspektasi laju kedatangan ke keadaan n dinyatakan dengan,

$$\lambda_{n-1}P_{n-1} = \mu_{n+1}P_{n+1}$$

dan ekspektasi laju kepergian dari keadaan n dinyatakan dengan.

$$\lambda_n P_n + \mu_n P_n = \lambda_n + \mu_n P_n.$$

Apabila ekspektasi laju kedatangan ke keadaan n = ekspektasi laju kepergian dari n , maka diperoleh

$$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)P_n.$$

Kondisi pada saat $n = 0$ adalah

$$\lambda_{-1}P_{-1} + \mu_1P_1 = \lambda_0P_0 + \mu_0P_0$$

dalam kondisi $n = 0$ maka nilai $\lambda_{-1} = 0$ dan $\mu_0 = 0$. Sehingga diperoleh

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_1} = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0.$$

Kondisi pada saat $n = 1$ diperoleh

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$$

Substitusi $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$, sehingga diperoleh

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \lambda_1 + \mu_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \lambda_0 P_0}{\mu_2}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_0 P_0}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_2} - \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_2}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0.$$

Secara umum diperoleh bentuk :

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0, n = 1, 2, 3, \dots$$

Nilai P_0 ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, sehingga

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \dots}.$$

Kondisi pada saat *steady state* mempunyai solusi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1}$ dengan syarat

bahwa $P_0 \neq 0$.

5. Proses Distribusi Poisson dan Eksponensial

Pada umumnya model antrean diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial atau sama dengan rata-rata kedatangan dan rata-rata pelayanannya mengikuti distribusi Poisson. Distribusi poisson juga merupakan probabilitas diskrit yang dapat meramalkan jumlah kedatangan pada suatu waktu tertentu.(Gross dan Haris, 1998).

Proses jumlah kedatangan dianggap $\{N(t), t \geq 0\}$, dimana $N(t)$ dinotasikan jumlah kedatangan yang terjadi sampai waktu t , dengan $N(0) = 0$, yang mengikuti tiga asumsi sebagai berikut:

- (i) Probabilitas terjadinya satu kedatangan antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah sama dengan $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Dapat ditulis $P\{\text{kedatangan antara } t \text{ dan } t + \Delta t\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, dimana λ adalah suatu konstanta yang independent dari $N(t)$, Δt adalah elemen penambah waktu, dan $o(\Delta t)$ dinotasikan sebagai banyaknya kedatangan yang bisa diabaikan jika dibandingkan dengan Δt , dengan $\Delta t \rightarrow 0$, yaitu:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (2.9)$$

- (ii) $P\{\text{lebih dari satu kedatangan antara } t \text{ dan } t + \Delta t\}$ adalah sangat kecil atau bisa dikatakan diabaikan $= 0 \Delta t$.
- (iii) Jumlah kedatangan pada interval yang berurutan adalah tetap/independen, yang berarti bahwa proses mempunyai penambahan bebas, yaitu jumlah kejadian yang muncul pada setiap interval waktu tidak tergantung pada interval waktunya.

Berikut ini diberikan teorema berdasarkan tiga asumsi tersebut, untuk menyatakan bahwa rata-rata laju kedatangan mengikuti distribusi Poisson (Afsoh Novita Sari:2011) :

Teorema 1 :

Untuk suatu proses Poisson, jumlah costumer yang datang (N) sama dengan jumlah costumer yang ada pada interval waktu t (n) adalah variabel acak yang mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λt dan peluang dari kedatangan adalah $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.

Bukti:

Dihitung $P_n(t)$, untuk $n \geq 1$.

$P_n(t + \Delta t) = \Pr\{n \text{ kedatangan pada } t \text{ dan tidak ada kedatangan pada saat } \Delta t\} + \Pr\{n - 1 \text{ kedatangan pada } t \text{ dan satu kedatangan pada } \Delta t\} + \Pr\{n - 2 \text{ kedatangan pada } t \text{ dan dua kedatangan pada } \Delta t\} + \dots + \Pr\{\text{tidak ada kedatangan pada } t \text{ dan } n \text{ kedatangan pada } \Delta t\}$.

Dengan menggunakan asumsi-asumsi kelahiran dan kematian yang telah dijabarkan di atas maka persamaan $P_n(t + \Delta t)$ menjadi:

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= \\ &P_n(t) [1 - \lambda \Delta t - 0 \Delta t] + P_{n-1}(t) [\lambda \Delta t + 0 \Delta t] + \\ &P_{n-2}(t) 0 \Delta t + \dots + P_0(t) 0 \Delta t . \\ &= P_n(t) [1 - \lambda \Delta t - 0 \Delta t] + P_{n-1}(t) [\lambda \Delta t + 0 \Delta t] + 0 \Delta t . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Berdasarkan (2.10) , untuk $n = 0$, maka diperoleh

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) [1 - \lambda \Delta t - 0 \Delta t] + 0 \Delta t$$

$$= P_0(t) - P_0(t) \lambda \Delta t - P_0(t) 0 \Delta t + 0 \Delta t . \quad (2.11)$$

Berdasarkan (2.11) , maka diperoleh

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\lambda \Delta t P_0(t) - 0 \Delta t P_0(t) + 0(\Delta t). \quad (2.12)$$

Suku $0 \Delta t P_0(t)$ pada (2.12) diabaikan , maka diperoleh

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\lambda \Delta t P_0(t) + 0(\Delta t). \quad (2.13)$$

Menggunakan cara yang sama , untuk $n \geq 1$, maka diperoleh

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = -\lambda \Delta t P_n(t) + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) + 0 \Delta t . \quad (2.14)$$

Untuk $n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\lambda \Delta t P_0(t)}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= -\lambda P_0(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Karena $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0 \Delta t}{\Delta t} = 0$, maka diperoleh (2.15) menjadi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

atau

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) . \quad (2.16)$$

Penyelesaian dari (2.16) adalah

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Untuk $n = 1$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\lambda \Delta t P_1(t)}{\Delta t} + \frac{\lambda \Delta t P_0(t)}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= -\lambda P_1 t + \lambda P_0 t + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0 \Delta t}{\Delta t} . \quad (2.17)$$

Karena $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0 \Delta t}{\Delta t} = 0$, maka diperoleh (2.17) menjadi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1 t + \Delta t - P_1 t}{\Delta t} = -\lambda P_1 t + \lambda P_0 t$$

atau

$$\frac{dP_1 t}{dt} = -\lambda P_1 t + \lambda P_0 t . \quad (2.18)$$

Penyelesaian (2.18) adalah

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1 t + \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1 t}{dt} + \lambda P_1 t = \lambda P_0 t$$

$$\frac{dP_1 t}{dt} + \lambda P_1 t = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dP_1 t}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1 t = \lambda$$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} P_1 t = \lambda$$

Kedua ruas diintegrasikan, diperoleh

$$e^{\lambda t} P_1 t = \lambda dt$$

$$e^{\lambda t} P_1 t = \lambda t$$

$$P_1 t = \lambda t e^{-\lambda t}$$

untuk $n = 2$

$$\frac{dP_2 t}{dt} = -\lambda P_2 t + \lambda P_1 t$$

$$\frac{dP_2 t}{dt} + \lambda P_2 t = \lambda P_1 t$$

$$\frac{dP_2 t}{dt} + \lambda P_2 t = \lambda \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dP_2 t}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2 t = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} P_2 t = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t} P_2 t = \lambda^2 t dt$$

$$e^{\lambda t} P_2 t = \frac{1}{2} \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

$$P_2 t = \frac{1}{2} \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

$$P_2 t = \frac{\lambda t^2}{2 \cdot 1} e^{-\lambda t}$$

$$P_2 t = \frac{\lambda t^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Untuk $n = 3, 4, \dots$ diperoleh:

$$P_3 t = \frac{\lambda t^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

$$P_4 t = \frac{\lambda t^4}{4!} e^{-\lambda t}$$

⋮

Sehingga dapat diambil suatu rumus umum, yaitu

$$P_n t = \frac{\lambda t^n}{n!} e^{-\lambda t}; \quad n \geq 0 . \quad (2.19)$$

Terbukti bahwa probabilitas n kedatangan adalah $\frac{\lambda t^n}{n!} e^{-\lambda t}$ ■

Berikut ini diberikan teorema untuk menyatakan bahwa rata-rata laju pelayanan mengikuti distribusi eksponensial jika kedatangan mengikuti distribusi Poisson :

Teorema 2:

Jika kedatangan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel random waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial.

Bukti:

$f(t)$ = fungsi densitas probabilitas dari interval waktu t antar kejadian yang berturut-turut, $t \geq 0$.

$F(t)$ = fungsi distribusi kumulatif dari t .

Jika suatu kumpulan variabel random waktu antar dua kedatangan berurutan dimisalkan T , maka

$$P(T > t) = P\{\text{tidak ada kedatangan dalam waktu } t\} = P_0 t = e^{-\lambda t}$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = P_0 t = e^{-\lambda t}.$$

Atau menggunakan $F(t)$ sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.20)$$

Maka fungsi densitasnya adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.21)$$

Yang merupakan fungsi densitas dari distribusi eksponensial dengan parameter λ , maka fungsi pembangkit momennya diperoleh rata-rata, yaitu

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{tx} f(t) dt & ; t \text{ kontinu} \\ \sum_{t} e^{tx} f(t) & ; t \text{ diskrit} \end{cases}$$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda - x)t} dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - x)t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda-x} t \, dt = \lambda \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda-x} t}{-\lambda-x} \Big|_0^\infty \\
&= \lambda \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda-x} b}{-\lambda-x} - \frac{e^{-\lambda-x} 0}{-\lambda-x} \\
&= \lambda \left(0 - \frac{1}{-(\lambda-x)} \right) = \lambda \frac{1}{\lambda-x} = \frac{\lambda}{\lambda-x}.
\end{aligned}$$

$$M'_T = \frac{\lambda}{\lambda-x}^2 \text{ dan } M''_T = \frac{2\lambda}{\lambda-x}^3$$

E(T) diperoleh dari:

$$E(T) = M'_T \Big|_0 = \frac{\lambda}{\lambda-0}^2 = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T) = M''_T \Big|_0 = \frac{2\lambda}{\lambda-0}^3 = \frac{2}{\lambda^2}$$

Sehingga

$$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ dan } E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \blacksquare$$

Jadi, waktu antar kedatangan yang berurutan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Jika waktu antar kedatangan $\frac{1}{\lambda}$ maka jumlah kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah distribusi Poisson dengan rata-rata kedatangan adalah λ .

6. Uji Distribusi

Data yang diperoleh dari penelitian harus dilakukan uji distribusi. Pengujian distribusi data dilakukan untuk mengetahui jenis distribusi data yang diperoleh. Salah satu uji yang dapat digunakan untuk menguji kecocokan antara distribusi frekuensi data dengan hasil model-model yang dikembangkan adalah Uji Kolmogorov-Smirnov. (Alfigari:1997)

Uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk menguji apakah distribusi data sampel yang teramati sesuai dengan distribusi teoretis tertentu atau tidak. Uji Kolmogorov-Smirnov beranggapan bahwa distribusi data yang diuji bersifat kontinu dan sampel diambil dari populasi secara acak. Prinsip uji Kolmogorov-Smirnov adalah menghitung selisih absolut antara fungsi distribusi frekuensi kumulatif sampel $[F_s(x)]$ dan fungsi distribusi kumulatif teoretis $[F_t(x)]$ pada masing-masing interval kelas.

Hipotesis uji, secara umum ditulis:

$$H_0 : F(x) = F_1(x) , \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

$$H_1 : F(x) \neq F_1(x) , \text{ untuk paling sedikit terdapat sebuah nilai } x$$

Dimana: $F(x)$ adalah distribusi frekuensi kumulatif populasi pengamatan.

Statistik uji Kolmogorov-Smirnov merupakan selisih absolute terbesar antara $F_s(x)$ dengan $F_t(x)$ yang disebut D (deviasi maximum)

$$D = \max F_s(x_i) - F_t(x_i) , \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n.$$

Selanjutnya, nilai statistik D dibandingkan frngan nilai kritis pada tabel kuantil statistik kolmogrof-Smirnov (D -tabel) , pada ukuran sampel n dan tingkat signifikan α . H_0 diterima, jika nilai $D \leq D - \text{tabel}$ yang berarti distribusi data sampel yang teramati memiliki distribusi yang sama dengan distribusi teoritis yang dimaksud. Sebaliknya, H_0 ditolak, jika $D > D - \text{tabel}$ yang berarti distribusi sampel tidak sesuai dengan distribusi teoritis. Distribusi teoritis yang dimaksud dalam uji normalitas adalah distribusi normal.

Secara ringkas, langkah-langkah menghitung statistik uji (D) pada uji normalitas kolmogorov-sminov adalah :

- a. Susun frekuensi-frekuensi dari setiap data (f_i), beurutkan dari data terkecil sampai data terbesar (x_i).
- b. Susun frekuensi kumulatif dari data-data tersebut $FK \ x_i$.
- c. Konversikan frekuensi kumulatif ke dalam nilai peluang, yaitu fungsi distribusi frekuensi kumulatif ($F_s \ x_i$).
- d. Hitung nilai z_i untuk masing-masing dari data menggunakan rumus :

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}.$$

- e. Carilah nilai peluang dari z_i kumulatif (Luas daerah dari $-\infty$ sampai nilai z_i) dari tabel distribusi normal standar hasilnya $F_t(x_i)$.
- f. Susun $F_s (x_i)$ berdampingan dengan $F_t(x_i)$ pada masing-masing nilai teramati.
- g. Temukan nilai maksimal dari selisih absolut antara $F_s(x_i)$ dengan $F_t(x_i)$ tersebut, inilah yang disebut statistik uji = $\max F_s \ x_i - F_t(x_i)$, dimana $i=1,2,...,n$.

7. Notasi Kendall

Notasi baku untuk memodelkan suatu sistem antrean pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall dalam bentuk $a/b/c$, dan dikenal sebagai notasi kendall. Namun, A.M. Lee menambahkan simbol d dan e sehingga menjadi $a/b/c/d/e$ yang disebut notasi kendall-Lee (Taha, 1996:627).

Menurut Taha (1997:186), notasi Kendall-lee tersebut perlu ditambah dengan simbol f . Sehingga karakteristik suatu antrean dapat dinotasikan dalam format baku $(a/b/c):(d/e/f)$. Notasi dari a sampai f tersebut berturut – turut menyatakan

distribusi waktu antar kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah server pelayanan, disiplin pelayanan, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan. Notasi a sampai f dapat digantikan dengan simbol – simbol sebagai berikut.

Tabel 2.2 Simbol Pengganti Notasi Kendall-Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov menyatakan banyaknya kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson (Waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial)
	D	Deterministik menyatakan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan konstan
	E_k	Waktu antar kedatangan atau pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	Distribusi Independen umum dari kedatangan (atau waktu antar pelayanan)
	G	Distribusi untuk keberangkatan (atau waktu pelayanan)
d	FCFS/FIFO	<i>First Come First Served/First In First Out</i>
	LCFS/LIFO	<i>Last Come First Served/Last In First Out</i>
	SIRO	<i>Service In Random Order</i>
	PS	<i>Priority Service</i>
c	1,2,3, ... ∞	Jumlah server
e	1,2,3, ... ∞	Kapasitas sistem
f	1,2,3, ... ∞	Ukuran sumber pemanggilan

8. Ukuran *Steady State* Kinerja Antrean

Kondisi transien berlaku ketika perilaku sistem terus bergantung pada waktu, seperti halnya proses kelahiran murni dan kematian murni. Sedangkan antrean dengan gabungan kedatangan dan keberangkatan dimulai berdasarkan

kondisi transien dan secara bertahap mencapai kondisi *steady state* setelah cukup banyak waktu berlalu, asalkan parameter dari sistem tersebut memungkinkan dicapainya *steady state* (laju kedatangan $\lambda >$ laju pelayanan μ tidak akan mencapai *steady state* tanpa bergantung pada waktu yang telah lalu, karena ukuran antrean akan meningkat dengan waktu).

Menurut Dimiyati & Dimiyati (2002:361-362), jika sistem antrean mencapai kondisi *steady state* maka probabilitas $P_n(t)$ menjadi konstan dan independen terhadap waktu. Solusi *steady state* untuk P_n bisa didapatkan dengan 2 pendekatan, antara lain:

- 1) Dengan menyelesaikan $P_n(t)$ dalam kasus transien dengan $t \rightarrow \infty$.
- 2) Dengan menetapkan

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0.$$

Solusi transien tidak dapat digunakan untuk proses kelahiran dan kematian, maka digunakan pendekatan yang kedua. Dengan mengasumsikan bahwa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n.$$

Sehingga ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0.$$

Ukuran – ukuran *steady state* kinerja antrean yang terpenting dalam suatu sistem antrean menurut Hamdi .A (1997) adalah :

L_s : jumlah *costumer* yang diperkirakan dalam sistem atau rata-rata jumlah *costumer* yang berada dalam sistem.

L_q : jumlah *costumer* yang diperkirakan dalam antrean atau rata-rata jumlah *costumer* yang berada pada antrean.

W_s : waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem atau rata-rata waktu menunggu dalam sistem.

W_q : waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrean atau rata-rata waktu menunggu dalam antrean.

Dalam menentukan ukuran keefektifan suatu sistem antrean maka sesuai dengan model-model antrean pada sistem tersebut.

9. Model Antrean

a. Model (M/M/1):(GD/∞/∞)

Sistem antrean (M/M/1):(GD/∞/∞) merupakan model antrean satu sever dengan kedatangan berdistribusi Poisson atau markovian (M) dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial (M). Model ini merupakan model dengan kapasitas yang tidak terbatas, baik dari kapasitas sistem maupun kapasitas sumber pemanggilan. Aturan pelayanannya bersifat FCFS, yaitu *costumer* yang datang pertama dilayani terlebih dahulu begitu seterusnya. (Gustanti:2006)

Sistem antrean (M/M/1):(GD/∞/∞) dimodelkan sebagai proses kelahiran dan kematian dengan parameter berikut :

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0,1,2, \dots$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_n = \mu \quad n = 1,2,3, \dots$$

Probabilitas untuk n customer dan banyak pelayanan (server) c dapat dinyatakan sebagai berikut :

P_n untuk $n < c$

$$P_n = \rho \cdot P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu \ 2\mu \ 3\mu \ \dots \ n\mu} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0$$

P_n untuk $n \geq c$

$$P_n = \rho \cdot P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu \ 2\mu \ \dots \ c-1 \ \mu \ c\mu \ (c\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{c! \ c^{n-1} \mu^n} P_0. \quad (2.22)$$

Karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ maka nilai P_0 ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. Persamaan (2.22) dapat

dinyatakan dengan

$$P_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right] = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right]^{-1}. \quad (2.23)$$

Jika dimisalkan $j = n - c$ maka persamaan (2.23) diperoleh

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{c^j} \right]^{-1}. \quad (2.24)$$

Karena $\sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c^n}$ adalah deret geometri tak hingga yaitu $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{c^j} = \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}$, maka

persamaan (2.24) menjadi

$$P_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}, \text{ dengan } \frac{\rho}{c} < 1.$$

Selanjutnya dicari ukuran kinerjanya yaitu L_s, L_q, W_s dan W_q . Oleh karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

dan diketahui bahwa $\frac{\rho}{c} < 1$ maka $\frac{\lambda}{c\mu} < 1$, artinya bahwa sistem antrean dalam

keadaan *steady state*. Maka,

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} n - c P_n.$$

Jika $n - c = k$, maka diperoleh,

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} k P_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k+c}}{\mu^{k+c} c^k c!} P_0 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c^k c!} P_0 = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

dan untuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}} = \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}^2.$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} L_q &= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}^2 \\ &= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{c^2}{(c-\rho)^2} \\ &= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{c^2}{(c-\rho)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_0 \frac{\rho^c}{c-1!} \rho \frac{1}{c-p^2} \\
&= P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1!} \frac{1}{c-p^2} .
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh ,

$$L_q = P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1!} \frac{1}{c-p^2} \quad (2.25)$$

$$= L_q + \rho \quad (2.26)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (2.27)$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\lambda} . \quad (2.28)$$

b. Model (M/M/c):(GD/∞/∞)

Jika kendaraan yang datang dengan laju konstan dinyatakan dengan λ , laju pelayanan per pelayan adalah μ banyaknya pelayan dinyatakan dengan c . Maka pengaruh penggunaan c pelayan yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukanya beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika jumlah pelanggan dalam sistem adalah n dan $n \geq c$, maka laju keberangkatan gabungan dari sarana tersebut sama dengan μ . Sedangkan jika $n < c$, maka laju pelayanan adalah $n\mu$. Jadi dalam bentuk model yang digeneralisasikan, diperoleh: (Taha, 1997)

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases} \text{Type equation here.}$$

P_n untuk $n < c$, dengan menganggap $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Selanjutnya, mengekspresikan P_n ke

dalam persamaan $P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1} P_0$ yang telah digeneralisasi menjadi:

$$\begin{aligned} P_n &= \rho \cdot P_0 \\ &= \frac{\lambda^n}{\mu \ 2\mu \ 3\mu \ \dots \ n\mu} P_0 \\ &= \frac{\lambda^n}{n\mu!} P_0. \end{aligned}$$

P_n untuk $n \geq c$

$$\begin{aligned} P_n &= \rho \cdot P_0 \\ &= \frac{\lambda^n}{\mu \ 2\mu \ \dots \ c-1 \ \mu \ c\mu \ c\mu} P_0 \\ &= \frac{\lambda^n}{c! \ c^{n-1} \mu^n} P_0 \end{aligned}$$

karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ maka nilai P_0 ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ yang memberikan

$$P_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right) = 1$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right)^{-1}$$

jika dimisalkan $j = n - c$ maka diperoleh ,

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{c^j} \right)^{-1} \text{ karena } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{c^j} = \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}} \text{ merupakan deret tak}$$

hingga , maka

$$P_0 = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}}$$

dengan $\frac{\rho}{c} < 1$.

Selanjutnya mencari ukuran kinerjanya yaitu L_q , L_s , W_q , W_s .

Jika diketahui $\frac{\rho}{c} < 1$

$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) P_n$ dengan $k = n - c$, maka diperoleh

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} k P_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c^k c!} P_0 = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k = \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{c}\right)} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}^2}$$

maka,

$$\begin{aligned} L_q &= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}^2} \\ &= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{c^2}{c - \rho^2} \\ &= P_0 \frac{\rho^c}{c} \frac{\rho}{c-1} \frac{1}{c!} \frac{c^2}{c - \rho^2} \\ &= P_0 \frac{\rho^c}{c-1} \frac{\rho}{c!} \frac{1}{c - \rho^2} \\ &= P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1} \frac{1}{c!} \frac{1}{c - \rho^2} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh ,

$$L_q = P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1!} \frac{1}{c-\rho^2} . \quad (2.29)$$

Selanjutnya L_s diperoleh dari substitusi L_q ke persamaan $L_s = L_q + \rho$, maka diperoleh

$$L_s = L_q + \rho \quad (2.30)$$

$$= P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1!} \frac{1}{c-\rho^2} + \rho . \quad (2.31)$$

Nilai W_q diperoleh dari substitusi W_q ke persamaan $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda} \\ &= \frac{P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1!} \frac{1}{c-\rho^2}}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda \rho^c}{\mu^{c-1}! (c-p)^2} P_0 \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{\rho^c}{\mu^{c-1}! (c-p)^2} P_0 . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nilai W_s diperoleh dari substitusi persamaan (2.32) ke persamaan $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$, maka diperoleh

$$W_q = \frac{\rho^c}{\mu^{c-1}! (c-p)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} . \quad (2.33)$$

c. Model (M/M/c):(GD/N/∞)

Situasi antrean ini berbeda dalam hal kapasitas sistem yang dibatasi oleh N (ukuran antrean maksimum). Pada hal umum dengan P_N dan mencatat

bahwa $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, kita peroleh (Hamdy. A, 2003) :

$$P_N = \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} P_0, c \leq n \leq N \quad (2.34)$$

1) Peluang kendaraan tidak mendapat pelayanan

$$P_0 = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c - 1 - (\frac{\rho}{c})^{N-c+1}}{c! (1 - \frac{\rho}{c})}, \frac{\rho}{c} \neq 1 \quad (2.35)$$

$$P_N = \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} P_0$$

2) Rata-rata banyaknya kendaraan dalam antrean

$$L_q = P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c-1! c - \rho^2} \left(1 - \frac{\rho}{c} \right)^{N-c} - N - c \frac{\rho}{c} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{N-c} - 1 - \frac{\rho}{c} \quad (2.36)$$

3) Rata-rata banyaknya kendaraan dalam sistem antrean

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.37)$$

dimana

$$\lambda_{eff} = \lambda (1 - P_N)$$

4) Rata-rata waktu yang dibutuhkan kendaraan dalam sistem antrean

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \quad (2.38)$$

5) Rata-rata waktu yang dibutuhkan kendaraan dalam antrean

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} \quad (2.39)$$

10. Simulasi Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo merupakan suatu pendekatan yang membentuk kembali distribusi peluang berdasarkan pada pilihan atau pengadaan bilangan acak. Penerapan simulasi Monte Carlo pada sistem antrean karena beberapa asumsi yang diperlukan sulit terpenuhi. Misalnya, keadaan sistem antrean yang belum *steady state* atau laju kedatangan dan pelayanan yang tidak berdistribusi Poisson. Teknik simulasi Monte Carlo merupakan suatu teknik untuk memilih angka-angka secara acak dari distribusi probabilitas yang digunakan dalam suatu percobaan (komputer) (Taylor, 2008: 242).

Prinsip dasar yang umum digunakan dalam Monte Carlo disebut sebagai komponen pembentuk metode Monte Carlo. Komponen ini merupakan komponen pondasi bagi kebanyakan aplikasi metode Monte Carlo. Pemahaman komponen pembentuk metode Monte Carlo ini akan mempermudah dalam pengaplikasian dari Metode Monte Carlo menurut Darkos (1994), komponen pembentuk metode Monte Carlo secara umum adalah :

a. Fungsi distribusi peluang

Merupakan suatu fungsi matematis yang merepresentasikan pola fenomena yang diamati dan dideskripsikan dengan suatu fungsi distribusi peluang .

b. Penghasil angka acak

Merupakan suatu sumber yang *men-generates* angka secara acak yang terdistribusi uniform pada suatu rentang dengan pola yang tertentu yang acak.

c. Aturan sampling

Ketentuan dari sampling data dari hasil penerapan fungsi distribusi peluang dengan suatu asumsi awal yang dibuat sebelumnya sehingga hasil angka acak yang akan disampling sesuai dengan fenomena yang dimodelkan.

d. Penilaian

Outcome harus diakumulasikan secara keseluruhan sebagai gambaran kuantifikasi dari suatu fenomena.

e. Teknik reduksi variansi

Metode pereduksian variansi pada hasil estimasi yang bertujuan untuk mengurangi waktu perhitungan dalam penerapan metode Monte Carlo.

Adapun langkah-langkah simulasi Monte Carlo dengan bantuan software MS. Excel adalah sebagai berikut:

Langkah Simulasi Monte Carlo sebagai berikut :

1. Simulasi Monte Carlo dimulai dari tahap pendekatan numerik untuk menemukan solusi suatu persamaan dengan menghitung suatu nilai yang diharapkan atau diperkirakan . Dalam kasus ini nilai yang diperkirakan merupakan nilai kedatangan kendaraan dengan variabel acak yang seragam yang didefinisikan berada pada rentang 0,1 .
2. Distribusi kemungkinan biasa tersebut dikonveriskan ke dalam distribusi kumulatif dengan menjumlahkan tiap angka kemungkinan dengan jumlah sebelumnya. Setelah ditentukan probabilitaskumulatif untuk tiap variabel yang termasuk dalam simulasi.

3. Menentukan batas angka yang mewakili tiap kemungkinan hasil. Hal tersebut ditunjukkan pada interval angka random. Penentuan interval didasarkan oleh kemungkinan kumulatif.
4. Dilakukan random pada peluang distribusi untuk mensimulasikan kedatangan kendaraan yang kemudian disesuaikan dengan interval yang telah dibuat. Dari interval tersebut dapat diperoleh waktu antar kedatangan kendaraan, dilanjutkan dengan menambahkan waktu antar kedatangan tersebut dengan jam kedatangan maka dapat diperoleh jam kedatangan kendaraan berikutnya. Selain mencari peluang distribusi kedatangan dicari pula distribusi pelayanan secara acak. Sehingga diperoleh pula variabel acak seragam dan distribusi kumulatifnya. Selanjutnya menjumlahkan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan diperoleh jam meninggalkan pelayanan dari hasil tersebut diperoleh jam masuknya dengan menggunakan nilai maksimalnya. Kemudian diperoleh waktu menunggu dalam antrian yaitu waktu antar kedatangan dikurangi oleh jam memasuki pelayanan. Kemudian terjadi antrian apabila jam memasuki pelayanan kurang dari jam meninggalkan pelayanan. Sehingga waktu dalam sistem dapat diperoleh dari jam memasuki pelayanan dikurang dengan jam meninggalkan pelayanan.
5. Menghitung rata-rata dari waktu menunggu dan rata-rata panjang antrian. Rata-rata menunggu antrian dan panjang antrian dilakukan dengan beberapa kali pengulangan.

11. Software SPSS

SPSS adalah sebuah program komputer yang digunakan untuk membuat analisis statistika. SPSS dipublikasikan oleh SPSS Inc. SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences* atau Paket Statistik untuk Ilmu Sosial) versi pertama dirilis pada tahun 1968, diciptakan oleh Norman Nie, seorang lulusan Fakultas Ilmu Politik dari Stanford University, yang sekarang menjadi Profesor Peneliti Fakultas Ilmu Politik di Stanford dan Profesor Emeritus Ilmu Politik di University of Chicago.

Dalam penelitian ini fitur yang digunakan adalah Statistik Bivariat berupa *nonparametric test* pada uji kolmogrov sminov untuk menguji distribusi data kedatangan dan pelayanan .

Berikut merupakan langkah-langkah uji Kolmogorov-Smirnov dengan menggunakan software SPSS:

1. Input data ke *spreadsheets* Data View SPSS dilanjutkan dengan input parameter deskripsi ke *spreadsheets* Data Variable SPSS.
2. Klik Analyze → Nonparametric Test → 1-Sample K-S.
3. Muncul kotak One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test. Data yang akan diuji terletak di kiri dan dipindahkan ke kanan dengan tanda panah. Selanjutnya, pada Test Distribution pilih Poisson dan klik OK.
4. Akan muncul hasil distribusi berupa tabel .

Keunggulan Kolmogrov Sminov menurut Gibbons:1997 yaitu :

1. Tidak memerlukan data yang terkelompokkan.
2. Dapat digunakan untuk sample kecil.
3. Bekerja secara fleksibel karena dapat mengestimasi variasi standar deviasi .

C. Parkir

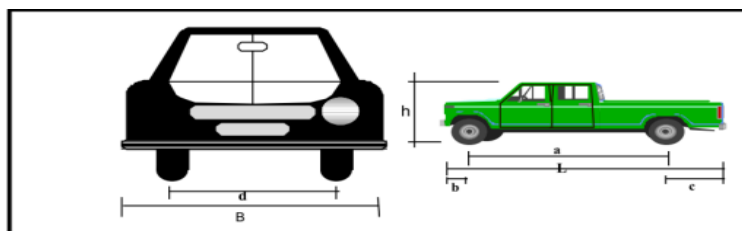
Dalam pembahasan ini ada beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam menentukan kebutuhan parkir berdasarkan standar yang telah ditetapkan oleh Direktur Jenderal Perhubungan Darat.

1. Pengertian Parkir

Menurut Keputusan Direktur Jenderal Perhubungan Darat Nomor 272 tahun 1996 Tentang Pedoman Teknis Penyelenggaraan Fasilitas Parkir, definisi parkir adalah keadaan tidak bergerak suatu kendaraan yang tidak bersifat sementara. Definisi parkir lainnya yaitu tempat untuk menempatkan dengan menghentikan kendaraan angkutan/barang (bermotor atau tidak bermotor) pada suatu tempat pada jangka waktu tertentu (Taju, 1996 dalam Rinaldi Mirsa). Fasilitas parkir adalah lokasi yang ditentukan sebagai tempat pemberhentian yang bersifat tidak sementara untuk melakukan kegiatan pada suatu kurun waktu. Tujuan fasilitas parkir adalah memberikan tempat istirahat kendaraan (Abukabar,dkk:1996). Adapun jenis fasilitas parkir menurut penempatannya meliputi parkir dibadan jalan (*On Street Parking*) dan parkir di luar badan jalan (*Off Street Parking*).

2. Penentuan Satuan Ruang Parkir (SRP)

a. Dimensi kendaraan standar untuk mobil penumpang



Gambar 2.3. Dimensi kendaraan untuk mobil

Keterangan :

a = jarak gandar

b = depan tergantung

c = belakang tergantung

d = lebar

h = tinggi total

B = lebar total

L=panjangtotal

b. Ruang Bebas Kendaraan Parkir

Ruang bebas ini diberikan agar tidak terjadi benturan antara pintu kendaraan dan kendaraan yang parkir di sampingnya pada saat penumpang turun dari kendaraan. Ruang bebas arah memanjang diberikan di depan kendaraan untuk menghindari benturan dengan dinding atau kendaraan yang lewat jalur gang (aisle). Jarak bebas arah lateral diambil sebesar 5 cm dan jarak bebas arah longitudinal sebesar 30 cm.

c. Lebar Buka-an Pintu Kendaraan

Ukuran lebar bukaan pintu merupakan fungsi karakteristik pemakai kendaraan yang memanfaatkan fasilitas parkir.

d. Standar Fasilitas Parkir

Berdasarkan Keputusan Direktrat Jenderal Perhubungan Darat standar penyediaan fasilitas parkir sebagai berikut :

(Abubakar,dkk:1996).

Tabel 2.3 Standar fasilitas parkir

Jenis Kendaraan	Satuan Ruang Parkir (m^2)
Mobil Penumpang	
i. Golongan I	2,30 x 5,00
ii. Golongan II	2,50 x 5,00
iii. Golongan III	3,00 x 5,00
Bus/Truk	3,40 x 12,50
Sepeda Motor .	0,75 x 2,00