BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini dibahas tentang materi dasar yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada bab-bab berikutnya, yaitu peubah acak, distribusi normal, matriks, analisis multivariat, aturan bayes, turunan, *moving average*, investasi dan portofolio.

A. Peubah Acak

Persamaan matematika dinyatakan dalam bentuk nilai numerik bukan sebagai warna, macam-macam gambar, atau hal lainnya, sehingga lebih mudah untuk menentukan fungsi yang dikenal sebagai peubah acak. Peubah acak menghubungkan setiap hasil dalam percobaan dengan bilangan *real*. Definisi peubah acak dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Engelhardt & Bain, 1992)

Peubah acak (random variable) X adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S yang menghubungkan setiap anggota pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real. Peubah acak X dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$X(e) = x_e \tag{2.1}$$

dengan e adalah titik sampel $(e \in S)$ dan x adalah bilangan real yang menyatakan nilai fungsi dari kejadian-kejadian pada titik sampel e.

Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital misalnya X, Y dan Z, sedangkan nilai yang mungkin dari setiap hasil observasi pada ruang sampel dinotasikan dengan huruf kecil misalnya x, y dan z.

Contoh 2.1 (Papoulis, 1984)

Percobaan eksperimen pelantunan sebuah dadu, ditentukan pada keenam hasil e_i bilangan $X(e_i) = 10i$,

maka,

$X(e_1) = 10, X(e_2) = 20, \dots, X(e_6) = 60.$

Suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya disebut ruang sampel diskrit. Variabel-variabel yang memiliki nilai tertentu pada ruang sampel diskrit disebut peubah acak diskrit. Sedangkan, variabel yang dapat memiliki nilai-nilai pada suatu interval tertentu disebut peubah acak kontinu. Definisi peubah acak diskrit dan kontinu dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Engelhardt & Bain, 1992)

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$ maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \sum_x xf(x). \tag{2.2}$$

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2.3}$$

Nilai harapan peubah acak X sering disebut rataan (μ). Rataan tidak memberikan gambaran mengenai pancaran data, sehingga diperlukan besaran lain yang menggambarkan sebaran data. Besaran-besaran lain dapat meliputi varians dan kovarian. Varians adalah ukuran korelasi antara dua peubah acak yang sama. Definisi varians dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.3 (Engelhardt & Bain, 1992)

Varians dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]. \tag{2.4}$$

Notasi varians yang lain adalah σ^2, σ_x^2 atau $V(X)$. Standar deviasi dari X didefinisikan sebagai akar positif dari varians yaitu $\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var(X)}$.

Beberapa teorema varians dapat dilihat sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Engelhardt & Bain, 1992)

Jika X adalah peubah acak maka

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2. \tag{2.5}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2, \ karena\, \mu = E(X)\, maka \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

Teorema 2.2 (Engelhardt & Bain, 1992)

Jika X adalah peubah acak dan a, b adalah konstanta maka

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X). \tag{2.6}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 \\ &= E[(aX + b - aE(X) - b)^2], karena\, \mu_x = E(X) \\ &= E[a^2(X - \mu_x)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu_x)^2] \end{aligned}$$

$$= a^2 Var(X).$$

Selain varian, terdapat besaran lain yang disebut dengan kovarian. Kovarian adalah ukuran korelasi antara dua atau lebih peubah acak.

Definisi 2.4 (Bain & Eugelhardt, 1992)

Kovarians dari pasangan peubah acak X dan Y didefinisikan sebagai berikut:

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]. \quad (2.7)$$

Kovarians juga dapat dinotasikan dengan σ_{xy} .

Jika X dan Y peubah acak diskret maka

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \sum_x \sum_y (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f(x,y). \quad (2.8) \end{aligned}$$

Jika X dan Y peubah acak kontinu maka

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f(x,y) dxdy. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Jika X dan Y peubah acak, a, b konstanta maka berlaku sebagai berikut:

1. $Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X,Y)$
2. $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X,Y)$
3. $Cov(X, aX + b) = a\, Var(X)$
4. $Cov(X,Y) = 0,\ jika\ X\ dan\ Y\ independen.$

Keeratan hubungan antara variabel X dan Y disebut dengan koefisien korelasi. Semakin besar nilai koefisien korelasi maka hubungan variable X dan Y semakin erat. Definisi koefisien korelasi dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.5 (Bain & Eugelhardt, 1992)

Jika X dan Y peubah acak dengan varians σ_x^2 dan σ_y^2 dan kovarians $\sigma_{XY} = Cov(X, Y)$, maka koefisien korelasi dari X dan Y adalah sebagai berikut:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{2.10}$$

Peubah acak X dan Y dinyatakan tidak berkorelasi jika $\rho = 0$.

B. Distribusi Normal

1. Definisi Distribusi Normal

Distribusi normal dipublikasikan pertama kali oleh Abraham de Moivre pada tahun 1733. Distribusi normal merupakan salah satu distribusi yang penting dalam peluang dan statistik. Definisi distribusi normal dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Bain & Eugelhardt, 1992).

Variabel random X dikatakan berdistribusi normal yang dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan mean μ dan varians σ^2 mempunyai fungsi densitas probabilitas yaitu:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}} \tag{2.11}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

2. Uji Normalitas

Uji normalitas digunakan untuk melihat *return* saham berdistribusi normal atau tidak normal dalam hal investasi. Tujuan pengujian normalitas dalam *return* saham adalah untuk mengantisipasi penurunan harga saham yang sangat signifikan sehingga merugikan investor. Apabila *return* saham berdistribusi normal, maka saham tersebut akan diperhitungkan untuk dimasukkan ke dalam portofolio. Uji normalitas return saham dapat dilakukan dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* pada *software* bantuan SPSS sebagai berikut:

a. Hipotesis

H_0 : Data *return* saham diasumsikan berdistribusi normal.

H_1 : Data *return* saham tidak dapat diasumsikan berdistribusi normal.

b. Tingkat signifikansi α

c. Statistik uji

Kolmogorov-Smirnov $T = {}^{Sup}_{X}|F^*(X) - S(X)|$

$F^*(X)$ adalah distribusi kumulatif data sampel.

$S(X)$ adalah distribusi kumulatif yang dihipotesiskan.

d. Kriteria uji

H_0 ditolak jika *p-value KS* < α.

e. Perhitungan

f. Kesimpulan.

C. Matriks

Matriks ditemukan dalam sebuah studi yang dilakukan oleh seorang ilmuan yang berasal dari Inggris bernama Arthur Caylay (1821-1895). Studi yang dilakukan bertujuan untuk meneliti persamaan linier dan transformasi linier. Definisi matriks dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.7 (Anton, 2010).

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan riil. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dari matriks. Ukuran matriks dideskripsikan dengan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks. Entri yang terdapat pada baris i dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{A}$ dapat dinyatakan dengan a_{ij}. Secara umum bentuk matriks dengan ordo $m \times n$ yaitu:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dengan m menyatakan banyaknya baris dan n menyatakan banyaknya kolom.

1. Transpose Matriks

Transpose matriks merupakan jenis matriks yang diperoleh dengan cara mengubah setiap baris menjadi kolom pada suatu matriks. Definisi transpose matriks dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2. 8 (Anton, 2010)

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose $\boldsymbol{A}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}'$ yang merupakan matriks berukuran $n \times m$ dengan mengubah baris dari $\boldsymbol{A}$ menjadi kolom pada $\boldsymbol{A}'$. Transpose matriks $\boldsymbol{A}$ dapat dinyatakan dengan:

$$(A)_{m\times n} = (A')_{n\times m}. \quad (2.13)$$

Contoh 2.2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ maka, } A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Operasi Matriks

Dua buah matriks atau lebih bias disederhanakan menjadi satu matriks dengan suatu operasi. Operasi yang berlaku pada matriks adalah penjumlahan, pengurangan, dan perkalian.

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan dan pengurangan pada matriks merupakan operasi matriks yang dapat dioperasikan apabila matriks memiliki ordo yang sama, sehingga hasil operasi matriks juga akan memiliki ordo yang sama. Ordo pada suatu matriks adalah bilangan yang menunjukkan banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n). Definisi penjumlahan dan pengurangan pada matriks dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.9 (Pudjiastuti, 2006).

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika dan hanya jika kedua matriks tersebut berordo sama.

Proses penjumlahan atau pengurangan ini yang dijumlahkan atau dikurangkan adalah elemen-elemen dari matriks yang bersesuaian (seletak).

Contoh 2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $B - C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $C - D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. Perkalian Matriks

Perkalian matriks dibagi menjadi dua yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Perkalian matriks perlu memperhatikan banyaknya baris dan kolom. Definisi perkalian matriks dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.10 (Anton, 2010)

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah skalar, maka hasil kali (product) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c. Jika $A = [a_{ij}]$, maka perkalian matriks dengan skalar dinotasikan sebagai $c(A)_{ij} = (cA)_{ij} = [ca_{ij}]$.

Jika $A = [a_{ij}]$ *sebuah matriks berukuran* $m \times r$ *dan Jika* $B = [b_{jk}]$ *sebuah matriks berukuran* $r \times n$, *maka perkalian matriks A dan B yang dinyatakan oleh* $C = AB$ *didefinisikan dengan*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk}$$

dengan matriks C berukuran $m \times n$.

Contoh 2.4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

maka,

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.1 + (-1).2 + 4.(-1) \\ (-2).1 + 5.2 + (-3).(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

3. Minor dan Kofaktor Matriks

Determinan merupakan fungsi dari matriks bujursangkar, $n \times n$, ke bilangan real. Pendefinisian determinan menggunakan definisi kofaktor yang bersifat rekursif (definisi menggunakan dirinya sendiri). Definisi minor dan kofaktor dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2. 12 (Anton, 2010)

*Jika **A** merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan dengan M_{ij} yaitu determinan dari submatriks **A** yang didapat dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j. Nilai $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan dengan c_{ij} disebut kofaktor dari entri a_{ij}.*

Sehingga matriks kofaktor dari ***A*** dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Contoh 2.5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

maka minor dari entri a_{11} yaitu

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).3 - 2.2 = -7.$

Kofaktor dari entri a_{11} yaitu

$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1.-7 = -7.$

4. Determinan Matriks

Setelah terdefinisikannya minor dan kofaktor, maka determinan dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2. 11 (Anton, 2010)

Determinan matriks $\boldsymbol{A}$ *berukuran* $n \times n$ *dapat dihitung dengan mengalikan entri pada suatu baris ke-i atau kolom ke-j dengan masing-masing kofaktor dan menjumlahkan hasil perkalian tersebut. Determinan matriks* $\boldsymbol{A}$ *dinyatakan sebagai berikut:*

$$|A| = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}.c_{2j} + \cdots + a_{nj}.c_{nj}$$

atau

$$|A| = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}.c_{i2} + \cdots + a_{in}.c_{in}.$$

Contoh 2.6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

maka,

$$|A| \ = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2.[3.(-2) - 2.0] - 1.[(-1).(-2) - 2.2] - 3.[(-1).0 - 3.2]$$

$$= 2(-6) - 1(-2) - 3(-6)$$

$$= -12 + 2 + 18$$

$$= 8.$$

5. *Invers* Matriks

Invers matriks merupakan kebalikan suatu bilangan. Tidak semua matriks memiliki invers, hanya matriks persegi yang memiliki *invers*. Definisi *invers* matriks dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2. 13 (Anton, 2010)

Jika $\boldsymbol{A}$ *matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks* $\boldsymbol{B}$ *dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ *dengan* $\boldsymbol{I}$ *merupakan matriks identitas, maka* $\boldsymbol{A}$ *invertible (dapat dibalik) dan* $\boldsymbol{B}$ *adalah invers dari* $\boldsymbol{A}$. *Invers dari* $\boldsymbol{A}$ *dinotasikan dengan* $\boldsymbol{A^{-1}}$, *sehingga* $\boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{I}$ *dan* $\boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{I}$.

Jika matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ maka *invers* adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{A}|}[adj(A)] \tag{2.15}$$

dengan $adj(A)$ merupakan matriks adjoin dari A yaitu transpose dari matriks kofaktor A.

Contoh 2.7

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{adj\ A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{detA} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{matrix}\Bigg| = 3.1.2 + 1.1.6 + 0.2.2 - 6.1.0 - 2.1.3 - 2.2.1 = 2$$

maka,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A^{-1}} &= \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{A}|}[adj(A)] \\ &= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D. Analisis Multivariat

Analisis multivariat merupakan metode pengolahan variabel dalam jumlah yang banyak, dengan tujuannya adalah untuk mencari pengaruh variabel-variabel terhadap suatu objek secar simultan atau serentak. Definisi analisis statistik multivariat dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2. 14 (Johnson & Wichern, 2007)

Analisis statistik multivariat merupakan metode statistik untuk menganalisis hubungan antara lebih dari dua variabel secara bersamaan. Data sampel analisis multivariat secara umum dapat digambarkan dalam bentuk matriks dengan n objek dalam p variabel sebagai berikut:

	Variabel 1	*Variabel 2*	$\cdots$	*Variabel k*	$\cdots$	*Variabel p*
Objek 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1p}
Objek 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek j	x_{j1}	x_{j2}	$\cdots$	x_{jk}	$\cdots$	x_{jp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Objek n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nk}	$\cdots$	x_{np}

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks X dengan n baris dan p kolom berikut:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}.$$

1. Distribusi Normal Multivariat

Distribusi normal multivariat merupakan pengembangan dari distribusi normal. Distribusi normal multivariat digunakan untuk mengetahui apakah data berdistribusi normal atau tidak. Definisi distribusi normal multivariat dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2. 15 (Johnson & Wichern, 2007)

Fungsi distribusi normal multivariat merupakan perluasan dari fungsi distribusi univariat normal untuk $p \geq 2$. *Jika* $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *adalah p-variat multivariat normal dengan rata-rata* μ *dan varians-kovarians matriks* $\boldsymbol{\Sigma}$*, dengan:*

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

maka fungsi densitas multivariat normal adalah

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}((X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu))} \tag{2.16}$$

dengan $-\infty < X_i < \infty\,, i = 1,2, \dots, p$.

2. Vektor *Random* dan Matriks *Random*

Vektor *random* merupakan perluasan dari variabel *random*, sedangkan matriks *random* merupakan matriks yang elemen-elemennya berisi variabel *random*. Definisi vektor *random* dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2. 16 (Johnson & Wichern, 2007)

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya berupa variabel random.

Jika suatu unit eksperimen hanya memiliki satu variabel terukur maka variabel terukur disebut variabel *random*, sedangkan jika terdapat lebih dari satu variabel terukur, misalkan n variabel maka variabel-variabel tersebut disebut vektor *random* dengan n komponen. Sedangkan matriks *random* adalah matriks yang mempunyai elemen variabel *random*.

3. *Mean* dan Kovarian Vektor *Random*

Dimisalkan $\boldsymbol{X}$ adalah variabel *random* dengan *mean* $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$. *Mean* vektor *random* $\boldsymbol{X}$ dengan ordo $p \times 1$ dapat dinyatakan dengan:

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \qquad (2.17)$$

sedangkan kovarians vektor *random* $\boldsymbol{X}$ dengan ordo $p \times 1$ adalah

$$\begin{aligned} \Sigma &= E(X-\mu)(X-\mu)' \\ &= E\left(\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \\ \vdots \\ X_p-\mu_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1-\mu_1 & X_2-\mu_2 & \dots & X_p-\mu_p \end{pmatrix}\right) \\ &= \end{aligned}$$

$$E\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan, $\sum = Cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$ (2.18)

dengan σ_{ij} yaitu kovarian dari X_i dan X_j, $i = 1,2,\dots,p$ dan $i = 1,2,\dots,p$.

Kovarian untuk sampel dinyatakan, $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$ (2.19)

dengan s_{ij} yaitu kovarian dari $\widehat{X_i}$ dan $\widehat{X_j}$, $i = 1,2,\dots,p$ dan $i = 1,2,\dots,p$.

E. Aturan Bayes

1. Konsep Probabilitas

Probabilitas adalah ukuran kemungkinan yang dapat terjadi dalam suatu peristiwa tertentu. Suatu percobaan mempunyai ruang sampel S dan kejadian-kejadian $A_1, A_2, \dots$ yang mungkin terjadi, $P(A)$ dalam selang [0,1] disebut probabilitas dari A dan $P(S) = 1$.

Probabilitas terjadinya suatu kejadian A bila diketahui bahwa kejadian C telah terjadi disebut probabilitas bersyarat dan dinyatakan sebagai berikut:

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}. \tag{2.20}$$

Lambang $P(A|C)$ biasanya dibaca “probabilitas A terjadi bila diketahui C terjadi” atau lebih sederhana lagi “probabilitas A, bila C diketahui”.

2. Probabilitas Total dan Aturan Bayes

Misalkan kejadian-kejadian $C_1, C_2, \ldots, C_n$ saling asing sehingga $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$. Probabilitas total dari kejadian A dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots + P(A|C_n)P(C_n).$$

Misalkan kejadian-kejadian $C_1, C_2, \ldots, C_n$ saling asing sehingga $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$. Peluang bersyarat dari C_1 dengan kejadian A telah diketahui, aturan bayes dapat dinyatakan sebagai berikut (Dekking, 2005):

$$P(C_1|A) = \frac{P(A|C_1)P(C_1)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots + P(A|C_n)P(C_n)}$$

atau secara sederhana

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{P(A)}. \qquad (2.21)$$

F. Turunan

1. Turunan Parsial

Turunan parsial sebuah fungsi peubah banyak adalah turunan terhadap salah satu peubah atau variabel dengan peubah lainnya konstan.

Definisi 2.17 (Varberg & Purchell, 2001)

Bila $z = f(x, y)$ terdefinisi dalam domain D dibidang XY, sedangkan turunan pertama f terhadap x dan y di setiap titik (x, y) ada, maka:

Turunan pertama f di x (selain x dianggap konstan) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Turunan pertama f di y (selain y dianggap konstan) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

atau dapat dinotasikan dengan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y).$$

2. Aturan Rantai

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ merupakan fungsi komposif $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x sehingga $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ yakni $D_x y = D_u y. D_x u$ (Varberg & Purchell, 2001).

Contoh 2.8

Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, tentukan $D_x y$.

Misalkan $y = u^{60}$ dan $u = 2x^2 - 4x + 1$

maka, $D_x y \quad = D_u y. D_x u$

$\qquad\qquad = (60u^{59})(4x - 4)$

$$= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4).$$

G. *Moving Average*

Metode *simple average* adalah metode peramalan yang dilakukan dengan menggunakan rata-rata dari semua data pengamatan sebagai ramalan untuk periode selanjutnya. Namun jika seorang pengamat ingin menggunakan data terbaru saja, maka dapat ditentukan suatu data sebagai titik awal pengamatan dan nilai rata-rata dihitung dimulai dari data tersebut. *Moving average* dapat menentukan nilai pengamatan terbaru, yaitu dengan mengambil data-data terbaru dan menghitung rata-ratanya. *Moving average* ini digunakan untuk meramalkan pengamatan periode selanjutnya. Istilah *moving average* digunakan karena setiap data observasi baru tersedia, maka angka rata-rata yang baru dihitung dan dipergunakan sebagi ramalan. Berikut adalah persamaan *moving average*:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \cdots + Y_{t-k-1}}{k} \qquad (2.22)$$

dengan,

$\hat{Y}_{t+1}$: nilai peramalan untuk periode t + 1

Y_t : nilai aktual pada periode t

k : jumlah batas dalam *moving average*

Moving average untuk periode waktu t adalah rata-rata aritmatika dari k pengamatan terbaru (J. E. Hanke, 2005).

H. Investasi

1. Tahap Pengambilan Keputusan Investasi

Investasi merupakan komitmen atas sejumlah dana dan sumber daya lain yang dilakukan saat ini dengan tujuan agar dapat memperoleh keuntungan dimasa mendatang dengan tujuan untuk meningkatkan kesejahteraan investor. Proses investasi menunjukkan bagaimana seharusnya seorang investor membuat keputusan investasi pada efek-efek yang dapat dipasarkan dan kapan dilakukan (Husnan, 2003). Proses pengambilan keputusan investasi merupakan proses yang berkesinambungan (*On Going Process*). Proses tersebut diperlukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

a. Penentuan tujuan investasi

   Tahap pertama dalam proses keputusan investasi adalah menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investasi untuk masing-masing investor bisa berbeda tergantung pada investor yang membuat keputusan tersebut.

b. Penentuan kebijakan investasi

   Tahap penentuan kebijakan investasi dilakukan dengan penentuan keputusan alokasi sekuritas. Keputusan ini menyangkut pendistribusian dana yang dimiliki pada berbagai kelas sekuritas yang tersedia (saham, obligasi, bangunan maupun sekuritas luar negeri).

c. Pemilihan strategi portofolio

   Strategi portofolio yang bisa dipilih yaitu strategi portofolio aktif dan strategi portofolio pasif. Strategi portofolio aktif meliputi kegiatan penggunaan informasi yang tersedia untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik.

Strategi portofolio pasif meliputi aktivitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja indeks pasar. Asumsi strategi pasif yaitu semua informasi yang tersedia akan diserap pasar dan direfleksikan pada harga saham.

d. Pemilihan aset

Pemilihan aset yang dilakukan untuk membentuk suatu portofolio. Tahap ini memerlukan pengukuran kinerja setiap sekuritas yang ingin dimasukkan dalam portofolio yang efisien, yaitu portofolio yang menawarkan *expected return* yang tertinggi dengan tingkat risiko tertentu atau sebaliknya menawarkan *expected return* tertentu dengan tingkat risiko rendah.

e. Pengukuran dan evaluasi kinerja portofolio

Tahap pengukuran dan evaluasi kinerja portofolio ini meliputi pengukuran kinerja portofolio dan membandingkan hasil pengukuran tersebut dengan kinerja portofolio lainnya. Proses ini biasanya dilakukan terhadap indeks portofolio pasar untuk mengetahui seberapa baik kinerja portofolio yang telah ditentukan dibanding kinerja portofolio lainnya (portofolio pasar).

2. Saham

Saham merupakan secarik kertas yang menunjukkan hak pemodal (yaitu pihak yang memiliki kertas tersebut) untuk memperoleh bagian dari prospek atau kekayaan organisasi yang menerbitkan sekuritas tersebut dan berbagai kondisi yang memungkinkan pemodal tersebut menjalankan haknya. Saham adalah salah satu di antara beberapa alternatif yang dapat dipilih untuk berinvestasi.

Saham dapat digunakan untuk mencapai tiga tujuan investasi utama sebagaimana yang dikemukakan oleh Kertonegoro (2000) yaitu:

1. Sebagai gudang nilai, berarti investor mengutamakan keamanan prinsipal, sehingga akan dicari saham *blue chips* dan saham *non-spekulatif* lainnya.
2. Untuk pemupukan modal, berarti investor mengutamakan investasi jangka panjang, sehingga para investor akan mencari saham pertumbuhan untuk memperoleh *capital gain* atau saham sumber penghasilan untuk mendapat *dividen.*
3. Sebagai sumber penghasilan, berarti investor mengandalkan pada penerimaan *dividen* sehingga para investor akan mencari saham yang bermutu baik yaitu saham yang mempunyai tingkat pengembalian yang tinggi dan konsisten dalam membayar *dividen*.

3. Indeks LQ-45

Indeks *Liquid Quality-45* (LQ-45) terdiri dari 45 saham yang telah terpilih memiliki likuiditas dan kapitalisasi pasar yang tinggi dan di*review* setiap 6 bulan pada awal Februari dan Agustus. Menurut (Tandelilin E. , 2010) saham-saham pada indeks LQ-45 harus memenuhi kriteria sebagai berikut:

a. Masuk dalam urutan 60 terbesar dari total transaksi saham di pasar regular (rata-rata nilai transaksi selama 12 bulan terakhir).
b. Masuk dalam urutan 60 terbesar berdasarkan kapitalisasi pasar di pasar regular (rata-rata nilai kapitalisasi pasar selama 12 bulan terakhir).
c. Telah tercatat di BEI selama paling sedikit 3 bulan.

Jika saham tidak memenuhi kriteria tersebut pada saat *review* maka saham tersebut akan dikeluarkan dari perhitungan indeks dan diganti dengan saham lainnya yang memenuhi kriteria.

I. Portofolio

1. Pengertian Portofolio

Portofolio dapat diartikan sebagai sekumpulan investasi, bisa berupa saham, emas, properti, deposito, atau instrumen lainnya. Portofolio saham adalah kumpulan aset investasi berupa saham baik yang dimiliki perorangan atau perusahaan. Tujuan dari pembentukan portofolio adalah untuk mendiversifikasi dana yang dimiliki investor pada beberapa sekuritas dengan harapan dapat memaksimalkan *return* dengan tingkat risiko yang minimal (Husnan, 2003).

a. *Return* Portofolio

Return adalah hasil yang diperoleh dari suatu investasi. Hubungan positif antara *return* dan risiko portofolio dalam berinvestasi dikenal dengan *high risk – high return*, yang artinya semakin besar risiko yang diambil, maka semakin besar pula *return* yang diperoleh. Hal ini dimaksudkan bahwa harus ada pertambahan *return* sebagai kompensasi dari pertambahan risiko yang ditanggung oleh investor.

Return dapat berupa *realized return* yang sudah terjadi atau *expected return* yang belum terjadi dan diharapkan akan diperoleh pada masa mendatang (Hartono, 2003).

Realized return portofolio dapat dirumuskan:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i . R_i . \qquad (2.23)$$

Keterangan:

R_p : *realized return* portofolio

w_i : bobot dana investor pada sekuritas ke-i

R_i : *realized return* dari sekuritas ke-i

n : banyaknya sekuritas

Return suatu sekuritas dapat dihitung menggunakan rumus:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (2.24)$$

Keterangan:

P_t : harga sekuritas pada periode ke-t

P_{t-1} : harga sekuritas pada periode ke-$(t-1)$

Return saham sekuritas untuk sampel dinyatakan dengan rumus:

$$R_t = \frac{\overline{P_t}}{\overline{P_{t-1}}} - 1 = \frac{\overline{P_t} - \overline{P_{t-1}}}{\overline{P_{t-1}}}. \quad (2.25)$$

Sedangkan *expected return* portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari *expected return* masing-masing sekuritas dalam portofolio. *Expected return* portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} (w_i . E(R_i)). \quad (2.26)$$

Keterangan:

$E(R_p)$: *expected return* dari portofolio

w_i : proporsi dana investor pada sekuritas ke-i

$E(R_i)$: *expected return* dari sekuritas ke-i

n : banyaknya sekuritas

Nilai *expected return* pada persamaan (2.30) secara matematis dapat dibentuk dalam matriks adalah sebagai berikut:

$$E(R_p) = w_1.(E(R_1)) + w_2.(E(R_2)) + \cdots + w_n.(E(R_n))$$

$$= [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n] \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix}$$

$$= W'E(R). \qquad (2.27)$$

Keterangan:

W : matriks bobot tiap sekuritas dalam portofolio

$E(R)$: matriks *expected return* tiap sekuritas dalam portofolio.

b. Risiko Portofolio

Risiko dalam portofolio dapat diartikan sebagai tingkat kerugian tidak terduga yang besarnya tergantung pada portofolio yang dibentuk. Risiko portofolio dapat diukur dengan besarnya varians dari nilai *return* saham-saham yang ada di dalam portofolio (Hartono, 2003). Jika semakin besar nilai varians maka risiko yang ditanggung semakin tinggi. Banyaknya sekuritas dalam suatu portofolio dapat mempengaruhi nilai varians dari risiko. Untuk membentuk suatu portofolio diperlukan minimal dua sekuritas. Varians dengan dua sekuritas adalah sebagai berikut (Hartono, 2003):

$$Var\,(R_P) = \sigma_P^2$$

$$= E\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1 + w_2R_2)]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1) - E(w_2R_2)]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - w_1E(R_1) - w_2E(R_2)]^2$$

$$= E\left[w_1\left(R_1 - E(R_1)\right) + w_2\left(R_2 - E(R_2)\right)\right]^2$$

$$= E\left[w_1^2\left(R_1 - E(R_1)\right)^2 + 2w_1w_2\left(R_1 - E(R_1)\right)\left(R_2 - E(R_2)\right) + w_2^2\left(R_2 - E(R_2)\right)^2\right]$$

$$= w_1^2E\left(\left(R_1 - E(R_1)\right)^2\right) + 2w_1w_2E\left(\left(R_1 - E(R_1)\right)\left(R_2 - E(R_2)\right)\right) + w_2^2E\left(\left(R_2 - E(R_2)\right)^2\right)$$

$$= w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2. \tag{2.28}$$

Varians dengan 3 sekuritas adalah sebagai berikut:

$$Var\ (R_P) = \sigma_P^2$$

$$= E\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3) - E(w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3)]^2$$

$$= [w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2] + [2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}]. \tag{2.29}$$

Selanjutnya varians dengan n sekuritas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_P^2 = [w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + \cdots + w_n^2\sigma_n^2] + \big[2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + \ldots + 2w_1w_n\sigma_{1n} + 2w_2w_3\sigma_{23} + \cdots + 2w_2w_n\sigma_{2n} + \cdots + 2w_{n-1}w_n\sigma_{n-1,n}\big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_1^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_iw_j\sigma_{ij} \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\sigma_P^2 = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}$$

$$= W'\Sigma W. \tag{2.31}$$

Keterangan:

Σ : matriks varians kovarian $n \times n$

W : matriks bobot tiap sekuritas $n \times 1$

Risiko portofolio dihitung menggunakan rumus standar deviasi yang merupakan akar positif dari varians sebagai berikut:

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}. \tag{2.32}$$

Risiko portofolio dapat dihitung dengan mensubstitusikan persamaan (2.31) pada rumus standar deviasi (2.32) sebagai berikut:

$$\sigma_P = \sqrt{W'\Sigma W}. \tag{2.33}$$

dengan σ_P merupakan standar deviasi dari return portofolio.

2. Model Portofolio

a. Model Mean-Variance Markowitz

Harry Markowitz memperkenalkan model tentang pemilihan portofolio optimal pada tahun 1952 yang dikenal dengan model *mean-variance* Markowitz (Markowitz, 1952). Model *mean-variance* Markowitz menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut (Hartono, 2003):

1) Waktu yang digunakan hanya satu periode.
2) Tidak ada biaya transaksi.
3) Preferensi investor hanya didasarkan pada return ekspektasi dan risiko dari portofolio.
4) Tidak ada pinjaman dan simpanan bebas risiko.

Berdasarkan asumsi diatas, maka portofolio optimal menggunakan model *mean-variance* Markowitz dapat dilakukan dengan mengoptimalkan portofolio efisien dengan preferensi investor yang dirumuskan dalam bentuk sebagai berikut:

a) Meminimumkan risiko dengan tingkat *return* tertentu

$$Min\ Var\ (R_P) = W'\Sigma W \text{ dengan } W'\mu = \mu \tag{2.34}$$

b) Memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu

$$Maks\ E(R_P) = W'\mu \text{ dengan } W'\Sigma W = \sigma^2 \tag{2.35}$$

Bobot untuk masing-masing sekuritas dapat dinyatakan dengan $\boldsymbol{W} = [w_1\ \dots\ w_n]'$ dan $\boldsymbol{\mu}$ merupakan matriks *expected return* masing-masing sekuritas $n \times 1$.

Optimasi untuk memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu dengan diberikan variansi atau risiko maka akan dicari pembobotan W_m sehingga portofolio yang dibentuk menghasilkan return yang maksimal dengan batasan $W'\Sigma W = \sigma^2$. Permasalahan optimisasi dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi Lagrange L dan faktor pengali Lagrange λ dengan satu batasan sebagai berikut:

$$L = W'\mu - \lambda(W'\Sigma W - \sigma^2). \qquad (2.36)$$

Persamaan (2.36) diturunkan terhadap W sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial\left(W'\mu - \lambda(W'\Sigma W - \sigma^2)\right)}{\partial W}$$

$$= \mu - 2\lambda\Sigma W. \qquad (2.37)$$

Optimasi harus memenuhi syarat $\frac{\partial L}{\partial W} = 0$ sehingga:

$$\mu - 2\lambda\Sigma W = 0$$

$\mu - 2\lambda\Sigma W = 0$, dengan $\lambda = \frac{\delta}{2}$

maka $\mu - \delta\Sigma W = 0$ (2.38)

sehingga diperoleh $W = (\delta\Sigma)^{-1}\mu$.

Parameter δ merupakan koefisien *risk aversion* (He & Litterman, 1999).

Rumus bobot portofolio model *mean-variance* Markowitz untuk masing-masing sekuritas dalam pasar berdasarkan rumus (2.38) adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{W_m} = (\boldsymbol{\delta}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\mu} \qquad (2.39)$$

dengan $\boldsymbol{W_m}$ yaitu matriks bobot masing-masing sekuritas dengan model portofolio Markowitz.

b. Capital Assets Pricing Model (CAPM)

Capital Assets Pricing Model *(CAPM)* diperkenalkan pertama kali oleh William Sharpe, John Lintner, dan Jan Mossin antara tahun (1964-1966). *CAPM* merupakan suatu model yang bertujuan untuk memprediksi hubungan antar risiko dengan *return* yang diharapkan dari suatu sekuritas. Untuk memahami model *CAPM*, maka harus memahami asumsi-asumsi yang melandasi model ini walaupun dianggap tidak realistis. Oleh karena itu ada beberapa penyederhanaan asumsi supaya model *CAPM* lebih realistis. Berikut adalah hasil penyederhanaan asumsi-asumsi *CAPM* menurut Jogiyanto Hartono (2003):

1) Semua investor mempunyai waktu satu periode yang sama.
2) Semua investor melakukan pengambilan keputusan investasi berdasarkan pertimbangan antara nilai *expected return* dan deviasi standar *return* dari portofolio.
3) Semua investor mempunyai harapan yang seragam (*homogeneous expectation*) terhadap fakto-faktor input yang digunakan untuk keputusan portofolio. Faktor-faktor input yang digunakan adalan *expected return*, varian dari *return* dan kovarian antara *return-return* sekuritas.
4) Semua investor dapat meminjamkan sejumlah dananya atau meminjam sejumlah dana dengan jumlah yang terbatas pada tingkat suku bunga bebas risiko.

5) Penjualan pendek (*short sale*) diijinkan. Investor individual dapat menjual pendek berapapun yang dikehendaki.

6) Semua aktiva dapat dipecah-pecah menjadi bagian yang lebih kecil dengan tidak terbatas.

7) Semua aktiva dapat dijual dan dibeli di pasar dengan cepat (likuid) dengan harga yang berlaku.

8) Tidak ada biaya transaksi.

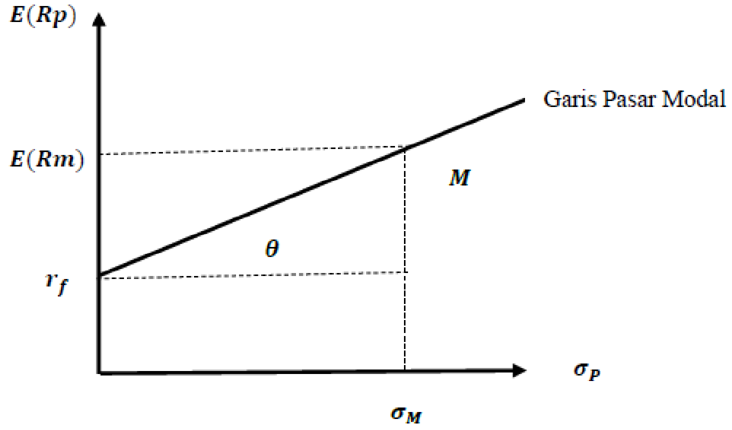
9) Tidak terjadi inflasi.

10) Tidak ada pajak pendapat pribadi.

11) Investor adalah penerima harga.

12) Pasar modal dalam kondisi ekuilibrium.

Jika semua asumsi tersebut dipenuhi, maka akan terbentuk kondisi pasar yang ekuilibrium. Ekuilibrium pasar terjadi jika harga-harga dari aktiva berada di suatu tingkat yang tidak daoat memberikan insentif lagi untuk melakukan perdagangan spekulatif. Keadaan ekuilibrium pasar yang dapat menyangkut *return* ekspetasi dan risiko dapat digambarkan oleh Garis Pasar Modal (GPM) atau *Capital Market Line (CML)*. Hubungan *expected return* dan risiko dalam keadaan ekuilibrium pasar dapat dilihat pada gambar 2.1.



Gambar 2. 1 *Capital Market Line*

Slope dalam *Capital Market Line (CML)* disimbolkan θ merupakan harga pasar dari risiko untuk portofolio. Besarnya *slope CML* mengindikasikan tambahan *return* yang disyaratkan pasar untuk setiap 1% kenaikan risiko portofolio. *Slope CML* dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\theta = \frac{E(R_M)-r_f}{\sigma_M}. \qquad (2.40)$$

Perubahan θ yang semakin kecil mengakibatkan risiko portofolio semakin besar dan sebaliknya. *Capital Market Line* (*CML*) menunjukan semua kemungkinan kombinasi portofolio efisien yang terdiri sekuritas-sekuritas berisiko dan sekuritas bebas risiko (Hartono, 2003). *Capital Market Line* (*CML*) terbentuk sepanjang titik *expected return* sekuritas bebas risiko r_f sampai titik M. *Expected return* sekuritas bebas risiko didekati dengan tingkat *return* suku bunga Bank sentral, di Indonesia umumnya diambil dari tingkat *return* suku bunga Bank Indonesia. Portofolio *CAPM* diharapkan memberikan keuntungan lebih besar dibandingkan sekuritas yang di investasikan pada Bank. *Expected return* dalam portofolio *CAPM* berdasarkan Gambar 2. 1 dapat dirumuskan dengan:

$$E(R_P) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_P. \tag{2.41}$$

Keterangan:

$E(R_P)$: *expected return* portofolio

r_f : *return* sekuritas bebas risiko

$E(R_M)$: *expected return* portofolio pasar

σ_M : standar deviasi dari *return* portofolio pasar

σ_P : standar deviasi dari *return* portofolio.

Persamaan (2.41) menggambarkan hubungan antara risiko dan *return* pada pasar yang seimbang untuk portofolio-portofolio yang efisien, sedangkan untuk menggambarkan hubungan risiko dan *return* dari sekuritas-sekuritas individual dapat dilihat dari kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar. Kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar tergantung dari besarnya kovarians *return* sekuritas tersebut terhadap portofolio pasar. Besarnya kontribusi risiko sekuritas terhadap risiko portofolio pasar yaitu:

$$\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M}$$

dengan $\sigma_{i,M}$ adalah kovarians dari sekuritas ke-i dengan portofolio pasar. Mensubstitusikan kontribusi sekuritas ke-i terhadap risiko portofolio pasar pada persamaan (2.41), maka dapat dihitung *expected return CAPM* untuk sekuritas *ke-i* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(r_i) &= r_f + \frac{E(R_M)-r_f}{\sigma_M} . \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \\ &= r_f + \frac{E(R_M)-r_f}{\sigma_M{}^2} . \sigma_{i,M} \\ &= r_f + \beta_i \left[E(R_M) - r_f \right] \end{aligned} \qquad (2.42)$$

dengan $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M{}^2} = \frac{Cov(R_i,R_M)}{Var(R_M)}$ sebagai pengukur tingkat risiko dari suatu sekuritas terhadap risiko portofolio pasar dan $E(r_i)$ sebagai *expected return* CAPM masing-masing sekuritas. *Expected return CAPM* untuk suatu sekuritas dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \left\lfloor E(R_M) - r_f \right\rfloor. \qquad (2.43)$$

Pasar dalam model ini yaitu Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) yang merupakan penggambaran secara keseluruhan keadaan harga-harga saham. Indeks harga saham gabungan (IHSG) disebut juga *Jakarta Composite Index (JCI)* yang merupakan salah satu indeks pasar saham yang digunakan oleh Bursa Efek Indonesia (BEI).

c. Portofolio Model Black-Litterman

1) Pengertian Black-Litterman

Model Black-Litterman diperkenalkan oleh Fischer Black dan Robert Litterman di Goldman Sachs pada tahun 1990. Model ini menggabungkan dua jenis informasi yaitu *return* ekuilibrium dari *CAPM* dan *expected return views* investor yang merupakan titik acuan dari model Black-Litterman (He & Litterman, 1999). Satchell & Scowcroft (2000) menjelaskan mengenai pendekatan Bayes untuk menyelesaikan kombinasi distribusi probabilitas model Black-Litterman. Model Black-Litterman dengan pendekatan Bayes menggunakan *views* investor (*views*) sebagai informasi prior dan informasi pasar sebagai data sampel yang kemudian dikombinasikan untuk membentuk data baru (data posterior).

Views model Black-Litterman digunakan untuk menyesuaikan *expected return* ekuilibrium dalam memprediksi *return* di masa yang akan datang. Manajer investasi dapat menyatakan opininya yang berbeda dengan kondisi ekuilibrium, informasi yang berbeda ini mungkin karena berkaitan dengan *expected return* suatu sekuritas apakah akan meningkat atau turun berdasarkan *views* investor terhadap keadaan pasar, perekonomian ataupun isu-isu politik dan kenegaraan yang mungkin mempengaruhi pergerakan sekuritas di pasar.

2) *Views* Investor

Seorang investor dapat memiliki *views* hanya untuk sejumlah k saham dari d saham yang terdapat dalam portofolio, dengan kata lain investor tidak perlu menyatakan pandangannya pada setiap saham yang dimasukkan ke portofolio namun cukup pada sejumlah saham yang menjadi perhatian investor. Investor dapat menyatakan prediksinya mengenai *return* yang akan diperoleh untuk masing-masing saham pada masa mendatang dengan melihat plot pergerakan data harga dan data *return* masing-masing saham pada beberapa periode sebelumnya. Investor dapat menyatakan pandangannya dengan *views* relatif (*relative vi*ews) maupun *views* pasti (*absolute views*).

a) *Views* Pasti (*Absolute Views*)

Views pasti terbentuk apabila seorang investor memberikan prediksinya terhadap dua buah saham, maka investor tersebut akan mengungkapkan *views* dengan yakin terhadap besarnya *return* yang akan diberikan oleh masing-masing saham.

Contoh 2.9

Views 1 : “Saya prediksikan *return* saham A akan meningkat sebesar 2%”.

Views 2 : “Saya prediksikan *return* saham B akan meningkat sebesar 3%”.

b) *Views* Relatif (*Relative Views*)

Ketika seorang investor diminta untuk memberikan *views* tentang dua buah saham atau lebih, kemudian investor tersebut melakukan perbandingan antara *return* yang akan diberikan kedua saham tersebut, maka terbentuklah *views* relatif atau *relative views*.

Contoh 2.10

“Saya prediksikan bahwa *return* saham A akan melebihi *return* saham B sebesar 2%”.

“Saya prediksikan bahwa *return* saham A dan B akan melebihi *return* saham C dan D sebesar 2%”.

Penerapan contoh *views* untuk 4 saham yang akan dibentuk menjadi 3 *views* sebagai berikut:

Suatu portofolio terbentuk dari 4 saham, yaitu saham A, B, C dan D. Investor dapat menyatakan *views* terhadap keempat saham tersebut maupun hanya pada beberapa saham yang menjadi perhatian investor. Pada contoh ini, investor hanya menyatakan keempat saham tersebut dalam 3 *views* sebagai berikut:

Views 1: “Saya yakin saham B akan memberikan *return* 2% melampaui saham A”.

Views 2: “Saya yakin saham C akan memberikan *return* 4%”.

Views 3: “Saya yakin saham D akan memberikan *return* 0,5%”.

Jika $E(r)$ adalah estimasi *return* investor dengan 4 saham, yaitu A , B , C dan D, maka ketiga *views* investor tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$E(r_b) - E(r_a) = 0{,}02$$

$$E(r_c) = 0{,}04$$

$$E(r_d) = 0{,}005.$$

Estimasi *return* investor tersebut jika dibentuk dalam matriks, maka:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{E(r)} = \begin{bmatrix} E(r_A) \\ E(r_B) \\ E(r_C) \\ E(r_D) \end{bmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}04 \\ 0{,}005 \end{bmatrix}.$$

Baris dalam matriks ***P*** menjelaskan tentang *views* dan kolom matriks ***P*** menjelaskan tentang saham. Saham yang akan memberikan *return* lebih dari saham yang lain (*outperforming*) akan dinyatakan dalam nilai positif, sedangkan saham yang *underperforming* akan diberikan nilai negatif. Sehingga, jumlah dari bobot *views* absolut yang diberikan dalam matriks ***P*** adalah 1 dan *views* relatif berjumlah

0. Matriks $\boldsymbol{V}$ adalah matriks berukuran $k \times 1$ yang elemen-elemennya berisi nilai *expected return* yang diperoleh dari *views* investor.

3) Tingkat Keyakinan Investor

Tingkat keyakinan merupakan vektor *error* yang menandakan *views* yang dimiliki investor masih belum pasti dan diasumsikan berdistribusi normal. Tingkat keyakinan ini dinyatakan dalam matriks diagonal $\boldsymbol{\Omega}$ (kovarians dari *views*) sebagai berikut (Idzorek T. , 2005):

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{P}(\tau\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{P}' \tag{2.44}$$

dengan,

$\boldsymbol{P}$ = matriks *views* dari *return*

τ = skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

$\boldsymbol{\Sigma}$ = matriks varians-kovarians dari *return* saham.

Jika elemen $\boldsymbol{\Omega}$ adalah nol maka investor dianggap sangat yakin terhadap pandangannya, sedangkan ketika informasi prior yang dimiliki investor memiliki tingkat *views* yang tidak pasti, maka hal ini diindikasikan dengan nilai matriks kovarians *views* $\boldsymbol{\Omega}$ adalah tidak nol.

4) Asumsi Model

Aturan Bayes menyatakan bahwa distribusi probabilitas dari suatu kejadian B terjadi apabila kejadian A diketahui, maka:

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \mid B)\Pr(B)}{\Pr(A)}. \tag{2. 45}$$

Aturan Bayes di atas lebih sering diungkapkan dalam bentuk berikut:

$$\Pr(B \mid A) \propto \Pr(A \mid B)\Pr(B) \tag{2. 56}$$

dengan notasi ∞ menyatakan "proposional terhadap".

$\Pr(B \mid A)$: probabilitas dari kejadian B dengan syarat kejadian A diketahui. Disebut juga dengan distribusi posterior.

$\Pr(A \mid B)$: probabilitas dari kejadian A, dengan syarat kejadian B diketahui. Disebut juga dengan distribusi bersyarat.

$\Pr(B)$: probabilitas B, disebut juga informasi prior.

$\Pr(A)$: probabilitas A, disebut juga normalisasi konstan.

Pembentuk model Black Litterman dibutuhkan dua jenis informasi yaitu *expected return* ekuilibrium *CAPM* dan *views* investor. Kedua informasi tersebut kemudian dikombinasikan dengan menggunakan aturan Bayes, dengan mengganti kejadian A adalah *return* ekuilibrium *CAPM* dan kejadian B adalah *expected return* investor, menggunakan persamaan Bayes dapat diperoleh:

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) = \frac{Pr(\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)})\, Pr(\boldsymbol{E(r)})}{Pr(\boldsymbol{\pi})} \tag{2.47}$$

dengan,

E(r) : vektor *expected return* investor ukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\pi}$: *return* ekuilibrium CAPM

dengan asumsi-asumsi sebagai berikut (Subekti, 2008):

a) Asumsi Pertama

Diasumikan bahwa keyakinan prior ***E(r)*** dinyatakan sebagai ***PE(r)***, yang mempunyai bentuk k kendala linear dari vektor *expected return* ***E(r)*** dan ditulis dengan matriks ***P*** berukuran $k \times n$ sehingga:

$$\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{q}. \qquad (2.48)$$

Notasi $\boldsymbol{V}$ adalah vektor k x 1 dari *views return* yang diberikan investor, sedangkan ***q*** adalah vektor *error* *k* x 1 yang menandakan adanya *views* yang masih belum pasti. Persamaan (2.52) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{k1} & P_{k2} & \dots & P_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ \vdots \\ V_{k1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{k1} \end{bmatrix}$$

Diasumsikan ***q*** berdistribusi normal dengan *mean* nol dan variansi ***Ω***, dinotasikan $\boldsymbol{q} \sim N(0, \boldsymbol{\Omega})$, ***Ω*** adalah matriks kovarians $k \times k$, sehingga :

$$P\ E(r) \sim N(V, \boldsymbol{\Omega}) \qquad (2.49)$$

b) Asumsi Kedua

Data *return* ekuilibrium $\boldsymbol{\pi}$ dengan syarat informasi prior diasumsikan berdistribusi normal multivariat dengan *mean* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ dan varians $\tau\boldsymbol{\Sigma}$, sehingga dapat dinyatakan:

$$\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)} \sim N(\boldsymbol{E(r)}, \tau\boldsymbol{\Sigma}) \qquad (2.50)$$

dengan ***E(π)***=***E(r)***, artinya terdapat asumsi bahwa *mean return* ekuilibrium sama dengan *mean return* pasar yang diperoleh melalui *CAPM*. Sedangkan nilai τ adalah suatu angka yang diberikan investor untuk menyatakan keyakinan dalam pandangannya. Kebanyakan peneliti menggunakan nilai τ yang berbeda dari berbagai redaksi yang berbeda pula. Stachell & Scowcroft (2000) menentukan nilai τ sama dengan 1, sedangkan (He & Litterman, 1999) menggunakan nilai τ yaitu 0,025. Nilai τ tergantung dari tingkat keyakinan investor terhadap *views*, sehingga nilai untuk τ berkisar antara 0 sampai 1.

5) Kombinasi *Return* Ekuilibrium dan *Views* Investor

Model Black-Litterman adalah model pembentukan portofolio dengan mengkombinasi *return* ekuilibrium dan *views* investor. Asumsi-asumsi yang diperlukan dalam pembentukan *views* sebagai berikut:

Asumsi 1:

$\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})$ berdistribusi normal multivariat dengan *mean* $\boldsymbol{V}$ dan varians $\boldsymbol{\Omega}$ dinotasikan $\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Omega})$, berdasarkan persamaan (2.16) maka fungsi probabilitasnya adalah:

$$\mathrm{f}(\mathrm{P\,E(r)}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p}\det(\Omega)}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathrm{P\,E(r)} - \mathrm{V})'\Omega^{-1}(\mathrm{PE(r)} - \mathrm{V})\right]. \qquad (2.51)$$

Asumsi 2:

$\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)}$ berdistribusi normal multivariat dengan *mean* $\boldsymbol{\pi}$ dan varians-kovarians matriks $\tau\Sigma$ dinotasikan $\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)} \sim N(\boldsymbol{E(r)}, \tau\boldsymbol{\Sigma})$, berdasarkan persamaan (2.16) maka sehingga fungsi probabilitasnya:

$$f(\pi\,|\,E(r)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\tau\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\pi - E(r))'(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - E(r))\right]. \qquad (2.52)$$

Teorema Bayes dalam konteks ini dapat dinyatakan sebagai:

$$P(E(r)\,|\,\pi) = \frac{P(\pi\,|\,E(r))P(E(r))}{P(\pi)}$$

atau dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan (2.46) sebagai berikut:

$$P(\boldsymbol{E(r)}\,|\,\boldsymbol{\pi}) \propto P(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))\, P(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})).$$

Fungsi probabilitas (2.51) dan (2.52) disubstitusikan pada rumus (2.46) sehingga diperoleh:

$$\Pr(E(r)\,|\,\pi) \propto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\tau\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\pi - E(r))'(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - E(r))\right]$$
$$\cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Omega)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(PE(r) - V)'(\Omega)^{-1}(PE(r) - V)\right]$$

dengan menghilangkan semua konstanta, maka yang tersisa adalah:

$$P(E(r)\,|\,\pi) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\pi - E(r))'(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - E(r)) - \frac{1}{2}(PE(r) - V)'\Omega^{-1}(PE(r) - V)\right]$$

$$P(E(r)\,|\,\pi) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi\right]$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
\varphi \quad &= (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))'(\tau\Sigma)^{-1}(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) + (\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{V})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{V}) \\
&= \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \\
&\quad (\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}))'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}))'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \\
&\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{E(r)'[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]E(r) + \pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi - E(r)'(\tau\Sigma)^{-1}\pi -}$$

$$\boldsymbol{\pi'(\tau\Sigma)^{-1}E(r) - V'\Omega^{-1}PE(r) - E(r)'P'\Omega^{-1}V + V'\Omega^{-1}V}$$

$$= \boldsymbol{E(r)'[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]E(r) - 2[(\tau\Sigma)^{-1}\pi' + P\Omega^{-1}V']E(r) +}$$

$$\boldsymbol{\pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi + V'\Omega^{-1}V}$$

untuk,

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}V}$, (2.53)

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P}$, dengan $\boldsymbol{B}$ simetris dengan ***B'*** sehingga $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$, (2.54)

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi + V'\Omega^{-1}V}$ (2.55)

Menggunakan notasi tersebut, maka dapat ditulis kembali menjadi:

$$\varphi = \boldsymbol{E(r)'BE(r) - 2A'E(r) + C}$$

$$= \boldsymbol{E(r)'B'BB^{-1}E(r) - 2A'BB^{-1}E(r) + C}$$

$$= \boldsymbol{E(r)'B'BB^{-1}E(r) - A'BB^{-1}E(r) - A'BB^{-1}E(r) + C +}$$

$$\boldsymbol{A'B^{-1}A - A'B^{-1}A}$$

$$= \boldsymbol{E(r)'B'BB^{-1}E(r) - E(r)'BB^{-1}A - A'BB'E(r) + A'B^{-1}A + C -}$$

$$\boldsymbol{A'B^{-1}A}$$

$$= [\,\boldsymbol{E(r)'B'B^{-1}(BE(r) - A) - A'B^{-1}(BE(r) - A)}] + \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A'B^{-1}A}$$

$$= [\boldsymbol{E(r)'B'B^{-1} - A'B^{-1}}][(\boldsymbol{BE(r) - A})] + \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A'B^{-1}A}$$

dengan demikian $\boldsymbol{C - A'B^{-1}}$ akan menjadi konstanta sehingga,

$$= [\boldsymbol{E(r)'B'B^{-1} - A'B^{-1}}][(\boldsymbol{BE(r) - A})]$$

$$= [\boldsymbol{E(r)'B'B^{-1} - A'B^{-1}}]\boldsymbol{BB^{-1}}[(\boldsymbol{BE(r) - A})]$$

$$= [\boldsymbol{E(r)'B'B^{-1}B - A'B^{-1}B}][(\boldsymbol{B^{-1}BE(r) - B^{-1}A})]$$

$$= [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{A}'][(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]$$

$$= [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}'][(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]$$

$$= [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}']\boldsymbol{B}[(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]$$

$$= [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}']\boldsymbol{B}[(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]$$

$$= [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})' - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}']\boldsymbol{B}[(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]$$

$$= [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}']\boldsymbol{B}[(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]$$

sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{\pi})\infty\, \mathbf{exp}\left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}]'\boldsymbol{B}[(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]\right]$$

maka *mean* posteriornya $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ dan varian posteriornya adalah $\boldsymbol{B}^{-1}$.

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = [(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}]$.

$\boldsymbol{B}^{-1} = [(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}$.

Jadi distribusi *return* kombinasi yang baru $(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{\pi})$ sebagai distribusi posterior berdistribusi normal

$$(E(r)|\pi)\sim N([(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}], [(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}.$$

Selanjutnya,

$$\mu_{BL} = [(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}]$$

$$= [(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}(\boldsymbol{\tau}\Sigma)[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}]$$

$$= [((\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}][(\boldsymbol{\tau}\Sigma)(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}]$$

$$= [(\boldsymbol{\tau}\Sigma)(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V}]$$

$$= [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi} - (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}]$$

$$= [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}]$$

$$= [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$= \pi + [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$= \pi + [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$= \pi + [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')][(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$= \pi + [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}' + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}'][(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$= \pi + [(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1})](\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'[(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$= \pi + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}).$$

Sehingga, *expected return* Black-Litterman dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_{BL} = \pi + (\boldsymbol{\tau}\Sigma)\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau}\Sigma\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}) \tag{2.56}$$

dengan,

$E(r_{BL})$: *expected return* model Black Litterman

$\boldsymbol{\pi}$: vektor $k \times 1$ untuk *return* ekuilibrium CAPM

τ : skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

Σ : matriks varians kovarians *return*

$\boldsymbol{\Omega}$: matriks diagonal kovarians dari *views*

$\boldsymbol{P}$: matriks $k \times n$ untuk *views* yang berkaitan dengan *return*

$\boldsymbol{q}$: vektor $k \times 1$ untuk *views return* yang diberikan investor.

Pembobotan portofolio model Black Litterman dihitung menggunakan rumus (2.39) pada model *mean variance* Markowitz sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$W_{BL} = (\delta\Sigma)^{-1}\mu_{BL} \tag{2.57}$$

dengan,

W_{BL} : bobot sekuritas pada model Black Litterman

δ : koefisien *risk aversion*

Σ : matriks varians kovarians *return*

μ_{BL} : *expected return* Black Litterman.

6) Kalibrasi

Model Black-Litterman terdapat dua parameter yang digunakan yaitu τ dan δ. Parameter τ adalah parameter yang mempengaruhi tingkat keyakinan investor terhadap pernyataan tentang *feeling*-nya dan δ adalah parameter toleransi risiko terhadap *return* ekuilibrium. Penentuan estimasi τ dan δ masih bebas dan variatif dari berbagai peneliti sehingga perlu penelusuran tentang parameter dalam model Black-Litterman dan perbandingan penentuan berbagai estimasi parameter tersebut. Penentuan parameter yang bebas ini disebut kalibrasi model.

Expected return Black-Litterman dapat dirumuskan pada persamaan (2.56) sedangkan pencarian bobot Black-Litterman dinotasikan pada rumus (2.57). Penelitian ini hanya akan dikalibrasi parameter τ sedangkan δ yaitu nilai toleransi risiko digunakan nilai sebesar 2,5 (Satchell & Scowcroft, 2000). Seorang investor tentu ingin memperoleh keuntungan yang maksimal sehingga τ akan disesuaikan dengan keuntungan yang maksimal (Subekti, Yuli S, & Insani, 2013).

7) Tracking Error

Tracking-error (TE) atau risiko aktif merupakan ukuran yang digunakan untuk menilai kinerja suatu portofolio relatif terhadap *benchmark. Tracking-error* digunakan seorang investor portofolio aktif untuk melihat seberapa dekat portofolionya dengan *benchmark* (Amanah, 2016). *Tracking-error* dapat didefinisikan dengan standar deviasi selisih *return* dari portofolio dan *benchmark.* Rumus standar deviasi dari selisih *return* $\alpha(e_P)$ sebagai berikut:

$$TE = \alpha(e_P) = \sigma(R_p - R_B) \tag{2.58}$$

dengan R_p adalah *return* portofolio dan R_B adalah *return* benchmark. Nilai TE yang rendah dapat diartikan bahwa risiko portofolio dan risiko pada *benchmark* tidak mempunyai selisih yang jauh (Sourd Vironique, 2003).