BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Berikut diberikan landasan teori yang digunakan untuk membahas mengenai penyusunan portofolio saham yang optimal menggunakan model *Fuzzy Mean Absolute Deviation (FMAD)* dan penyelesaian model *FMAD* menggunakan algoritma genetika :

A. Investasi

Investasi dapat diartikan sebagai kegiatan menanamkan modal baik langsung maupun tidak langsung, dengan harapan pada waktunya nanti pemilik modal mendapatkan sejumlah keuntungan dari hasil penanaman modal tersebut (Hamid, 1995).

Proses keputusan investasi merupakan proses keputusan yang berkesinambungan. Proses keputusan investasi terdiri dari lima tahap keputusan yang berjalan terus-menerus sampai tercapai keputusan investasi yang terbaik. Tahap-tahap keputusan investasi meliputi lima tahap keputusan, diantaranya (Tandelilin, 2001) :

1. Penentuan tujuan investasi

Tahap pertama dalam proses keputusan investasi adalah menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investor dapat berbeda – beda. Beberapa alasan investasi antara lain : mendapatkan kehidupan yang lebih layak dimasa depan, mengurangi inflasi, dan menghemat pajak.

2. Penentuan kebijakan investasi

Tahap kedua ini merupakan tahap penentuan kebijakan untuk memenuhi tujuan investasi yang ditetapkan dimulai dengan menentukan alokasi saham, kemudian investor harus mempertimbangkan seberapa besarnya dana yang dimiliki dan pendistribusian dana tersebut.

3. Pemilihan strategi portofolio

Strategi portofolio yang dipilih harus konsisten dengan dua tahap sebelumnya. Ada dua strategi portofolio yaitu: strategi portofolio aktif meliputi penggunaan informasi yang tersedia serta teknik peramalan secara aktif untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik, dan strategi portofolio pasif meliputi aktivitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja indeks pasar.

4. Pemilihan saham

Tahap selanjutnya adalah pemilihan saham-saham yang akan dimasukkan dalam portofolio. Diperlukan evaluasi sekuritas terhadap saham-saham yang akan dimasukkan dalam portofolio, yang bertujuan untuk mendapatkan kombinasi portofolio yang efisien, yaitu portofolio yang menawarkan *return* tertinggi dengan tingkat risiko tertentu atau sebaliknya portofolio dengan *return* tertentu dengan tingkat risiko terendah

5. Pengukuran dan evaluasi kinerja portofolio

Proses keputusan investasi merupakan proses yang berkesinambungan secara terus-menerus, jika tahap pengukuran dan evaluasi kinerja telah dilewati dan ternyata hasilnya kurang baik, maka proses keputusan investasi harus dimulai dari tahap pertama, demikian seterusnya sampai didapat keputusan yang optimal.

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam keputusan investasi yaitu :

1. *Return*

Dalam hal manajemen investasi, *return* dapat diartikan sebagai tingkat keuntungan investasi. *Return* adalah salah satu faktor yang memotivasi investor untuk berinvestasi dan juga merupakan imbalan atas keberanian investor menanggung risiko investasi yang dilakukannya (Tandelilin, 2001). Investor mengharapkan mendapat *return* yang besar, tanpa melupakan faktor risiko yang harus dihadapi. *Return* yang sudah terjadi disebut dengan *realized return*, sedangkan *return* yang diharapkan disebut dengan *expected return.*

a. *Realized return*

Realized return dihitung berdasarkan data historis (Jogiyanto, 2010). *Realized return* dirumuskan sebagai berikut:

$$r_{i(t)} = \frac{P_{i(t)} - P_{i(t-1)}}{P_{i(t-1)}} \tag{2.1}$$

Dengan

$r_{i(t)}$: *realized return* saham ke-i pada periode ke-(t)

$P_{i(t)}$: harga saham ke-i pada periode ke-(t)

$P_{i(t-1)}$: harga saham ke-i pada periode ke-(t-1)

Contoh 2.1

Misal diberikan data harga saham ke-1 pada suatu portofolio

Periode	Harga	*Realized return*
0	26000	
1	26800	0.030769231
2	26500	-0.01119403
3	26750	0.009433962

Realized return saham ke-1 pada periode ke-(1) adalah sebagai berikut:

$$r_{1(1)} = \frac{P_{1(1)} - P_{1(1-1)}}{P_{1(1-1)}} = \frac{26.800 - 26.000}{26.000} = 0{,}030769231$$

b. *Expected return*

Expected return dihitung berdasarkan rata-rata (*mean*) dari *realized return* masing-masing saham. Nilai *expected return* dapat diperoleh menggunakan perhitungan *mean* dari *return* baik secara aritmatik maupun geometri.

***1) Mean* Aritmatik**

Mean aritmatik seringkali disebut dengan istilah "rata- rata" dalam praktiknya. *Mean* aritmatik dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ (untuk suatu sampel)} \quad (2.2)$$

$$\varphi_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \text{ (untuk suatu populasi)} \quad (2.3)$$

Dengan

$\bar{x}$: *mean* aritmatika dari suatu sampel

φ_x : *mean* aritmatika dari suatu populasi

x_i : nilai dari data ke – i

n : banyaknya data x dalam suatu sampel

N : banyaknya data x dalam suatu populasi

Sedangkan untuk *mean* data berkelompok dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \tag{2.4}$$

Dengan

$\bar{x}$: *mean* aritmatik data berkelompok

f_i : frekuensi kelas ke-i

x_i : nilai tengah dari data ke – i

2) Mean* Geometri *(Time Weighted Rate Of Return)

Menurut (Tandelilin, 2001) *Mean* geometri cocok dipakai untuk menghitung perubahan *return* pada periode serial dan kumulatif (misalnya 5 atau 10 tahun berturut – turut). Rumus untuk menghitung *mean* geometri pada data *realized return* adalah sebagai berikut:

$$G = \left(\prod_{t=1}^{T}\left(1 + r_{i(t)}\right)\right)^{\frac{1}{T}} - 1 \tag{2.5}$$

Dimana

$r_{i(t)}$: *Realized return* saham ke-i periode ke-(t)

T : banyaknya data pengamatan

G : *mean* geometri

dengan $\left(1 + r_{i(t)}\right)$ adalah *return* relatif saham ke-i pada periode ke-(t). *Return* relatif diperoleh dari penjumlahan 1 terhadap *realized return*. Penambahan nilai 1 tersebut berguna untuk menghilangkan nilai negatf pada perhitungan mean geometri.

Jika nilai *return* yang akan dihitung *mean* geometrinya ada yang bernilai negatif, maka fungsi *mean* geometri tidak dapat digunakan. Oleh karena itu, jika ada nilai *return* yang negatif, maka sebaiknya nilai *return* ini diubah dulu menjadi nilai *return* relatif, yaitu nilai *return* ditambah dengan nilai 1 (Hartono, 2014).

Mean aritmatik lebih baik digunakan pada data yang tidak kumulatif, sedangkan *mean* geometri baik digunakan untuk menghitung perubahan *return* pada data kumulatif. Karena *return* selama suatu periode mengalami persentase perubahan yang sangat fluktuatif maka nilai *expected return* saham dapat diperoleh menggunakan *mean* geometri. Hasil perhitungan *return* menggunakan *mean* geometri menghasilkan nilai yang lebih kecil dibandingkan dengan *mean* aritmatik (Tandelilin, 2001).

Contoh 2.2

Expected return dari data harga saham pada contoh 2.1 adalah sebagai berikut:

$$\bar{r_i} = \left(\prod_{t=1}^{T}\left(1 + r_{i(t)}\right)\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

$$= ((1 + 0.030769231)\left(1 + (-0.01119403)\right)(1 + 0.009433962))^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= 1.028846^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.009524$$

3) *Return* portofolio

Return portofolio merupakan jumlahan dari perkalian bobot investasi dengan *expected return* masing-masing saham didalam portofolio tersebut. *Return* portofolio dirumuskan sebagai berikut (Jogiyanto, 2010)

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} (x_i \bar{r}_i) \tag{2.6}$$

Dengan

R_p : *return* portofolio

x_i : bobot investasi saham ke-i

$\bar{r}_i$: *expected return* saham ke-i

2. Risiko

Risiko adalah kemungkinan penyimpangan *realized return* dengan *expected return*. Semakin besar tingkat perbedaan antara *realized return* dengan *expected return* maka semakin besar pula tingkat risikonya (Wardani, 2010).

Saham yang memiliki kenaikan signifikan atau harganya naik sangat tinggi dari harga rata-ratanya, mempunyai nilai risiko yang besar. Karena jika harga suatu saham naik sangat tinggi pasti dipengaruhi oleh suatu faktor pada saat itu yang dapat membuat harga saham tersebut naik. Jika faktor itu hilang maka ada kemungkinan harga saham tersebut turun drastis. Saham yang memiliki risiko rendah adalah saham yang memiliki harga cenderung berada pada garis rata-ratanya atau stabil.

Konno dan Yamazaki (1991) mengembangkan metode *Mean Absolute Deviation* untuk menghitung risiko suatu saham. Persamaan yang digunakan seperti berikut (Konno & Yamazaki, 1991):

$$a_{i(t)} = |r_{i(t)} - \bar{r}_i| \tag{2.7}$$

Dengan

$a_{i(t)}$: risiko pada periode ke- t

$r_{i(t)}$: *realized return* pada pada periode ke- t

$\bar{r}_i$: *expected return* saham ke-i

Contoh 2.3

Risiko pada periode ke-1 dari contoh 2.1 adalah sebagai berikut:

$a_{1(1)} = \left|r_{1(1)} - \bar{r}_1\right| =$ |0.030769231-0.009524|=0.021245

B. Model Portofolio

Teori portofolio membahas proses seleksi berbagai portofolio yang optimum, pada penelitian ini yaitu portofolio yang meminimumkan risiko pada suatu tingkat hasil pengembalian *(return)* tertentu. Metode pertama yang digunakan dalam penyusunan portofolio saham adalah model *Mean Variance (MV)* yang diperkenalkan oleh Markowitz pada tahun 1952.

1. Model Portofolio *Mean Variance (MV)*

Model *MV* mempertimbangkan keuntungan rata-rata dan risiko berdasarkan adanya hubungan antara saham-saham (*variance*) yang membentuk portofolio (Markowitz, 1987). Model *MV* dapat dituliskan sebagai berikut :

Meminimalkan

$$Var(R_p) = \mathbb{X}'\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbb{X}$$

Dengan kendala, (2.8)

$$E(R_p) = \mathbb{X}'\mathbb{r} \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$x_i \geq 0$, dengan i= 1, 2, . . . , n

Dimana

$Var(R_p)$: risiko portofolio saham model *MV*

$\mathbb{X}$: matriks alokasi bobot investasi saham

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks *variance covariance realized return*

R : *return* minimal yang diinginkan investor

x_i : bobot investasi saham ke-i

$E(R_p)$: *expected return* portofolio model *MV*

$\mathbb{r}$: Matriks e*xpected return* saham model *MV*

2. Model Portofolio *Mean Absolute Deviation (MAD)*

Optimasi portofolio *Mean Absolute Deviation* (*MAD)* pertama kali diperkenalkan oleh Konno & Yamazaki (1991) sebagai alternatif dari model *MV*. Dalam penerapannya Metode *Mean absolute Deviation* menggunakan analisis data historis untuk membentuk portofolio dengan rentang periode tertentu (Anafauziah, 2014).

Fungsi dari portofolio *MAD* adalah meminimalkan nilai risiko yang ditangggung investor pada tingkat *return* tertentu. *MAD* membentuk masalah optimasi menjadi model linear yang mudah diselesaikan. Secara garis besar, perhitungan nilai risiko menggunakan model *MAD* adalah menentukan rata–rata nilai mutlak penyimpangan (*Mean absolute Deviation*) dari tingkat *realized return* terhadap *expected return* yang dirumuskan sebagai berikut:

$$a_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{a_{i(t)}}{T} \tag{2.9}$$

dimana

$$a_{i(t)} = |r_{i(t)} - \bar{r}_i| \tag{2.10}$$

Dengan :

$a_{i(t)}$: nilai risiko saham ke-i periode ke-t

$r_{i(t)}$: *realized return* saham ke-i pada periode ke- t

$\bar{r}_i$: *expected return* saham ke-i menggunakan *mean* geometri

T : Banyaknya periode

Secara lengkap perhitungan *MAD* dapat dilihat pada tabel 2.1

Tabel 2.1 Tabel Perhitungan *MAD*

Periode (t)	Saham ke-1	Saham ke-2	…	Saham ke-n
1	$\left\|r_{1(1)}-\bar{r}_1\right\|=a_{1(1)}$	$\left\|r_{2(1)}-\bar{r}_2\right\|=a_{2(1)}$		$\left\|r_{n(1)}-\bar{r}_n\right\|=a_{n(1)}$
2	$\left\|r_{1(2)}-\bar{r}_1\right\|=a_{1(2)}$	$\left\|r_{2(2)}-\bar{r}_2\right\|=a_{2(2)}$		$\left\|r_{n(2)}-\bar{r}_n\right\|=a_{n(2)}$
…	…	…	⋱	…
T	$\left\|r_{1(T)}-\bar{r}_1\right\|=a_{1(T)}$	$\left\|r_{2(T)}-\bar{r}_2\right\|=a_{2(T)}$	…	$\left\|r_{n(T)}-\bar{r}_n\right\|=a_{n(T)}$
Mean	$a_1=\sum_{t=1}^{T}\frac{a_{1(t)}}{T}$	$a_2=\sum_{t=1}^{T}\frac{a_{2(t)}}{T}$	…	$a_n=\sum_{t=1}^{T}\frac{a_{n(t)}}{T}$

Model portofolio *MAD* yaitu

Meminimalkan

$$\sigma_p=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

Dengan kendala (2.11)

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_ix_i\geq R$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$$

$$0\leq x_i\leq u_i, dengan\ i=1,2,\ldots,n$$

Dengan:

a_i : nilai risiko saham ke-i

x_i : bobot investasi saham ke-i

σ_p : Risiko portofolio *MAD*

R : Nilai *return* minimal

u_i : bobot investasi maksimal saham ke – i

Kendala pertama menjelaskan *return* portofolio (R_p) yang dibentuk akan lebih besar atau sama dengan nilai *return* minimal (R) yang diinginkan investor. Nilai *return* portofolio diperoleh dari jumlahan perkalian *expected return* ($\bar{r}_i$) dengan bobot investasi (x_i) masing-masing saham dan R biasanya sebesar

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i}{n} \tag{2.12}$$

Kendala kedua menjelaskan bahwa bobot investasi (x_i) seluruh n-saham akan sama dengan 1. Dengan kata lain jumlah modal yang akan diinvestasikan seluruhnya adalah 100%.

Kendala ketiga menjelaskan bahwa bobot investasi (x_i). masing-masing saham tidak bernilai negatif dan tidak lebih dari nilai tertentu (u_i). Nilai (x_i) yang tidak negatif menunjukkan bahwa pinjaman saham (*short sale*) tidak diijinkan (Jogiyanto, 2010). Nilai (u_i) ditentukan oleh masing-masing investor, sehingga kendala ketiga bersifat subjektif.

Tidak semua saham dapat dibentuk portofolio MAD, saham-saham yang dapat dibentuk portofolio *MAD* harus memenuhi beberapa asumsi syarat yaitu (Konno & Yamazaki, 1991)

1. Saham merupakan saham berisiko (bukan saham bebas risiko)
2. Tidak terjadi *short sale* (pinjaman)
3. *Realized Return* saham berdistribusi normal.

C. Distribusi Normal

Variabel random *X* dikatakan berdistribusi normal dengan *mean* φ dan varians σ^2 jika X memiliki fungsi densitas peluang berbentuk (Walpole, 1992, p. :180)

$$f(x;\ \varphi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\{(x-\varphi)/\sigma\}^2/2} \tag{2.13}$$

Untuk $-\infty < x < \infty$, dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$. Variabel random *X* yang berdistribusi normal dinotasikan dengan $X \sim N(\varphi, \sigma^2)$. Dalam hal investasi uji normalitas digunakan untuk mengetahui apakah *return* saham berdistribusi normal. *Return* saham yang berdistribusi normal akan mengantisipasi kestabilan harga, maka tidak akan terjadi penurunan harga yang signifikan sehingga merugikan investor. Uji normalitas dapat menggunakan bantuan *software* SPSS 22 menggunakan pengujian *Kolmogorov-Smirnov*. Uji ini digunakan karena konsep dasar dari *Kolmogorov-Smirnov* adalah membandingkan distribusi data (yang akan diuji normalitasnya) dengan distribusi normal baku. Distribusi normal baku adalah data yang telah ditransformasikan ke dalam bentuk *Z-Score* dan diasumsikan normal.

Perumusan hipotesis uji *Kolmogorov-Smirnov*

H_0 : data *return* saham mengikuti distribusi normal

H_1 : data *return* saham tidak mengikuti distribusi normal.

Dengan statistik uji

$$\textit{Kolmogorov-Smirnov}\ \mathrm{D} = \mathrm{maks}|\mathrm{F}^*(\mathrm{X}) - \mathrm{S}(\mathrm{X})| \tag{2.14}$$

Dengan:

$\mathrm{F}^*(\mathrm{X})$ adalah distribusi kumulatif data sampel

$\mathrm{S}(\mathrm{X})$ adalah distribusi kumulatif yang dihipotesakan

Dan dengan kriteria uji

H_0 ditolak jika $D \geq D_{tabel}$ atau *p-value Kolmogorov-Smirnov* < α

D_{tabel} adalah tabel *Kolmogorov-Smirnov*

D. Himpunan *Fuzzy*

1. Pengertian Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965. Himpunan *fuzzy* memiliki ciri utama yaitu pada nilai keanggotaannya. Jika pada himpunan tegas *(crisp)* A, nilai keanggotaan x dalam suatu himpunan A memiliki dua kemungkinan. Kemungkinan pertama adalah satu (1) yang berarti bahwa x menjadi anggota dalam himpunan A. Kemungkinan kedua adalah nol (0) yang berarti bahwa x tidak menjadi anggota dalam himpunan A, atau dapat ditulis seperti berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, jika\ x \in A \\ 0, jika\ x \notin A \end{cases} \tag{2.15}$$

Pada himpunanan *fuzzy*, nilai keanggotaan himpunan tegas berupa bilangan real dalam [0,1] pada setiap anggota himpunan.

Definisi 2.1 (Sakawa, 1993)

Misalkan X himpunan semesta dan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy dari X. Jika terdapat fungsi karakteristik $\mu_{\tilde{A}}(x)$ untuk $x \in X$ yang dinyatakan dengan bilangan real didalam interval [0,1] maka $\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut fungsi keanggotaan $\tilde{A}$, dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menyatakan nilai keanggotaan x di dalam $\tilde{A}$. Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di X dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | \; x \in X\} \tag{2.16}$$

Contoh 2.4

Seorang investor ingin menyelidiki nilai *return* suatu saham. Misalkan X={1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 7%, 8%, 9%, 10%} adalah himpunan nilai *return* suatu saham dengan 1% adalah nilai return ke-1 suatu saham dan seterusnya. Nilai keanggotaan di x dalam suatu himpunan $\tilde{A}$ adalah

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

0.1 adalah nilai keanggotaan nilai return ke-1 suatu saham, 0.2 adalah nilai keanggotaan nilai return ke-2 dan seterusnya. Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ merupakan "himpunan *fuzzy* nilai *return* tinggi" dapat dituliskan sebagai :

$\tilde{A} =$ {(1%, 0.1), (2%, 0.2), (3%, 0.3), (4%, 0.4), (5%, 0.5), (6%, 0.6), (7%, 0.7), (8%, 0.8), (9%, 0.9), (10%, 1)}

Artinya : nilai *return* ke-1 memenuhi tingkat nilai *return* tinggi sebesar 0.1 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-2 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.2 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-3 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.3 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-4 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.4 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-5 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.5 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-6 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.6 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-7 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.7 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-8 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.8 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-9 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 0.9 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1. Nilai *return* ke-10 memenuhi tingkat *return* tinggi sebesar 1 dari skala nilai *return* tinggi 0 sampai 1.

2. Fungsi keanggotaan

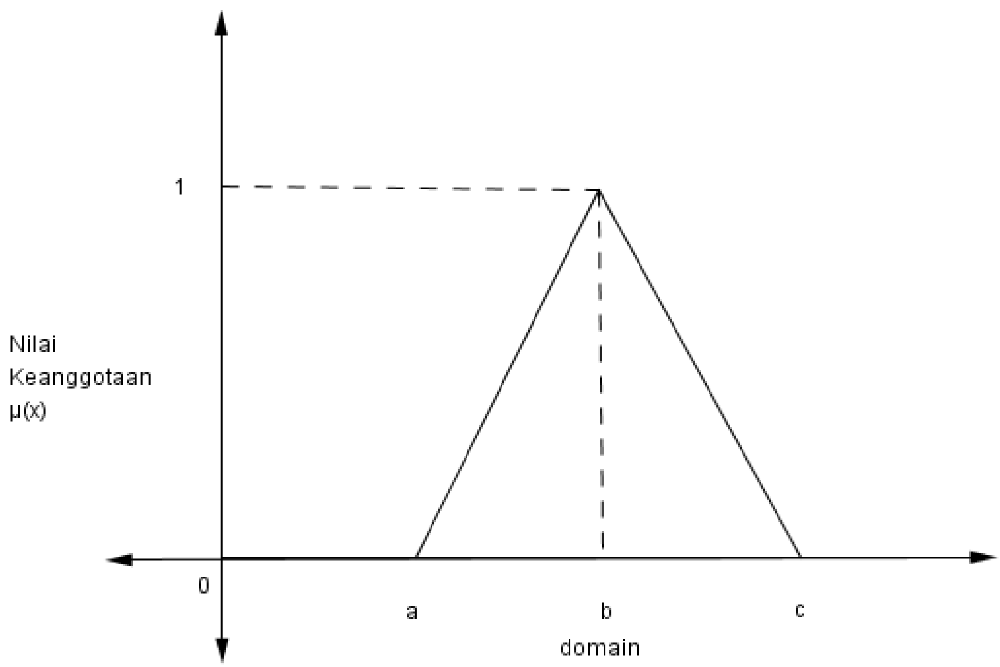
Fungsi keanggotaan adalah fungsi yang memasangkan setiap elemen himpunan dengan nilai keanggotaannya yang terletak dalam interval bilangan real [0,1] (Kusumadewi & purnomo, 2010). Dalam teori himpunan *fuzzy* dikenal banyak jenis fungsi keanggotaan diantaranya adalah fungsi keanggotaan linear naik, fungsi keanggotaan linear turun, fungsi keanggotaan segitiga, fungsi keanggotaan trapesium, fungsi keanggotaan bentuk bahu, fungsi keanggotaan *sigmoid* dan fungsi keanggotaan bentuk lonceng (Cox, 1994). Fungsi keanggotaan yang sering digunakan adalah fungsi keanggotaan segitiga dan trapesium. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai fungsi keanggotaan trapesium.

Definisi 2.2 (Kumar, Amit; Kaur, Jagdeep; Singh, Pushpinder, 2010)

Suatu bilangan fuzzy $\tilde{A} = (a, b, c)$ disebut bilangan fuzzy segitiga jika fungsi keanggotaan diberikan oleh

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{(x-c)}{(b-c)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.17}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{A}$ ditunjukan oleh gambar 2.1



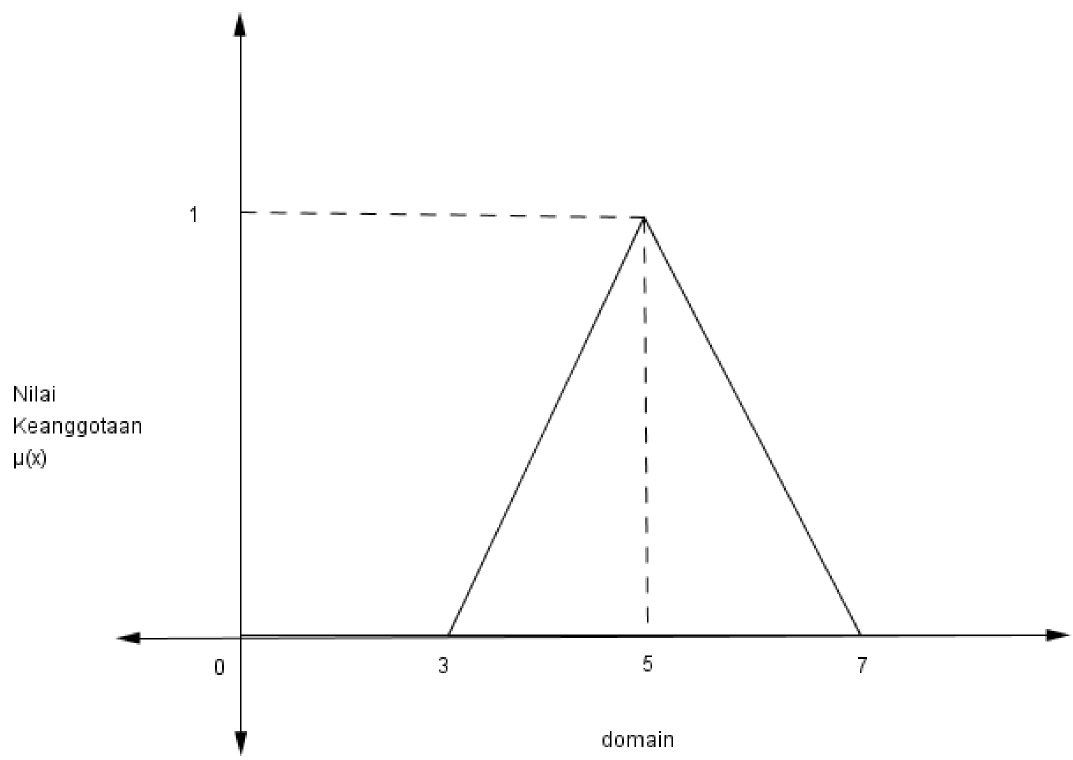
Gambar 2.1 Representasi Fungsi Keanggotaan Segitiga

Contoh 2.5

Misal diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{B} = (3,\ 5,\ 7)$ dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\begin{cases}\dfrac{(x-3)}{(5-3)}, & 3 \le x \le 5\\ \dfrac{(x-7)}{(5-7)}, & 5 \le x \le 7\\ 0, & lainnya\end{cases}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{B}$ ditunjukan oleh gambar 2.2 berikut ini



Gambar 2.2 Fungsi keanggotaan $\tilde{B}$

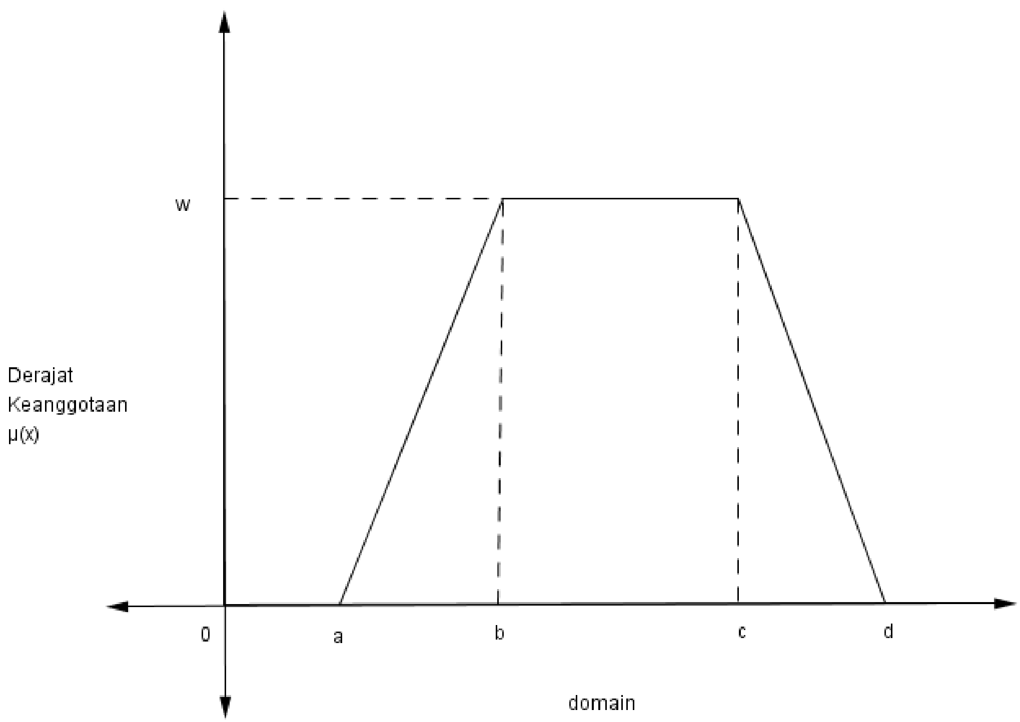
Pengembangan fungsi keanggotaan segitiga dengan beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan sama dengan 1 membentuk fungsi keanggotaan trapesium.

Definisi 2.3 (Kumar, Singh, Kaur, & Kaur, 2010)

Suatu bilangan fuzzy $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ *disebut bilangan fuzzy trapesium jika fungsi keanggotaan diberikan oleh:*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-\alpha)}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{(x-d)}{(c-d)}, & c \leq x \leq d \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.18}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{A}$ ditunjukan oleh gambar 2.3



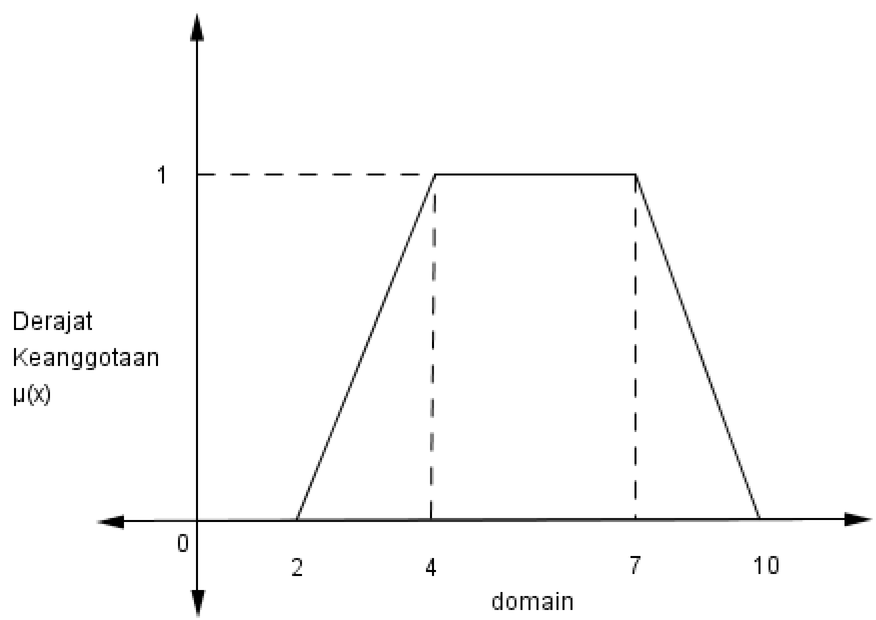
Gambar 2.3 Representasi Fungsi Keanggotaan Trapesium

Contoh 2.6

Misal diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{C}$=(2,4,7,10) dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{C}}(x)\begin{cases}\dfrac{(x-2)}{(4-2)}, & 2 \le x \le 4\\ 1, & 4 \le x \le 7\\ \dfrac{x-10}{7-10}, & 7 \le x \le 10\\ 0, & lainnya\end{cases}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{C}$ ditunjukan oleh gambar 2.4 berikut ini



Gambar 2.4 Fungsi keanggotaan $\widetilde{C}$

Seperti halnya dalam himpunan klasik, dalam himpunan *fuzzy* juga berlaku operasi pada himpunan yaitu irisan, gabungan dan komplemen. Berikut ini definisi terkait operasi tersebut.

Definisi 2.4 (Klir, Clair, & Yuan, 1997)

$\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah Himpunan fuzzy dari himpunan universal X. Notasi $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ merupakan bentuk umum operasi irisan fuzzy pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan oleh fungsi keanggotaan sebagai berikut,

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X \tag{2.19}$$

Contoh 2.7

Dari contoh 2.5 dan contoh 2.6 Diketahui nilai keanggotaan x = 4 pada himpunan $\tilde{B}$ adalah 0,5 dan nilai keanggotaan x = 4 pada himpunan $\tilde{C}$ adalah 1 maka

$$\mu_{\tilde{B}\cap\tilde{C}}(4) = \min\{\mu_{\tilde{B}}(4), \mu_{\tilde{C}}(4)\} = \min\{0{,}5; 1\} = 0{,}5$$

Definisi 2.5 (Klir, Clair, & Yuan, 1997)

Himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah Himpunan fuzzy dari himpunan universal X. Notasi $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ merupakan bentuk umum operasi gabungan himpunan fuzzy pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan fungsi keanggotaan sebagai berikut

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X \tag{2.20}$$

Contoh 2.8

Dari contoh 2.5 dan contoh 2.6 Diketahui nilai keanggotaan x = 4 pada himpunan $\tilde{B}$ adalah 0,5 dan nilai keanggotaan x = 4 pada himpunan $\tilde{C}$ adalah 1 maka

$$\mu_{\tilde{B}\cup\tilde{C}}(4) = \max\{\mu_{\tilde{B}}(4), \mu_{\tilde{C}}(4)\} = \max\{0{,}5; 1\} = 1$$

Definisi 2.6 (Klir, Clair, & Yuan, 1997)

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy dari himpunan universal X, sehingga operasi himpunan fuzzy komplemen pada $\tilde{A}$ dinotasikan "$\bar{A}$" yang didefinisikan fungsi keanggotaan sebagai berikut

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x),\ x \in X \qquad (2.21)$$

Contoh 2.9

Dari contoh 2.5 Diketahui nilai keanggotaan x = 4 pada himpunan $\tilde{B}$ adalah 0,5 maka

$\mu_{\bar{A}}(4) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(4)$ = 1 – 0.5 = 0.5

Artinya, nilai keanggotaan x = 4 pada himpunan *fuzzy* komplemen $\tilde{B}$ adalah 0,5

Himpunan bagian dari himpunan universal pada himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan dengan pembatasan nilai keanggotaan yang lebih besar atau sama dengan beberapa nilai α yang dipilih dalam selang [0,1]. Saat batasan ini diterapkan ke himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ didapatkan Himpunan bagian klasik ${}^{\alpha}A$ dari himpunan universal X, yang dinotasikan $\alpha - cut$ dari $\tilde{A}$ (Klir, Clair, & Yuan, 1997).

Definisi 2.7 (Klir, Clair, & Yuan, 1997)

$\alpha - cut$ dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah himpunan klasik ${}^{\alpha}A$ yang memuat semua elemen dari himpunan universal X yang nilai keanggotaannya lebih besar atau sama dengan nilai tertentu dari α yaitu

$${}^{\alpha}A = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\},\ \text{untuk setiap}\ \alpha \in [0,1] \qquad (2.22)$$

Contoh 2.10

Sebagai contoh akan digunakan himpunan *fuzzy* pada contoh 2.7 jika diambil untuk X diskret, X={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} dengan nilai keanggotaan x adalah $\mu_{\tilde{B}\cap\tilde{C}}$ (x) $=$ min{ $\mu_{\tilde{B}}$(x), $\mu_{\tilde{C}}$ (x)} ={0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0} maka $\alpha - cut$ nya yaitu:

Untuk $\alpha = 0$

$^{0}(B \cap C) = \{x \in X | (B \cap C)(x) \geq 0\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9, 10\}$

Untuk $\alpha = 0.1$

$^{0.5}(B \cap C) = \{x \in X | (B \cap C)(x) \geq 0.5\} = \{4, 5, 6\}$

Untuk $\alpha = 0.2$

$^{1}(B \cap C) = \{x \in X | (B \cap C)(x) \geq 1\} = \{5\}$

3. Bilangan *Fuzzy*

Bilangan *fuzzy* merupakan salah satu penggambaran matematis untuk ungkapan-ungkapan mendekati, hampir atau sekitar (Klir, Clair, & Yuan, 1997). Contoh bilangan *fuzzy* dalam kehidupan sehari-hari misalnya “sekitar 4 kg”, “sekitar pukul 6”, “kira-kira 20 m”, dan lain sebagainya. Ungkapan “sekitar 6” merupakan contoh bilangan *fuzzy*, dimana bilangan 6 merupakan nilai pusat dan nilai pusat memiliki nilai atau nilai keanggotaan 1, dan nilai atau derajat bilangan lainnya menunjukan kedekatan terhadap nilai pusat mengikuti beberapa aturan (Klir, Clair, & Yuan, 1997).

Definisi 2.8 (Alkanani & Adnan, 2014)

Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *dikatakan normal jika sekurang-kurangnya terdapat satu* $x \in X$ *sedemikian sehingga* $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Definisi 2.9 (Alkanani & Adnan, 2014)

Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *dikatakan konveks jika untuk setiap* $x_1, x_2 \in X$ *dan untuk setiap* $\lambda \in [0,1]$ *memenuhi:*

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1+\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \tag{2.23}$$

Definisi 2.10 (Klir, Clair, & Yuan, 1997)

Support dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *di X adalah himpunan semua element dari X yang memiliki nilai keanggotaan tak nol di* $\tilde{A}$. *Secara umum dinotasikan sebagai berikut:*

$$Support(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \tag{2.24}$$

Definisi 2.11 (Klir, Clair, & Yuan, 1997)

Untuk Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut :*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \{a,b] \\ 1, & x \in \{b,c\} \\ g(x), & x \in [c,d\} \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.25}$$

Bilangan fuzzy adalah Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *yang memenuhi syarat-syarat berikut:*

a. *Bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *merupakan himpunan fuzzy normal.*

b. $\alpha - cut$ *dari bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *berada pada interval tertutup bilangan real.*

c. $Support$ *dari bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *berada pada interval terbuka (a,d) pada bilangan real.*

d. bilangan fuzzy $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy konvek.

Berikut ini diberikan contoh bilangan *fuzzy*.

Contoh 2.11

Dengan menggunakan contoh 2.5, bilangan *fuzzy* $\tilde{B}$ menyatakan “sekitar 5” dan dapat dinyatakan sebagai himpunan *fuzzy* $\tilde{B}$ dengan fungsi keanggotaan segitiga $\tilde{B} = (3, 5, 7)$.

Bilangan *fuzzy* $\tilde{B}$ bersifat normal karena mempunyai satu anggota dari X yang memiliki nilai keanggotaan 1 yaitu untuk x = 5. $\alpha - cut$ dari himpunan *fuzzy* $\tilde{B}$ berada pada interval tertutup dari bilangan real [0,1] yaitu

Untuk $\alpha = 0$ maka ${}^{0}B = \{x \in X|B(x) \geq 0\} = \{3,7\}$,

Untuk $\alpha = 0.5$ maka ${}^{0.5}B = \{x \in X|B(x) \geq 0.5\} = \{4,6\}$,dan

Untuk $\alpha = 1$ maka ${}^{0}B = \{x \in X|B(x) \geq 1\} = \{5\}$.

Support $(\tilde{B})$ berada pada selang terbuka (3,7). Bilangan *fuzzy* $\tilde{B}$ merupakan himpunan *fuzzy* konveks karena untuk setiap sebarang $x \in \tilde{B}$ ambil 4 dan 6 dengan $\lambda = 0.5$ maka $\mu_{\tilde{B}}((0.5)4 + (1 + 0.5)4) \geq \min\{0.5,0.5\} \in \tilde{B}$. Dengan demikian, $\tilde{B}$ merupakan bilangan *fuzzy*.

Dalam bilangan *fuzzy* juga berlaku operasi bilangan dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 2.12 (Kumar, Amit; Singh, Pushpinder; Kaur, Jagdeep, 2010)

Untuk $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ *adalah dua bilangan fuzzy trapesium, operasi aritmatika pada* $\tilde{A}$ *dan* $\tilde{B}$ *sebagai berikut:*

(i) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$

(ii) $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1) \ominus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)$

(iii)$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1) \otimes (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a', b', c', d')$

$dimana\ a' = \min(a_1a_2, a_1d_2, a_2d_1, d_1d_2)$, $b' = \min(b_1b_2, b_1c_2, c_1b_2, c_1c_2)$,

$c' = \max(b_1b_2, b_1c_2, c_1b_2, c_1c_2)$, $d' = \max(a_1a_2, a_1d_2, a_2d_1, d_1d_2)$

Contoh 2.12

Diberikan dua himpunan *fuzzy* $\tilde{E} = (-2{,}1, 4, 8)$ dan $\tilde{F} = (2{,}4{,}6{,}9)$ operasi aritmatika pada $\tilde{E}$ dan $\tilde{F}$ adalah sebagai berikut:

(i) $\tilde{E} \oplus \tilde{F} = (-2{,}1, 4, 8) \oplus (2{,}4{,}6{,}9) = (0, 5, 10, 17)$

(ii) $\tilde{E} \ominus \tilde{F} = (-2{,}1, 4, 8) \ominus (2{,}4{,}6{,}9) = (-11, -5, 0, 6)$

(iii) $\tilde{E} \otimes \tilde{F} = (-2{,}1, 4, 8) \otimes (2{,}4{,}6{,}9) = (a', b', c', d')$

$dimana\ a' = \min(-4, -18{,}16{,}72)$, $b' = \min(4{,}6{,}16{,}24)$,

$c' = \max(4{,}6{,}16{,}24)$, $d' = \max(-4, -18{,}16{,}72)$

$(-2{,}1, 4, 8) \otimes (2{,}4{,}6{,}9) = (-18{,}424{,}72)$

Definisi 2.13 (Skalna, et al., 2015)

Misalkan $\tilde{A} = (a, b, c, d)$, maka *centroid (centre of gravity) point* dari $\tilde{A}$ diperoleh sebagai berikut

$$COGP(\tilde{A}) = (\bar{x}_0(\tilde{A}), \bar{y}_0(\tilde{A})) \tag{2.26}$$

Dimana

$$\bar{x}_0(\tilde{A}) = \frac{1}{3}\left[a + b + c + d - \frac{cd - ad}{(c+d)-(a+b)}\right] \tag{2.27}$$

$$\bar{y}_0(\tilde{A}) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{c-b}{(c+d)-(a+b)}\right]$$

Berdasarkan *centroid point*, dua bilngan *fuzzy* $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dibandingkan berdasarkan aturan-aturan berikut:

Jika $\bar{x}_0(\tilde{A}) > \bar{x}_0(\tilde{B})$, maka $\tilde{A} > \tilde{B}$

Jika $\bar{x}_0(\tilde{A}) < \bar{x}_0(\tilde{B})$, maka $\tilde{A} < \tilde{B}$

Jika $\bar{x}_0(\tilde{A}) = \bar{x}_0(\tilde{B})$, dan $\bar{y}_0(\tilde{A}) > \bar{y}_0(\tilde{B})$, maka $\tilde{A} > \tilde{B}$

Jika $\bar{x}_0(\tilde{A}) = \bar{x}_0(\tilde{B})$, dan $\bar{y}_0(\tilde{A}) < \bar{y}_0(\tilde{B})$, maka $\tilde{A} < \tilde{B}$

Selain itu maka $\tilde{A} = \tilde{B}$

Contoh 2.13

Dari contoh 2.12 diketahui dua bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{E} = (-2,1,4,8)$ dan $\tilde{F} = (2,4,6,9)$

Maka $\tilde{E} < \tilde{F}$ karena $\bar{x}_0(\tilde{E}) < \bar{x}_0(\tilde{F})$

$\bar{x}_0(\tilde{E}) = \frac{1}{3}\left[-2 + 1 + 4 + 8 - \frac{4\times 8-(-2)\times 8}{(4+8)-(-2+1)}\right] = 2.4359 \quad < \quad \bar{x}_0(\tilde{F}) = \frac{1}{3}\left[2 + 4 + 6 + 9 - \frac{6\times 9 - 2\times 9}{(6+9)-(2+4)}\right] = 5.667$

4. *Ranking Function*

Metode Efisien yang digunakan untuk membandingkan bilangan *fuzzy* adalah dengan menggunakan *ranking function* (Kumar, Singh & Kaur, 2010). *Ranking function* adalah fungsi $\Re: \mathrm{F}(\Re) \rightarrow \Re$ yang memetakan setiap bilangan *fuzzy* pada sebuah bilangan real. (Alkanani & Adnan, 2014)

Definisi 2.13 (Mahdavi-Amiri, Nasseri, & Yazdani, 2009)

Untuk $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan fuzzy trapesium didalam $F(\Re)$, didefinisikan urutan dari $F(\Re)$ adalah sebagai berikut

$$\tilde{A} \gtrsim \tilde{B} \Longrightarrow (\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B} \tag{2.28}$$

$$\tilde{A} \succ \tilde{B} \Longrightarrow (\Re)\tilde{A} > (\Re)\tilde{B} \tag{2.29}$$

$$\tilde{A} \approx \tilde{B} \Longrightarrow (\Re)\tilde{A} = (\Re)\tilde{B} \tag{2.30}$$

Dimana $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ ada pada $F(\Re)$. dan juga dapat dituliskan $\tilde{A} \lesssim \tilde{B}$ jika $\tilde{B} \gtrsim \tilde{A}$. Kemudian untuk setiap ranking function linear berlaku $\tilde{A} \gtrsim \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\tilde{A} - \tilde{B} \gtrsim \tilde{0}$, atau jika dan hanya jika $-\tilde{B} \gtrsim -\tilde{A}$. Dan juga jika $\tilde{A} \gtrsim \tilde{B}$ dan $\tilde{C} \gtrsim \tilde{D}$ maka $\tilde{A} + \tilde{C} \gtrsim \tilde{B} + \tilde{D}$.

Definisi 2.14 (Kumar, Singh, Kaur, & Kaur, 2010)

ranking function adalah fungsi $\Re: \mathrm{F}(\Re) \rightarrow \Re$ yang memetakan bilangan-bilangan *fuzzy* trapesium ke bilangan real. Untuk $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ adalah bilangan *fuzzy* trapesium , maka

$$\Re(\tilde{A}) = \left[\frac{a+b+c+d}{4}\right] \tag{2.31}$$

Contoh 2.14

Berikut ini diberikan contoh pendefinisian bilangan *fuzzy* trapesium atas bilangan real. Dari contoh 2.6 diketahui bilangan *fuzzy* $\tilde{C}$=(2,4,7,10). maka

$$\Re(\tilde{C}) = \left[\frac{2+4+7+10}{4}\right] = \frac{23}{4} = 5.75$$

Teorema 2.1 (Hatami & Kazemipoor, 2014)

Misalkan $\tilde{A} = = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, dan $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2) \in$ F($\Re$), maka

$$\Re(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = \Re(\tilde{A}) + \Re(\tilde{B}) \tag{2.32}$$

Bukti:

$(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$ maka

$$\Re(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = \Re(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{4}$$

$$= \frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4} + \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}$$

$$= \Re(\tilde{A}) + \Re(\tilde{B})$$

5. *Fuzzy Distribution*

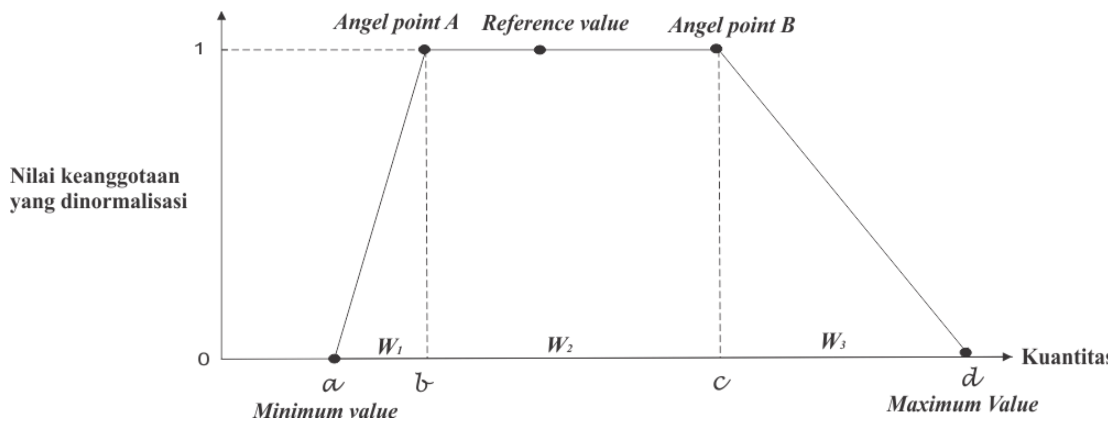
Fuzzy distribution (a, b, c, d) (gambar 2.5) digunakan untuk menentukan parameter-parameter dari fungsi keanggotaan *fuzzy*. *Fuzzy distribution* terdiri dari nilai-nilai yang terdefinisikan dari runtun waktu berikut (Frantti, 2001) dengan,

a = minimum value

$$b = \text{Angle point } A = \frac{minimum\ value + mean\ value}{2} \quad (2.33)$$

$$c = \text{Angle point } B = \frac{mean\ value + maximum\ value}{2}$$

d = maximum value



Gambar 2.5 *Fuzzy distribution*

Dari gambar 2.5, nilai titik berat dinyatakan sebagai "*reference value*". *Reference value* boleh disederhanakan menjadi *mean value*, nilai tertimbang, atau nilai modus dari himpunan data yang diproses (Frantti, 2001).

Nilai lebar atau jangkauan dari *fuzzy distribution* dapat didefinisikan sebagai berikut (Frantti, 2001):

$$W = |a - b| + |b - c| + |c - d| = |a - d| \quad (2.34)$$

Dimana

W : Jangkauan dari himpunan data yang diproses

a : *Minimum value* dari himpunan data yang diproses

b : *Angel point A* dari himpunan data yang diproses

c : *Angel point B* dari himpunan data yang diproses

d : *Maximum value* dari himpunan data yang diproses

Nilai keanggotaan dari *fuzzy distribution* dinormalisasi menjadi 1.

Sub-jangkauan dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$W_1 = |a - b| \quad (2.35)$$

$$W_2 = |b - c| \quad (2.36)$$

$$W_3 = |c - d| \quad (2.37)$$

Dimana W_1 adalah jangkauan dari segitiga pertama, W_2 adalah jangkauan dari persegi panjang, dan W_3 adalah jangkauan dari segitiga kedua.

Contoh 2.15

Diberikan data *realized return* dari data harga saham pada contoh 2.1.

Periode	Harga	*Realized return*
0	26000	
1	26800	0.030769231
2	26500	-0.01119403
3	26750	0.009433962

Expected return fuzzy (a, b, c, d) dapat disusun dari *fuzzy distribution* data historis *realized return* sebagai berikut:

Diketahui :

minimum value = -0.01119403

maximum value = 0.030769231

mean value (*expected return*) = 0.009524

maka parameter-parameter *fuzzy*-nya adalah sebagai berikut:

$a =$ -0.01119403

$b = -0{,}000835015$

$c = 0.020146616$

$d =$ 0.030769231

E. Program Linear

Model matematika adalah suatu bentuk interpretasi manusia dalam menerjemahkan atau merumuskan persoalan – persoalan yang ada ke bentuk matematika sehingga persoalan itu dapat diselesaikan secara matematis. Program Linear (PL) adalah model matematika yang terdiri persamaan atau pertidaksamaan linear yang mempunyai banyak penyelesaian, dengan memperhatikan kendala-kendala agar diperoleh hasil yang optimum (maksimum / minimum) (Bazaraa, Jarvis, & Sherali, 2010). Secara umum Program Linear terdiri dari dua bagian, yaitu fungsi kendala dan fungsi tujuan. Fungsi kendala adalah batasan – batasan yang harus dipenuhi, sedangkan fungsi tujuan adalah fungsi yang nilainya akan dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan).

Bentuk umum program linear (Susanta, 1994) adalah sebagai berikut:

Mencari $x_1, x_2, \dots , \ x_n$

Memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j = \ c_1 \, x_1 + \ c_2 \, x_2 + \cdots + \ c_n \, x_n$$

dengan kendala: (2.38)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq) b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq) b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots , x_n \geq 0$$

Dimana i=1,2, . . . ,m dan j=1, 2, … , n

Dengan

x_j : variabel keputusan

a_{ij} : koefisien teknis (koefisien dalam kendala utama)

b_i : suku tetap

c_j : koefisien biaya (koefisien dalam fungsi tujuan)

$x_j \geq 0$: kendala tak negatif

Dengan cara tulis matriks (bentuk yang ekuivalen dari model 2.38) adalah :

Mencari $\mathbb{X}$

yang memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$f = \mathbb{C}\,\mathbb{X}$$

dengan kendala : (2.39)

$$\mathbb{A}\,\mathbb{X}\,(\leq, =, \geq)\mathbb{B}$$

$$\mathbb{X} \geq 0$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = [\ c_1\, c_2\ \ldots.\ \ c_n\ ]$$

$$\mathbb{A}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Masalah Program linear (PL) dapat diselesaikan dengan beberapa metode. Salah satu metode yang sering digunakan dalam penyelesaian masalah program linear adalah metode simpleks. kebutuhan utama dari metode simpleks adalah solusi layak basis. Solusi layak basis adalah suatu vektor tak negatif $\mathbb{X}$ yang memenuhi persamaan $\mathbb{A}\,\mathbb{X} = \mathbb{B}$. Langkah – langkah penyelesaian masalah program linear menggunakan metode simpleks adalah sebagai berikut (Yamit, 1991):

1. Merubah masalah program linear kedalam bentuk kanonik

Langkah pertama yang dilakukan adalah merubah masalah program linear kedalam bentuk kanonik dengan cara merubah setiap kendala utama yang berbentuk pertidaksamaan menjadi bentuk persamaan dengan memasukkan variabel pengetat yaitu *slack variable* (positif atau negatif) dan memastikan setiap fungsi kendala utama memiliki satu variabel basis. Kendala utama (dengan tanda $\leq$) ditambahkan *slack variable* (+) dan kendala utama (dengan tanda $\geq$) dikurangi *slack variable* (-). Sedangkan untuk fungsi kendala utama yang belum memiliki variabel basis maka perlu ditambahkan *artificial variable* (variabel semu) yang akan dijadikan variabel basis pada tabel awal simpleks. Koefisien biaya untuk *slack variable* adalah nol, sedangkan untuk *artificial variable* adalah –M untuk kasus maksimalisasi dan +M untuk kasus minimalisasi dengan M adalah bilangan positif yang cukup besar. Model bentuk kanonik program linear dapat dituliskan sebagai berikut:

Mencari $x_1, x_2, \dots , \ x_n$

Memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j = \ c_1 \, x_1 + \ c_2 \, x_2 + \cdots + \ c_n \, x_n$$

dengan kendala: (2.40)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 + \cdots + s_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + s_1 + \cdots + s_n \ = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ + s_1 + \cdots + s_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots , x_n \geq 0$$

Dimana i=1,2, . . . ,m dan j=1, 2, … , n

Pada masalah program linear $(x_1, x_2, \dots , \ x_n)$ yang memenuhi fungsi-fungsi kendala disebut penyelesaian layak (p.l) dan (p.l) yang disusun oleh vektor basis disebut penyelesaian layak basis (p.l.b) dan bila (p.l) yang mengoptimumkan fungsi tujuan maka disebut penyelesaian optimum (p.o) (Susanta, 1994).

Ada atau tidaknya penyelesaian pada suatu masalah PL dapat dilihat dari besar rank dari matriks $\mathbb{A}$ pada bentuk kanonik masalah PL. Rank suatu matriks $\mathbb{A}_{mxn}$ adalah ukuran yang terbesar dari matriks bujur sangkar bagian dari $\mathbb{A}$ yang determinannya tidak nol. Rank matriks $\mathbb{A}$ dilambangkan dengan $r(\mathbb{A})$ (Susanta, 1994), yaitu: $r(\mathbb{A}_{mxn}) \leq \min(m, n)$

Dimana m menunjukan banyaknya persamaan dan n menunjukkan banyaknya variable.

Dengan cara tulis matriks : $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$

Disusun matriks $\mathbb{A}_{\mathbb{B}} = (\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$ adalah

Matriks $\mathbb{A}$ yang dilengkapi dengan suku tetap di ruas kanan.

Jika $r(\mathbb{A}) \neq r(\mathbb{A}_{\mathbb{B}})$ maka masalah PL tidak ada penyelesaian

Jika $r(\mathbb{A}) = r(\mathbb{A}_{\mathbb{B}}) = p$ maka masalah PL ada penyelesaian

Untuk $p < n$ maka banyak penyelesaian

Untuk $p = n$ maka penyelesaian tunggal

Contoh 2.16

Berikut ini diberikan contoh masalah program linear yang akan dirubah kebentuk kanonik.

Mencari $x_1, x_2, \dots, x_n$

Yang minimalkan fungsi tujuan $f = 35x_1 + 20x_2 + 10x_3$

Dan memenuhi fungsi kendala,

$$2x_1 + 5x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 210$$

$$4x_1 + 6x_3 \geq 150$$

$$x_1 + x_3 = 180$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Penyusunan bentuk kanonik dari masalah program linear dilakukan dengan cara berikut:

(1) Menambahkan *slack variable* s_1 pada kendala pertama

(2) Kendala kedua tidak ditambahkan apa-apa karena sudah berbentuk kanonik dan sudah memiliki variabel basis yaitu x_2.

(3) Mengurangi kendala ketiga dengan *slack variabel* s_2. Tetapi Karena s_2 berrnilai negatif, maka kendala ketiga belum memiliki variabel basis, sehingga perlu ditambahkan *artificial variabel* d_1.

(4) Meskipun kendala keempat sudah berbentuk kanonik, akan tetapi belum memiliki variabel basis, sehingga perlu ditambahkan *artificial variable* d_2 sebagai variabel basis.

Bentuk kanonik dari contoh diatas dapat ditulis menjadi:

Mencari $x_1,x_2,x_3,s_1,s_2,d_1,d_2$

Yang meminimalkan

$$f = 35x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 0s_1 + 0s_2 + Md_1 + Md_2$$

Dan memenuhi kendala

$$2x_1 + 5x_3 + s_1 = 100$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 210$$

$$4x_1 + 6x_3 - s_2 + d_1 = 150$$

$$x_1 + x_3 + d_2 = 180$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, d_1, d_2 \geq 0$$

2. Masukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks

Setelah diperoleh bentuk kanonik, maka langkah selanjutnya yaitu memasukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks. Tabel simpleks menurut (Susanta, 1994) adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Simpleks

	c_j	c_1	c_2	…	cn		
$\bar{c}_i$	$\frac{\bar{x}_i}{x_j}$	x_1	x_2	…	xn	bi	R_i
$\bar{c}_1$	$\bar{x}_1$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1	R_1
$\bar{c}_2$	$\bar{x}_2$	a_{21}	a_{22}	…	a_2n	b_2	R_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
$\bar{c}_m$	$\bar{x}_m$	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m	R_m
	z_j	z_1	z_2	…	z_n	Z	
	z_j-c_j	z_1-c_1	z_2-c_2	…	z_n-c_n	Z	

Keterangan:

x_j : variabel-vaiabel keputusan lengkap

a_{ij} : koefisien teknis

b_i : suku tetap

c_j : koefisien ongkos

$\bar{x}_i$: variabel yang menjadi basis dalam tabel yang ditinjau

$\bar{c}_i$: koefisien ongkos dari variabel basis $\bar{x}_i$

$z_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \, a_{ij}$: hasil kali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom a_{ij}

$Z = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \, b_i$: hasil kali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom b_i

z_j-c_j : selisih z_j dengan c_j

dimana $R_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$ dengan syarat $a_{ij} > 0$

3. Melakukan Uji Optimalisasi

Uji optimalisasi dilakukan untuk mengetahui apakah solusi yang dicari sudah optimal, maka dari itu perlu dicari penyelesaian optimum dari masalah program linear. Ciri-ciri tabel simpleks yang sudah optimal dibedakan menjadi

a. Pola memaksimalkan

Tabel sudah optimal jika $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua j

b. Pola meminimalkan

Tabel sudah optimal jika $z_j - c_j \leq 0$ untuk semua j

Jika tabel sudah optimal, solusi layak basis yang dicari terdapat pada kolom $\bar{c}_i$ dengan nilai yang diperoleh terdapat pada kolom b_i. Tetapi jika kondisi optimal belum terpenuhi, maka perlu dilakukan perbaikan tabel.

4. Memperbaiki Tabel

Memperbaiki tabel berarti menyusun tabel baru dengan mengganti satu variabel basis. Memperbaiki tabel dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

(1) Menentukan "kolom kunci" atau variabel basis yang akan masuk yaitu variabel non basis yang memiliki nilai $z_j - c_j < 0$ terkecil untuk kasus maksimalisasi, dan variabel non basis yang memiliki nilai $z_j - c_j > 0$ terbesar untuk kasus minimalisasi.

(2) Menentukan “baris kunci” atau variabel basis yang akan keluar yaitu variabel basis yang memiliki nilai R_i terkecil dengan

$$R_i = \frac{b_i}{a_{ij}} \tag{2.41}$$

dengan syarat $a_{ij} > 0$

b_i tidak boleh negatif jadi R_i tidak mungkin negatif.

(3) Melakukan operasi baris elementer untuk memasukkan variabel basis yang baru dan mengeluarkan salah satu variabel basis yang ada.

5. Apabila kondisi optimum belum tercapai, maka ulangi kembali langkah keempat diatas. Apabila kondisi optimum telah tercapai, maka proses pengerjaan dengan metode simpleks berhenti.

Meskipun kondisi optimum sudah terpenuhi, ada beberapa kondidi khusus yang mungkin terjadi, diantaranya adalah :

a. Memiliki lebih dari 1 solusi

Kondisi ini terlihat pada tabel simpleks yang sudah memenuhi syarat optimum, terdapat variabel non basis yang memiliki nilai $z_j - c_j$ sama dengan nol.

b. Degenerate

Jika tidak semua variabel utama menjadi variabel basis pada tabel simpleks optimum atau ada variabel utama yang menjadi variabel basis pada tabel simpleks optimum dan bernilai nol.

c. Penyelesaian tak terbatas

Jika koefisien-koefisien teknis pada kolom kunci tidak ada yang positif. Hal ini mengakibatkan nilai R_i tidak dapat dihitung, sehingga proses pengerjaan dengan metode simpleks terpaksa berhenti. Inilah tanda meskipun soalnya layak tetapi nilai fungsi tujuan menjadi tak terbatas, sehingga soal asli tidak mempunyai penyelesaian optimum.

d. Soal tak layak

Jika tabel sudah memenuhi syarat optimum, akan tetapi penyelesaian optimum tidak memenuhi kendala karena terdapat *artificial variable* (variabel semu) yang bernilai positif.

Berikut ini diberikan contoh masalah program linear yang diselesaikan dengan metode simpleks.

Contoh 2.17

Diberikan masalah PL sebagai berikut:

Mencari $x_1$dan x_2

Yang meminimumkan $f = 40x_1 + 80x_2$

Dan memenuhi kendala ,

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Masalah diatas dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Merubah masalah program linear kedalam bentuk kanonik

Contoh 2.17 Dirubah kedalam bentuk kanonik sebagai berikut.,

Mencari x_1,x_2,s_1,s_2,d_1,d_2

Yang meminimumkan

$$f = 40x_1 + 80x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Md_1 + Md_2$$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 - s_1 + d_1 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - s_2 + d_2 = 6$$

$$x_1,x_2,s_1,s_2,d_1,d_2 > 0$$

2. Masukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks.

Bentuk kanonik dari contoh 2.17 dimasukkan kedalam tabel 2.3

Tabel 2.3 Tabel Awal Simpleks dari Contoh 2.17

	c_j	40	80	0	0	M	M		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	d_1	d_2	bi	R_i
M	d1	1	1	-1	0	1	0	4	4
M	d2	1	3	0	-1	0	1	6	2
	z_j	2M	4M	-M	-M	M	M	10M	
	z_j-c_j	2M-40	4M-80	-M	-M	0	0		

3. Melakukan Uji Optimalisasi

Persoalan pada contoh 2.17 diatas merupakan masalah minimalisasi. Kondisi optimal tercapai jika nilai baris $z_j - c_j \leq 0$. Pada tabel 2.3 Diatass terlihat bahwa pada baris $z_j - c_j$ masih ada yang bernilai positif, maka kondisi optimal belum terpenuhi. Sehingga perlu dilakukan perbaikan tabel.

4. Memperbaiki tabel

Tahapan-tahapan memperbaiki tabel adalah sebagai berikut:

(1) Menentukan "kolom kunci" atau variabel basis yang akan masuk yaitu x_2 karena memiliki nilai $z_j - c_j > 0$ yang paling besar yaitu 4M-80. Dengan M adalah bilangan positif yang cukup besar.

(2) Menentukan "baris kunci" atau variabel basis yang akan keluar yaitu d_2 yang memiliki nilai R_i terkecil yaitu 2.

(3) Melakukan operasi baris elementer untuk memasukkan variabel basis baru,

$\bar{b}_2 = \frac{1}{3} b_2$ (baris-2 baru adalah baris-2 lama dibagi 3)

$\bar{b}_1 = b_1 - \bar{b}_2$ (baris-1 baru adalah baris-1 lama dikurangi baris-2 baru)

Sehingga diperoleh tabel 2.3 simpleks yang baru yaitu tabel 2.4

Tabel 2.4 Tabel Simpleks Iterasi Ke-1 dari Contoh 2.17

.	c_j	*40*	*80*	*0*	*0*	*M*	*M*		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	d_1	d_2	*bi*	R_i
M	$d1$	$^2/_3$	*0*	*-1*	$^1/_3$	*1*	$-^1/_3$	*2*	*3*
80	x_2	$^1/_3$	*1*	*0*	$-^1/_3$	*0*	$^1/_3$	*2*	*6*
	z_j	$\frac{(2M+80)}{3}$	*80*	*-M*	$\frac{(M-80)}{3}$	*M*	$\frac{(M-80)}{3}$	*2M+160*	
	z_j-c_j	$\frac{(2M-40)}{3}$	*0*	*-M*	$\frac{(M-80)}{3}$	*0*	$\frac{(80-4M)}{3}$		

Tabel 2.4 Diatas belum optimal karana ada baris z_j-c_j yang masih bernilai positif. Sehingga perlu dilakukan perbaikkan tabel kembali. Dengan mengulangi langkah keempat, maka dibuat tabel baru seperti berikut.

Tabel 2.5 Tabel Iterasi Ke-2 dari Contoh 2.17

	c_j	*40*	*80*	*0*	*0*	*M*	*M*		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	d_1	d_2	*bi*	R_i
40	x_1	1	*0*	$-^3/_2$	$^1/_2$	$^3/_2$	$-^1/_2$	*3*	
80	x_2	0	*1*	$^1/_2$	$-^1/_2$	$-^1/_2$	$^1/_2$	*1*	
	z_j	40	*80*	*-20*	-20	*20*	20	*200*	
	z_j-c_j	0	*0*	*-20*	-20	*20-M*	$20-M$		

Pada tabel 2.5 diatas, kondisi optimum telah tercapai, karena nilai pada baris z_j-c_j tidak ada yang bernilai positif. Nilai variabel keputusan dari penyelesaian optimal tersebut adalah x_1 = 3 dan x_2 = 1 dengan nilai fungsi tujuan f = 200.

Adakalanya jumlah variabel keputusan yang dicari dari PL sangat banyak, sehingga pada penelitian ini digunakan metode yang cocok untuk mencari solusi optimal dari suatu permasalah program linear yaitu dengan menggunakan algoritma genetika.

F. Algoritma Genetika

Metode yang cocok digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear dengan banyak variabel yaitu menggunakan algoritma genetika.

1. Definisi Algoritma genetika

Algoritma genetika merupakan suatu metode algoritma pencarian berdasarkan pada mekanisme seleksi alam dan genetik alam (Kusumadewi S. , 2003).

Algoritma Genetika (AG) pertama kali ditemukan oleh John Holland pada tahun 1960. Bersama murid dan teman-temannya, John Holland mempublikasikan AG dalam buku yang berjudul *Adaption of Natural and Artifical System* pada tahun 1975 (Coley, 1999).

Algoritma genetika muncul dari teori-teori dalam buku biologi, sehingga algoritma genetika banyak menggunakan banyak istilah dan konsep biologi (Suyanto, 2005). Algoritma genetika mengodekan solusi-solusi yang mungkin ke dalam struktur data dalam bentuk kromosom-kromosom dan mengaplikasikan operasi rekombinasi genetik ke struktur data tersebut (Whitley, 2002). Hal-hal yang terdapat dalam algoritma genetika adalah sebagai berikut (Satriyanto, 2009).

a. Gen *(Genotype)* adalah komponen dasar penyusun kromosom yang membentuk suatu solusi yang mungkin dari permasalahan yang diangkat.

b. *Allele (bit)* yaitu nilai dari sebuah gen, dapat berupa bilangan biner, *float*, integer, karakter dan kombinatorial.

c. Kromosom adalah gabungan dari beberapa gen.

d. Individu merupakan hasil dari pengkodean kromosom yaitu salah satu solusi yang mungkin dari permasalahan yang diangkat.

e. Populasi merupakan sekumpulan individu yang akan diproses bersama dalam satu siklus proses evolusi.

f. Induk atau orang tua adalah kromosom yang akan dikenai operasi genetik *crossover*.

g. *Crossover* merupakan operasi genetik yang mewakili proses perkembangbiakan induk.

h. *Offspring* adalah kromosom yang merupakan hasil dari operasi genetik (*crossover*) dikenal sebagai keturunan atau anak.

i. Mutasi merupakan operasi genetik yang terjadi pada anak hasil *crossover*. Mutasi berperan menghasilkan perubahan acak dalam populasi, yang berguna untuk menambah variasi dari individu-individu dalam sebuah populasi.

j. Proses seleksi merupakan proses yang mewakili proses seleksi alam *(natural selection)* dari teori Darwin. Proses ini dilakukan untuk menentukan induk dari operasi genetik (*crossover*) yang akan dilakukan untuk menghasilkan keturunan (*offspring*).

k. Nilai *fitness* merupakan penilaian yang menentukan bagus tidaknya sebuah kromosom.

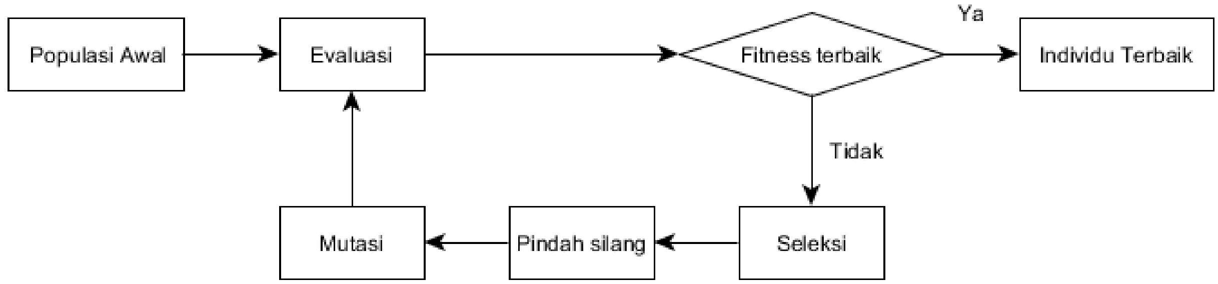
l. Fungsi evaluasi adalah fungsi yang digunakan untuk menentukan nilai *fitness*. Fungsi evaluasi ini merupakan sekumpulan kriteria-kriteria tertentu dari permasalahan yang ingin diselesaikan.

m. Generasi merupakan satuan dari populasi setelah mengalami operasi-operasi genetika, berkembang biak, dan menghasilkan keturunan. Pada akhir dari setiap generasi, untuk menjaga agar jumlah kromosom dalam populasi tetap konstan, kromosom-kromosom yang mempunyai nilai *fitness* yang rendah dan memiliki peringkat dibawah nilai minimal akan dihapus dari populasi.

Secara umum, proses algoritma genetika adalah sebagai berikut (Kusumadewi S. , 2003)

1. Membangkitkan populasi awal secara acak.
2. Membentuk generasi baru dengan menggunakan proses seleksi, operasi *crossover* dan operasi mutasi secara berulang-ulang sehingga diperoleh kromosom yang cukup untuk membentuk generasi baru sebagai representasi dari solusi baru.
3. Mengevaluasi setiap populasi dengan menghitung nilai *fitness* setiap kromosom hingga pada generasi maksimal (MaxG) yang ditentukan. Bila belum mencapai generasi maksimal, maka akan dibentuk lagi generasi baru dengan mengulangi langkah 2.

Proses algoritma genetika diatas diilustrasikan pada gambar 2.6



Gambar 2.6 Diagram Alur Algoritma Genetika

2. Perancangan Algoritma Genetika

Rancangan algoritma genetika untuk optimisasi alokasi portofolio saham adalah dengan menentukan komponen-komponen dari algoritma genetik yaitu skema pengkodean, fungsi *fitness*, seleksi orang tua, pindah silang, mutasi, *elitisme* dan penggantian populasi.

a. Skema Pengkodean

Pada algoritma genetik, hal yang pertama dilakukan adalah menentukan skema pengkodean dalam bentuk kromosom untuk solusi dari permasalahan. Terdapat tiga skema yang paling umum digunakan dalam pengkodean yaitu (Suyanto, 2005)

1) Real-number encoding

Pada skema ini, nilai gen (g) berada dalam interval [0,R], dimana R adalah bilangan real positif dan biasanya R = 1. Dengan menggunakan suatu interval tertentu, batas bawah r_b dan batas atas r_a, pengkodean dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

$$X = r_b + (r_a - r_b)g \quad (2.42)$$

Contoh 2.18

Diberikan tiga variabel, yaitu X_1, X_2, X_3 yang dikodekan ke dari sebuah kromosom yang terdiri dari 3 gen sebagai berikut:

X_1	X_2	X_3
0.2390	1.0000	0.0131
g_1	g_2	g_3

Dengan menggunakan nilai batas interval [-1,2], maka hasil pendekodeannya adalah :

$$X_1 = -1 + \big(2 - (-1)\big) \times 0.2390 = -0.2830$$

$$X_2 = -1 + \big(2 - (-1)\big) \times 0.1000 = 2.000$$

$$X_3 = -1 + \big(2 - (-1)\big) \times 0.0131 = -0.9607$$

2) Discrete decimal encoding

Setiap gen bernilai salah satu bilangan bulat dalam interval [0,9]. Dengan menggunakan suatu interval tertentu, batas bawah r_b dan batas atas r_a, pengkodean dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

$$X = r_b + (r_a - r_b)(g_1 \times 10^{-1} + g_2 \times 10^{-2} + \cdots + g_N \times 10^{-N}) \quad (2.43)$$

Contoh 2.19

Diberikan tiga variabel, yaitu X_1, X_2, X_3 yang dikodekan ke dari sebuah kromosom yang terdiri dari 9 gen bilangan bulat dalam interval [0,9] (masing-masing variabel dikodekan ke dalam 3 gen) sebagai berikut:

X_1			X_2			X_3		
2	3	9	9	9	9	0	1	3
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9

Dengan menggunakan nilai batas interval [-1,2], maka hasil pendekodeannya adalah :

$$X_1 = -1 + \left(2 - (-1)\right) \times (0.2 + 0.03 + 0.009) = -0.2830$$

$$X_2 = -1 + \left(2 - (-1)\right) \times (0.9 + 0.09 + 0.009) = 1.9970$$

$$X_3 = -1 + \left(2 - (-1)\right) \times (0 + 0.01 + 0.003) = -0.9607$$

3) Binary encoding

Setiap gen hanya bisa bernilai 0 atau 1. Dengan menggunakan suatu interval tertentu, batas bawah r_b dan batas atas r_a, pengkodean dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

$$X = r_b + (r_a - r_b)(g_1 \times 2^{-1} + g_2 \times 2^{-2} + \cdots + g_N \times 2^{-N}) \qquad (2.44)$$

Contoh 2.20

Diberikan tiga variabel, yaitu X_1, X_2, X_3 yang dikodekan ke dari sebuah kromosom yang terdiri dari 9 gen yang bernilai 0 atau 1 (masing-masing variabel dikodekan ke dalam 3 gen) sebagai berikut:

X$_1$			X$_2$			X$_3$		
0	1	0	1	1	1	0	0	0
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9

Dengan menggunakan nilai batas interval [-1,2], maka hasil pendekodeannya adalah :

$$X_1 = -1 + \left(2 - (-1)\right) \times (0 + 0.25 + 0) = -0.250$$

$$X_2 = -1 + \left(2 - (-1)\right) \times (0.5 + 0.25 + 0.125) = 1.6250$$

$$X_3 = -1 + \left(2 - (-1)\right) \times (0 + 0 + 0) = -1$$

b. Membangkitkan populasi Awal

Membangkitkan populasi awal adalah membangkitkan sejumlah individu secara acak atau melalui prosedur tertentu. Ukuran populasi yang dibangkitkan bergantung pada masalah yang akan dipecahkan. Setelah ukuran populasi ditentukan, kemudian harus dilakukan inisialisasi terhadap kromosom yang terdapat pada populasi tersebut atau inisialisasi populasi. Inisialisasi populasi dilakukan secara acak namun demikian harus tetap memperhatikan domain solusi dan kendala permasalahan yang ada (Kusumadewi S. , 2003).

Terdapat berbagai teknik dalam pembangkitan populasi awal ini yaitu *random generator*, pendekatan tertentu dan permutasi gen. pada penelitian ini, pembangkitan populasi awal dengan menggunakan *random generator*. *Random generator* melibatkan pembangkitan bilangan *random* dalam interval (0,1) untuk nilai setiap gen sesuai dengan representasi kromosom yang digunakan.

c. Evaluasi nilai *fitness*

Evaluasi nilai *fitness* berfungsi untuk mengukur kualitas dari sebuah solusi dan memungkinkan tiap solusi untuk dibandingkan (Michalewicz, 1996). Suatu individu dievaluasi berdasarkan suatu fungsi *fitness* sebagai ukuran baik tidaknya individu tersebut. Di dalam evolusi alam, individu yang bernilai *fitness* tinggi yang akan bertahan hidup, sedangkan individu yang bernilai *fitness* rendah akan mati (Goldberg, 1989). Pada masalah optimasi, fungsi *fitness* yang digunakan adalah

$$f = \frac{1}{x} \tag{2.45}$$

Dengan x merupakan nilai dari individu, yang artinya semakin kecil nilai x, maka semakin besar nilai *fitness*nya. Tetapi hal ini akan menjadi masalah jika x bernilai 0, yang mengakibatkan f bisa bernilai tak hingga jika $x = 0$. Untuk mengatasinya, x perlu ditambahkan sebuah bilangan sangat kecil sehingga nilai *fitness*nya menjadi

$$f = \frac{1}{x+h} \tag{2.46}$$

Dengan h adalah bilangan yang dianggap sangat kecil.

d. Seleksi (*selection*)

Seleksi merupakan pemilihan dua buah Individu untuk dijadikan sebagai induk yang dilakukan secara proporsional sesuai dengan nilai *fitness*-nya (Michalewicz, 1996). Nilai *fitness* inilah yang digunakan pada tahap seleksi.

Terdapat beberapa metode seleksi menurut (Kusumadewi S. , 2003), yaitu *rank-based fitness assignment, roulette wheel selection, stochastic universal* *sampling*, seleksi lokal *(local selection)*, seleksi dengan pemotongan *(truncation selection)* dan seleksi dengan turnamen *(tournament selection)*. Pada penelitian ini menggunakan *roulette wheel selection*.

1) *Roulette Wheel Selection*

Metode seleksi ini merupakan metode yang sederhana, dan sering juga dikenal dengan nama *stochastic sampling with replacement*. Cara kerja metode ini adalah sebagai berikut (Kusumadewi S. , 2003).

a) Menghitung nilai *fitness* dari masing – masing individu (f_i, dimana i adalah individu ke – 1 s/d ke – n).

b) Menghitung total *fitness* semua individu dari persamaan (2.46)

c) Menghitung probabilitas setiap individu tersebut.

Dari nilai *fitness* setiap individu dihitung nilai total *fitness* semua individu. Probabilitas individu dicari dengan membagi nilai *fitness*-nya dengan nilai total *fitness* semua individu.

Dari persamaan (2.46) didapatkan

$$P[i] = \frac{f(i)}{\sum f(i)} \tag{2.47}$$

Dengan

$P[i]$: Probabilitas individu ke-i

$f(i)$: nilai *fitness* setiap individu ke-i, i=1,2,3,. . .,n.

d) Membangkitkan bilangan *random* berdasarkan banyaknya populasi pada suatu generasi.

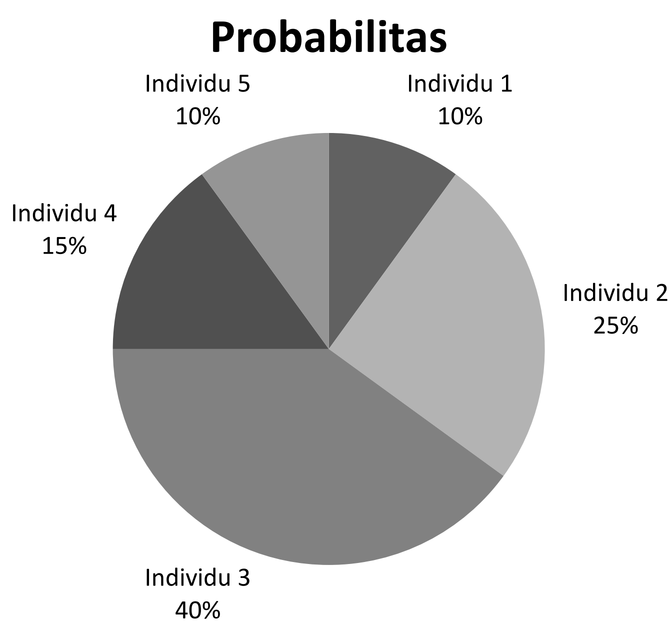
e) Menentukan individu yang terpilih sebagai induk berdasarkan letak bilangan *random* yang dihasilkan.

Contoh 2.21

seleksi dengan metode *roulette wheel selection*

Misalkan dalam satu populasi terdapat 5 individu dengan nilai *fitness* berturut-turut f(1) = 0.04, f(2) = 0.10, f(3) = 0.16, f(4) = 0.06, f(5) = 0.04, sehingga total semua nilai *fitness* adalah total = 0.4.

Probabilitas individu dihitung dari persamaan (2.46) sehingga didapatkan P[1]=0.10, P[2]=0.25, P[3]=0.40, P[4]=0.15, P[5]=0.10. Nilai *fitness* dari masing-masing kromosom ditempatkan dalam potongan lingkaran pada roda *roulette* secara proporsional seperti pada gambar 2.7 berikut.



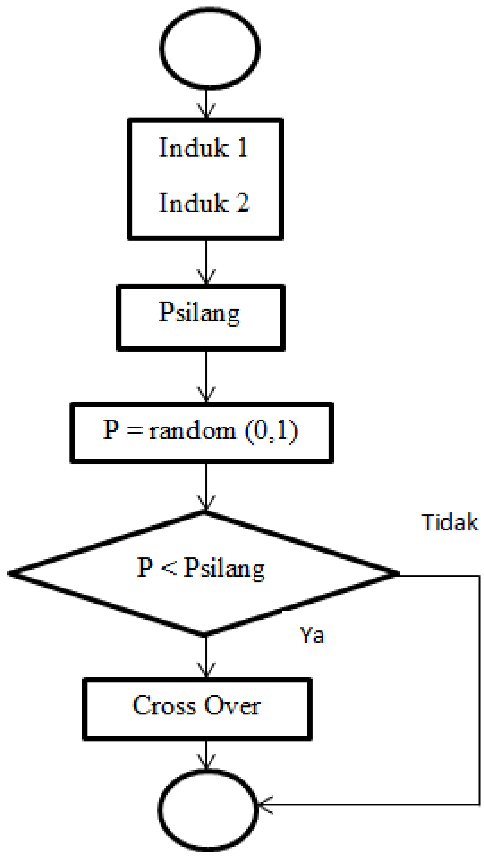
Gambar 2.7 *Roulette Wheel*

Individu yang memiliki nilai *fitness* lebih besar menempati potongan lingkaran yang lebih besar dibandingkan dengan individu bernilai *fitness* rendah. Langkah selanjutnya adalah mencari probabilitas kumulatif C[i] dari P[i] didapatkan C[1]=0.10, C[2]=0.35, C[3]=0.75, C[4]=0.90, C[5]=1. Dibangkitkan bilangan acak [0,1] untuk mendapatkan individu yang akan digunakan sebagai induk. Individu yang terpilih sebagai induk dapat diketahui sesuai letak bilangan acak yang dihasilkan dalam probabilitas kumulatif individu.

e. *Crossover* (Pindah Silang)

Crossover (Pindah silang) adalah operator dari algoritma genetika yang melibatkan dua induk untuk membentuk kromosom baru. Operasi ini tidak selalu dilakukan pada setiap individu induk yang ada, melainkan dilakukan berdasarkan probabilitas tertentu. C*rossover* dilakukan dengan Psilang (Probabilitas *Crossover*) antara 0,6 s/d 0,95. Jika pindah silang tidak dilakukan, maka nilai dari induk akan diturunkan kepada keturunan (Michalewicz, 1996).

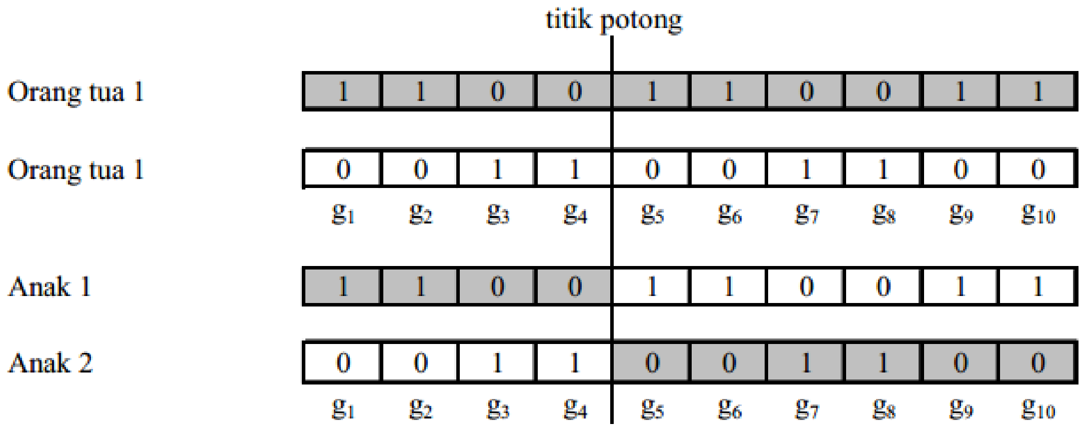
Prinsip dari pindah silang ini adalah melakukan operasi pertukaran pada gen yang bersesuaian dari induk untuk menghasilkan individu baru. Proses *crossover* dilakukan pada setiap individu dengan probabilitas *crossover* yang ditentukan. Secara skematis proses *crossover* seperti gambar 2.8



Gambar 2.8 Sistematika Proses *Crossover*

Dari gambar 2.8 jika bilangan p yang dibangkitkan secara acak kurang dari probabilitas *crossover* (Psilang), maka kedua induk dilakukan operasi *crossover*. Tetapi jika bilangan P yang dibangkitkan lebih dari atau sama dengan Psilang, maka tidak dilakukan operasi *crossover*.

Pindah silang bisa dilakukan dalam beberapa cara berbeda. Yang paling sederhana adalah pindah silang satu titik potong (*one-point crossover*). Suatu titik potong dipilih secara acak, kemudian bagian pertama dari orang tua 1 digabungkan dengan bagian kedua dari orang tua 2 (Suyanto, 2005) seperti pada gambar 2.9.



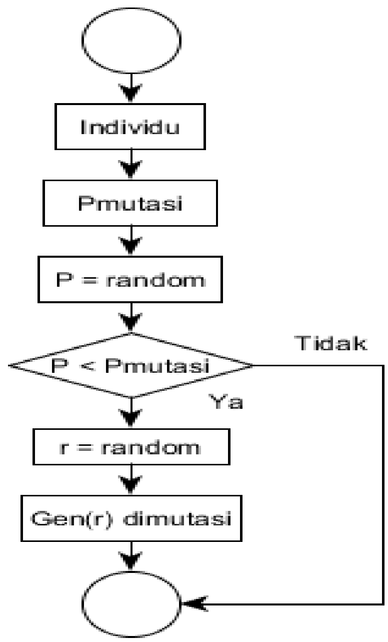
Gambar 2.9 Contoh Pindah Silang Satu Titik Potong

Untuk kromosom yang sangat panjang, misalnya 1000 gen, mungkin saja diperlukan beberapa titik potong. Pindah silang lebih dari satu titik potong disebut *n-point crossover*. Skema pindah silang yang lain adalah *uniform crossover*, yang merupakan kasus khusus dari n *point crossover* dimana n sama dengan jumlah gen dikurangi satu (Suyanto, 2005).

f. Mutasi (*Mutation*)

Mutasi merupakan proses untuk mengubah nilai dari satu atau beberapa gen dalam suatu kromosom. Operasi mutasi dilakukan pada anak hasil *crossover*. Operasi mutasi dilakukan pada kromosom dengan tujuan untuk memperoleh kromosom-kromosom baru sebagai kandidat solusi pada generasi mendatang dengan *fitness* yang lebih baik, dan lama-kelamaan menuju solusi optimum yang diinginkan. Akan tetapi, untuk mencapai hal ini, penekanan *selektif* juga memegang peranan yang penting.

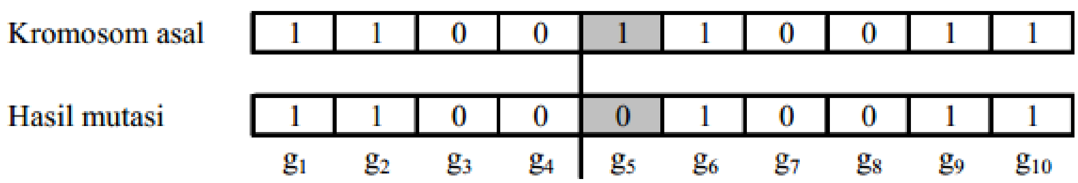
Jika dalam proses pemilihan kromosom-kromosom cenderung terus pada kromosom yang memiliki *fitness* yang tinggi saja, konvergensi prematur akan sangat mudah terjadi (Murniati, 2009). Secara skematis proses mutasi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.10 Sistematika Proses Mutasi

Dari gambar 2.10 di atas, jika P merupakan bilangan random yang dibangkitkan kurang dari probabilitas mutasi (Pmutasi) maka individu hasil *crossover* dilakukan proses mutasi. Sedangkan jika bilangan P yang dibangkitkan lebih dari atau sama dengan Pmutasi, maka individu hasil *crossover* tidak dilakukan proses mutasi. Probabilitas Mutasi (Pmutasi) Biasanya ditentukan sebagai 1/n, dimana n adalah jumlah gen dalam kromosom. Dengan probabilitas mutasi sebesar ini berarti mutasi hanya terjadi pada sekitar satu gen saja. Pada algoritma genetik sederhana, nilai Pmutasi tersebut adalah tetap selama evolusi (Suyanto, 2005).

Dari kromosom yang akan dimutasi dipilih gen yang akan dimutasi dengan cara memilih bilangan acak antara 1 sampai banyaknya gen dalam probabilitas tertentu kemudian ubah gen terpilih menjadi nilai kebalikannya (dalam *binary encoding*, 0 diubah 1, dan 1diubah 0) seperti pada gambar 2.11.



Gambar 2.11 Contoh Proses Mutasi

g. Elitism

Elitism merupakan proses untuk menjaga agar individu bernilai *fitness* tertinggi tersebut tidak hilang selama evolusi (Kusumadewi S. , 2003). Proses seleksi dilakukan secara *random* sehingga tidak ada jaminan bahwa suatu individu yang bernilai *fitness* tertinggi akan selalu terpilih. Walaupun individu bernilai *fitness* tertinggi terpilih, mungkin saja individu tersebut akan rusak (nilai *fitness*-nya menurun) karena proses pindah silang. Oleh karena itu, untuk menjaga agar individu bernilai *fitness* tertinggi tersebut tidak hilang selama evolusi, maka perlu dibuat satu atau lebih duplikatnya. Proses *Elitism* dilakukan dengan menduplikat individu dengan nilai *fitness* terbaik untuk dijadikan individu pertama pada generasi berikutnya.

h. Pembentukan Populasi Baru

Proses membangkitkan populasi baru bertujuan untuk membentuk populasi baru yang berbeda dengan populasi awal. Pembentukan populasi baru ini didasarkan pada keturunan-keturunan baru hasil operasi genetik ditambah dengan individu terbaik setelah dipertahankan dengan proses *elitism* dan menghapus kromosom yang mempunyai nilai *fitness* yang rendah.

Setelah populasi baru terbentuk, kemudian mengulangi langkah-langkah evaluasi nilai *fitness*, proses seleksi dengan *roulletewheel selection*, proses pindah silang, proses mutasi pada populasi baru untuk membentuk populasi baru selanjutnya.

G. Indeks Sharpe

Evaluasi kinerja portofolio merupakan bentuk dari proses penilaian hasil kerja portofolio. Evaluasi kinerja portofolio sebenarnya bertujuan untuk menilai apakah portofolio yang telah dibentuk memiliki kinerja yang baik dan sesuai dengan tujuan investasi. Kinerja portofolio dapat diukur dengan menggunakan 3 model pengukuran, yaitu model *sharpe*, *treynor* dan *jensen*. Model *sharpe* merupakan perhitungan yang mengukur tingkat risiko total (risiko portofolio). Risiko total adalah hasil penjumlahan dari risiko sistematis dan risiko tidak sistematis Berbeda dengan model *treynor* dan *jensen* yang hanya menggunakan perhitungan risiko sistematis saja untuk mengukur kinerja portofolio. Dalam perhitungan kinerja portofolio lebih baik menggunakan perhitungan secara total. Hal ini bertujuan agar investor mengetahui secara keseluruhan kekurangan dan kelebihan dari portofolio yang telah dibentuk. Jika penilaian kinerja portofolio hanya dilakukan dari satu sisi dirasa kurang maksimal, sehingga penilaian kinerja portofolio dievaluasi dari kedua sisi risiko (Sulistya, Handayani, & Hidayat, 2013)

Sharpe menyatakan kinerja portofolio dihitung dari selisih *return* portofolio dengan *return* bebas risiko dibagi risiko portofolio dengan diberi simbol *Sp*. Indeks kinerja *sharpe* dihitung dengan formula sebagai berikut (Adler, 2000)

$$S_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \tag{2.48}$$

Dalam portofolio yang tidak menggunakan saham bebas risiko, perhitungan kinerja portofolio *indeks sharpe* menjadi

$$S_p = \frac{R_p}{\sigma_p} \tag{2.49}$$

Dengan

S_p : *indeks sharpe*

R_p : *return* portofolio

σ_p : risiko portofolio