BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab II akan dibahas beberapa teori yang menjadi landasan dalam pembahasan pada bab III. Teori – teori dan beberapa kajian matematika yang akan dirangkum pada bab ini antara lain tentang perpindahan panas, persamaan diferensial yang terdiri dari persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial, teorema integral rata-rata, penyelesaian persamaan diferensial parsial dan metode volume hingga untuk menyelesaikan persamaan panas dimensi satu secara numerik. Berikut adalah penjelasan lebih lanjutnya.

A. PERPINDAHAN PANAS

Definisi 2.1 PERPINDAHAN PANAS

Ilmu termodinamika adalah ilmu yang berupaya untuk memprediksi perpindahan energi yang mungkin terjadi antara material atau benda sebagai akibat dari perbedaan suhu. (Holman, 2010 : 1)

Ilmu termodinamika berusaha untuk tidak hanya menjelaskan bagaimana energi panas dapat ditransfer, tetapi juga untuk memprediksi tingkat dimana pertukaran panas akan berlangsung dibawah kondisi tertentu. Terdapat tiga jenis mekanisme yang berbeda dimana panas dapat mengalir dari sumber panas menuju ke penerima panas. Ketiga jenis mekanisme perambatan panas tersebut adalah radiasi, konveksi dan konduksi. Dari ketiga jenis perpindahan panas tersebut, hanya perpindahan panas secara konduksi yang akan dibahas lebih dalam.

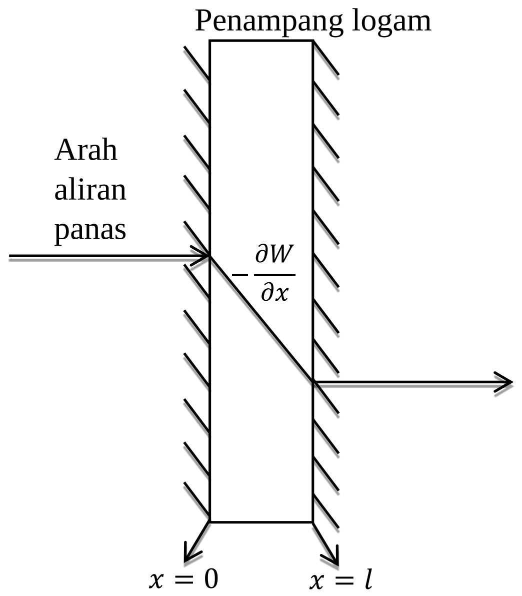
Definisi 2.2 PERPINDAHAN PANAS SECARA KONDUKSI

Perpindahan panas secara konduksi adalah perpindahan panas dari suhu yang tinggi menuju suhu yang lebih rendah karena interaksi antar partikel. (Bergman, Lavine, Incropera, & Dewitt, 2011 : 3)

Konduksi merupakan perpindahan panas melalui materi tetap seperti penampang logam yang diilustrasikan pada Gambar 2.1. Panas merambat atau berpindah dari suhu yang tinggi menuju suhu yang lebih rendah tanpa diikuti perpindahan partikel-partikel. Menurut *Hukum Fourier* atau juga yang sering disebut dengan Hukum Konduksi Panas menyatakan bahwa besar aliran panas pada saat melalui suatu material adalah sebanding dengan negatif dari perubahan suhu dan ketebalan benda. Dengan kata lain besar aliran panas menurut Hukum Fourier dapat dituliskan sebagai berikut.

$$w = AK\left(-\frac{\partial W}{\partial x}\right) \tag{2.1}$$

dimana w menunjukkan besar aliran panas, W menunjukkan suhu, x adalah panjang penampang logam yang dilalui panas, A luas penampang logam dan K merupakan konduktifitas panas.



Gambar 2.1 Aliran panas melalui penampang logam

Konduktifitas panas pada benda padat memiliki berbagai nilai numerik, hal tersebut tergantung pada jenis material padat tersebut apakah merupakan konduktor yang relatif baik dalam menerima panas atau berfungsi sebagai isolator.

Menurut Holman (2010), terdapat beberapa sifat dalam proses perambatan panas. Sifat-sifat tersebut antara lain sebagai berikut.

1. Panas hanya mengalir dari suhu yang tinggi menuju suhu yang lebih rendah,
2. Kecepatan perambatan panas dipengaruhi oleh konduktifitas bahan penyusunnya,
3. Kecepatan perambatan panas juga dipengaruhi oleh ketebalan batang logam, luas penampang, panjang bahan dan volume bahan.

B. PERSAMAAN DIFERENSIAL

Definisi 2.3 PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi dari variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. (Zill, Wright, & Cullen, 2012 : 2)

Berdasarkan jenisnya, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Definisi dari kedua jenis persamaan diferensial tersebut adalah sebagai berikut.

Definisi 2.4 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas. (Zill, Wright, & Cullen, 2012 : 2)

Definisi 2.5 PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas. (Zill, Wright, & Cullen, 2012 : 2)

Berikut adalah beberapa contoh untuk persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial biasa.

Contoh 2.1

$$\frac{dy}{dx} + y = 3 \tag{2. 2}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} = 3u + v \tag{2. 3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2. 4}$$

Dari Contoh 2.1 serta mengacu pada Definisi 2.4 dan Definisi 2.5, Persamaan (2.2) dan Persamaan (2.3) termasuk kedalam jenis persamaan diferensial biasa. Pada Persamaan (2.2), terdapat satu variabel tak bebas *y* dan satu variabel bebas x. Begitu pula pada Persamaan (2.3), terdapat dua variabel tak bebas yaitu u dan v serta satu variabel bebas yaitu t. Sedangkan untuk Persamaan (2.4) termasuk kedalam jenis persamaan diferensial parsial dengan variabel tak bebas u dan variabel bebas t dan x.

Persamaan diferensial juga dibedakan berdasarkan ordernya, berikut adalah pejelasannya.

Definisi 2.6 ORDER DARI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Urutan (order) persamaan diferensial (baik ODE atau PDE) adalah urutan turunan tertinggi dalam persamaan. (Zill, Wright, & Cullen, 2012 : 3)

Secara umum persamaan diferensial orde pertama dapat ditulis sebagai berikut.

$$M(x, y)dx \;\; N(x, y)dy = \; 0 \tag{2. 5}$$

Begitu pula untuk persamaan diferensial orde-n, secara umum ditulis sebagai berikut.

$$F(x, y, y', \dots, y^n \,) = \; 0 \tag{2. 6}$$

dengan $y^{(n)}$ menyatakan turunan *y* terhadap x yang ke-*n*.

Berikut adalah beberapa contoh persamaan dengan orde yang berbeda.

Contoh 2.2

$$\frac{dy}{dx} + y = 3 \tag{2. 7}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} = e^x \tag{2. 8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \tag{2. 9}$$

berdasarkan Definisi (2.6), Persamaan (2.7) merupakan persamaan diferensial orde satu. Persamaan (2.7) dan Persamaan (2.8) merupakan persamaan diferensial orde dua.

Klasifikasi persamaan diferensial selanjutnya adalah berdasarkan linieritasnya. Klasifikasi berdasarkan kelinieran suatu persamaan diferensial adalah sebagai berikut.

Definisi 2.7 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER

Persamaan diferensial biasa orde-n dikatakan linier jika F adalah linier di $y, y', \dots, y^n$. *Dengan kata lain bentuk umum persamaan diferensial linier orde n adalah sebagai berikut.*

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0 \tag{2. 10}$$

atau,

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2. 11}$$

Dimana variabel terikat y dan semua turunan $y, y', \dots, y^n$ *merupakan derajat pertama. Koefisien* $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ *dari* $y, y', \dots, y^n$ *bergantung pada variabel bebas* x. *(Zill, Wright, & Cullen, 2012 : 4)*

Berikut adalah beberapa contoh persamaan diferensial linier.

Contoh (2.3)

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0 \tag{2. 12}$$

$$y" - 2y' + y = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^e \quad (2.14)$$

berdasarkan definisi (2.7), Persamaan (2.12) Merupakan persamaan linier orde pertama. Persamaan (2.13) merupakan persamaan linier orde kedua dan Persamaan (2.14) merupakan persamaan diferensial linier orde 2.

C. TEOREMA NILAI RATA-RATA INTEGRAL

Teorema nilai rata-rata integral pada kasus ini akan digunakan untuk menentukan integral dari titik pusat kontrol volume.

TEOREMA (2.1) TEOREMA NILAI RATA-RATA INTEGRAL

Jika fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ *dengan c* $\in [a, b]$*, maka,*

$$F(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \quad (2.15)$$

(Varberg, Purcell, & Rigdon, 2007:253)

D. PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Penyelesaian dari persamaan diferensial parsial akan dicari dengan menerapkan syarat batas tertentu dan menggunakan beberapa teori yang dipakai hingga mendapat penyelesaian umumnya.

1. MASALAH NILAI AWAL DAN SYARAT BATAS

Untuk memahami apa itu masalah nilai awal, misal diberikan suatu lempengan logam dengan panjang l. Sehingga diperoleh interval untuk x yaitu $0 \leq$

$x \leq l$. Diberikan $W(x,0)$ yang merupakan suhu di seluruh posisi x pada saat t sama dengan nol, hal tersebut dikatakan sebagai *nilai awal*.

Selanjutnya akan dibahas tentang masalah syarat batas. Menurut (Humi & Miller, 1992 : 42), untuk persamaan diferensial parsial orde 2 terdapat 3 syarat batas yang dapat digunakan yaitu sebagai berikut :

a) Syarat batas Dirichlet

Syarat batas dirichlet merupakan nilai-nilai yang tidak diketahui dari suatu fungsi u pada bagian perbatasan. Dengan kata lain, syarat batas dirichlet adalah mempertahankan suhu pada posisi $x = 0$ dan posisi $x = l$ supaya tetap nol derajat celcius. Apabila diberikan $W(x,t)$ merupakan suhu di x pada saat t, maka syarat batas dirichlet secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$W(0,t) = W(l,t) = 0$$

dengan $t > 0$.

b) Syarat batas Neumann

Syarat batas Neumann merupakan syarat batas yang nilai-nilai perubahan suhu pada posisi $x = 0$ dan posisi $x = l$ dipertahankan nol. Apabila diberikan $W(x,t)$ merupakan suhu di x pada saat t, maka syarat batas neumann secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial W(l,t)}{\partial x} = 0$$

dengan $t > 0$.

c) Syarat batas Robin

Syarat batas robin merupakan syarat batas dimana perubahan suhu pada $x = 0$ dipertahankan nol, sedangkan suhu pada posisi $x = l$ dipertahankan nol. Apabila diberikan $W(x,t)$ merupakan suhu di x pada saat t, maka syarat batas robin secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = W(l,t) = 0$$

dengan $t > 0$.

2. MASALAH *STURM-LIOUVILLE*

Definisi 2.9

Diberikan persamaan diferensial orde dua sebagai berikut,

$$[r(x)y'(x)]' + [p(x) + \lambda s(x)]y(x) = 0 \qquad (2.16)$$

dengan syarat batas,

$$a_1 y(a) + ay'(b) = 0 \qquad (2.17)$$

$$b_1 y(a) + b_2 y'(b) = 0 \qquad (2.18)$$

untuk r, p, s *adalah terdiferensial kontinu di* $[a,b]$, *dengan* $r(x) > 0$ *dan* $s(x) > 0$ *pada* $[a,b]$, *sedangkan* a_1, a_2, b_1, b_2 *adalah konstanta riil. Salah satu dari* a_1 *atau* a_2 *tidak nol dan salah satu dari* b_1 *atau* b_2 *tidak nol.* (Humi & Miller, 1992:148)

Persamaan (2.16) dengan syarat batas Persamaan (2.17) dan syarat batas Persamaan (2.18) disebut dengan *Masalah Sturm-Liouville Reguler*. Menyelesaikan *Masalah Sturm-Liouville Reguler* artinya mencari nilai dari λ yang disebut sebagai *Nilai Eigen.* Nilai dari λ yang sesuai penyelesaian nontrivial disebut dengan *Fungsi Eigen.* (Agarwal & O'Regan, 2009 : 145)

Secara umum, akar-akar karakteristik dari suatu persamaan diferensial linier orde 2 dibedakan menjadi 3, yaitu:

1. Akar karakteristik riil berbeda

Dimisalkan akar dari persamaan karakteristik pada Persamaan (2.16) adalah a dan b, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.16) sebagai berikut.

$$y = Acosh(ax) + Bsinh(bx)$$

2. Akar karakteristik riil sama/kembar

Dimisalkan akar dari persamaan karakteristik pada Persamaan (2.16) adalah a, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.16) sebagai berikut.

$$y = Ae^{ax} + Bxe^{ax}$$

3. Akar karakteristik bilangan kompleks

Dimisalkan akar dari persamaan karakteristik pada Persamaan (2.16) adalah $a + ib$ dan $a - ib$, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.16) sebagai berikut.

$$y = Acos(bx) + Bsin(bx)$$

(Ross, 2004)

Contoh 2.3

Akan dicari penyelesaian umum dari masalah *Sturm Liouville* pada pada persamaan berikut ini.

$$X''(x) + k^2X(x) = 0 \qquad (2.\ 19)$$

Persamaan karakterisktik dari Persamaan (2.19) adalah,

$$m^2 + k^2 = 0 \qquad (2.\ 20)$$

dengan menggunakan rumus $m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, diperoleh.

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(1)(k^2)}}{2(1)}$$

$$m_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4k^2}}{2}$$

$$m_{1,2} = \frac{\pm 2ki}{2}$$

$$m_{1,2} = \pm ki$$

Akar-akar dari Persamaan Karakteristik (2.20) adalah $m_1 = ki$ dan $m_2 = -ki$, dimana m_1 dan m_2 merupakan bilangan kompleks. Sehingga diperoleh penyelesaian umum dari Persamaan (2.19) adalah.

$$X(x) = Acos(kx) + Bsin(kx)$$

Contoh 2.4

Akan dicari penyelesaian umum dari masalah *Sturm Liouville* pada persamaan berikut ini.

$$X''(x) - k^2X(x) = 0 \qquad (2.\ 21)$$

Persamaan karakterisktik dari Persamaan (2.21) adalah.

$$m^2 - k^2 = 0 \qquad (2.\ 22)$$

$$(m - k)(m + k) = 0$$

$$m_1 = k \text{ dan } m_2 = -k$$

Akar-akar dari Persamaan Karakteristik (2.22) adalah $m_1 = k$ dan $m_2 = -k$, dimana m_1 dan m_2 merupakan bilangan riil. Sehingga diperoleh penyelesaian umum dari Persamaan (2.21) adalah.

$$X(x) = Acosh(kx) + Bsinh(kx)$$

Contoh 2.5

Akan dicari penyelesaian umum dari masalah *Sturm Liouville* pada persamaan berikut ini.

$$X''(x) + 6kX'(x) + 9k^2X(x) = 0 \tag{2. 23}$$

Persamaan karakterisktik dari Persamaan (2.23) adalah.

$$m^2 + 6kx + 9k^2 = 0 \tag{2. 24}$$

$$(m + 3k)(m + 3k) = 0$$

$$m_1 = -3k \text{ dan } m_2 = -3k$$

Akar-akar dari Persamaan Karakteristik (2.24) adalah $m_1 = -3k$ dan $m_2 = -3k$, dimana m_1 dan m_2 merupakan bilangan riil yang sama besar. Sehingga diperoleh penyelesaian umum dari Persamaan (2.23) adalah.

$$X(x) = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x})$$

3. METODE SEPARASI VARIABEL

Definisi 2.10

Diberikan perasamaan diferensial,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2. 25}$$

dengan fungsi f pada Persamaan (2.25) dapat dipisah menjadi fungsi dalam x dikalikan fungsi dalam y, atau dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(x) \tag{2. 26}$$

Hal tersebut disebut dengan separasi variabel. (Zill, Wright, & Cullen, 2012 : 433)

Langkah-langkah untuk menyelesaikan suatu persamaan dengan menggunakan metode separasi variabel menurut (Humi & Miller, 1992:113) sebagai berikut.

1. Menentukan penyelesaian dari persamaan diferensial dalam bentuk $T(x,t) = X(x)T(t)$. Dimana variabel x hanya muncul dalam fungsi X, sedangkan T merupakan fungsi dari t saja.
2. Menentukan konstanta pemisah misalnya λ, dengan λ merupakan bilangan riil.
3. Akan diselesaikan terlebih dahulu masalah nilai eigen dimana persamaan memiliki dua kondisi batas. Namun, karena nilai dari konstanta pemisah variabel (λ) belum diketahui dan ditentukan bahwa λ harus riil maka masalah nilai eigen akan dicari dengan melihat kondisi dari konstanta λ yaitu $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.
4. Menentukan nilai eigen dan fungsi eigen.
5. Menyelesaikan persamaan untuk variabel yang lain dnegan menggunakan nilai eigen yang diperoleh pada langkah sebelumnya.
6. Untuk mendapatkan penyelesaian akhir, setelah diperoleh $X(x)$ dan $T(t)$ maka $X(x)$ akan dikalikan dengan $T(t)$. Hal ini terjadi karena pada langkah 1 telah diasumsikan bahwa penyelesaian dari persamaan yang diselesaikan adalah $T(x,t) = X(x)T(t)$. Berikut adalah contoh separasi variabel untuk menyelesaikan persamaan Laplace.

Contoh 2.6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2. 27}$$

Dengan syarat batas,

$$u(x, 0) = 0 \tag{2.28}$$

$$u(x, b) = 0 \tag{2.29}$$

$$u(0, y) = 0 \tag{2.30}$$

$$u(a, y) = 0 \tag{2.31}$$

Langkah penyelesaian.

1. Menentukan penyelesaian dari persamaan diferensial dalam bentuk $U(x, y) = X(x)Y(y)$. Dimana variabel x hanya muncul dalam fungsi X, sedangkan Y merupakan fungsi dari y saja.

   Diberikan penyelesaian untuk $u(x, y) = X(x)Y(y)$, apabila disubstitusikan pada Persamaan (2.27) maka diperoleh bentuk sebagai berikut.

   $$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{2.32}$$

   Apabila Persamaan (2.32) dikelompokkan sesuai variabelnya, maka diperoleh bentuk sebagai berikut.

   $$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{2.33}$$

2. Menentukan konstanta pemisah misalnya λ, dengan λ merupakan bilangan riil.

   Diambil konstanta pemisah λ, sehingga Persamaan (2.33) menjadi.

   $$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \tag{2.34}$$

   Dari Persamaan (2.34) diperoleh masalah *Sturm Liouville* sebagai berikut.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{2.35}$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \tag{2.36}$$

3. Akan diselesaikan terlebih dahulu masalah nilai eigen dimana persamaan memiliki dua kondisi batas. Namun, karena nilai dari konstanta pemisah variabel (λ) belum diketahui dan ditentukan bahwa λ harus riil maka masalah nilai eigen akan dicari dengan melihat kondisi dari konstanta λ yaitu $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

   Dari Persamaan (2.35) akan dicari kemungkinan nilai λ yang memenuhi sebagai berikut.

   Kemungkinan I untuk nilai $\lambda = k^2 > 0$, sehingga Persamaan (2.35) menjadi,

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0 \tag{2.37}$$

   Penyelesaian umum dari Persamaan (2.37) adalah.

$$X(x) = c_1 cosh(kx) + c_2\, sinh(kx)$$

   Dengan syarat batas,

   $X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = c_1 cosh(kx) + c_2\, sinh(kx)$

$$X(0) = c_1 cosh(0) + c_2\, sinh(0)$$

$$0 = c_1$$

   $X(a) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = c_1 cosh(kx) + c_2\, sinh(kx)$

$$X(a) = 0 + c_2\, sinh(ka)$$

$$0 = c_2$$

   Karena $c_1 = c_2 = 0$, maka untuk nilai $\lambda = k^2 > 0$ diperoleh penyelesaian trivial.

   Kemungkinan II untuk nilai $\lambda = 0$, sehingga Persamaan (2.35) menjadi.

$$X''(x) = 0 \tag{2.38}$$

Apabila kedua ruas pada Persamaan (2.38) diintegralkan, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\int X''(x)\, dx = \int 0\, dx$$

$$X'(x) = C_1$$

$$\int X'(x)\, dx = \int C_1\, dx$$

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

dengan syarat batas,

$X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = C_1 x + C_2$

$$X(0) = C_1(0) + C_2$$

$$0 = c_2$$

$X(a) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = C_1 x + C_2$

$$X(a) = C_1(a) + 0$$

$$0 = c_1$$

Karena $c_1 = c_2 = 0$, maka untuk nilai $\lambda = 0$ diperoleh penyelesaian trivial.

Kemungkinan III untuk nilai $\lambda = -k^2 < 0$, sehingga Persamaan (2.35) menjadi,

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \tag{2.39}$$

Penyelesaian umum dari Persamaan (2.39) adalah,

$$X(x) = c_1 cos(kx) + c_2\, sin(kx)$$

dengan syarat batas,

$X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = c_1 cos(kx) + c_2\, sin(kx)$

$$X(0) = c_1 cos(0) + c_2\, sin(0)$$

$$0 = c_1$$

$X(a) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = c_1 cos(kx) + c_2\, sin(kx)$

$$X(a) = 0 + c_2\, sin(ka)$$

$$0 = c_2\, sin(ka)$$

Agar diperoleh penyelesaian non-trivial maka $c_2 \neq 0$, sehingga nilai $sin(ka) = 0$.

$$sin(ka) = 0$$

$$sin(ka) = \sin(n\pi)$$

$$ka = n\pi\ , n = 1,2,3, \dots \tag{2.40}$$

4. Menentukan nilai eigen dan fungsi eigen.

Nilai dari k pada Persamaan (2.40) bergantung pada n, sehingga $k = k_n$. Sehingga.

$$k_n a = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Karena nilai dari $X(x) = c_1 cos(kx) + c_2\, sin(kx)$, dengan $0 = c_1$. Sehingga $X(x) = c_2\, sin(kx)$. Karena nilai k bergantung pada n, hal ini berakibat pada nilai $X(x)$ yang juga bergantung pada n. Sehingga diperoleh fungsi eigen sebagai berikut.

$$X_n(x) = C_2 sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ dengan\, n = 1,2,3,4 \dots. \tag{2.41}$$

5. Menyelesaikan persamaan untuk variabel yang lain dengan menggunakan nilai eigen yang diperoleh pada langkah sebelumnya.

Dengan menggunakan nilai dari konstanta pemisah yang telah diperoleh, maka Persamaan (2.36) dapat ditulis sebagai berikut.

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0 \tag{2.42}$$

Penyelesaian umum dari Persamaan (2.47) adalah,

$$Y(y) = c_1 cos(kx) + c_2\, sin(kx) \tag{2.43}$$

dengan syarat batas,

$$Y(0) = 0$$

$$Y(y) = c_1 cosh(kx) + c_2\, sinh(kx)$$

$$Y(0) = c_1 cosh(0) + c_2\, sinh(0)$$

$$0 = c_1$$

$$Y(a) = 0$$

$$Y(y) = c_1 cosh(kx) + c_2\, sinh(kx)$$

$$Y(a) = 0 + c_2\, sinh(ka)$$

$$0 = c_2\, sinh(ka)$$

Agar diperoleh penyelesaian non-trivial maka $c_2 \neq 0$, sehingga nilai $sin(ka) = 0$.

$$sinh(ka) = 0$$

$$sinh(ka) = \mathrm{sinh}(n\pi)$$

$$ka = n\pi\ , n = 1,2,3, \dots \tag{2.44}$$

Nilai dari k pada Persamaan (2.44) bergantung pada n, sehingga $k = k_n$. Sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

$$k_n a = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Karena nilai dari $Y(y) = c_1 cosh(kx) + c_2\, sinh(kx)$, dengan $0 = c_1$. Sehingga $Y(y) = c_2\, sinh(kx)$. Karena nilai k bergantung pada n, hal ini berakibat pada nilai $Y(y)$ yang juga bergantung pada n. Sehingga diperoleh fungsi eigen sebagai berikut.

$$Y_n(y) = C_2 sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\ dengan\ n = 1,2,3,4\ .... \qquad (2.45)$$

6. Untuk mendapatkan penyelesaian akhir, setelah diperoleh $X(x)$ dan $Y(y)$ maka $X(x)$ akan dikalikan dengan $Y(y)$. Hal ini terjadi karena pada langkah 1 telah diasumsikan bahwa penyelesaian dari persamaan yang diselesaikan adalah $U(x,y) = X(x)Y(y)$.

   Nilai $X(x)$ dan $Y(y)$ yang bergantung pada n berakibat pada penyelesaian $U(x,y)$ yang bergantung pula pada n, sehingga:

   $U_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$.

   Dimana $X(x) = C_2 sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ dan $Y(y) = C_2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$U_n(x,t) = C_n\ sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \text{ dengan } n = 1,2,3, ...$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\ sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad (2.46)$$

4. DERET FOURIER

Definisi 2.11

Diberikan deret fourier dari fungsi f yang terdefinisi pada interval $(-L, L)$ adalah,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right\} \tag{2.47}$$

Dimana,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Deret fourier untuk fungsi f tidak secara otomatis menjamin bahwa rangkaian tersebut benar-benar konvergen pada $f(x)$. Jika f kontinu pada x_0 maka deret fourier konvergen pada pada $f(x_0)$. Sebaliknya, apabila f diskontinu di x_0 maka deret fourier konvergen pada.

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

dimana.

$$f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0} f(x), dengan\ x > x_0$$

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0} f(x), dengan\ x < x_0$$

(Humi & Miller, 1992:75).

Contoh 2.7

Akan ditentukan deret Fourier dari $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

Berdasarkan Definisi 2.17 diperoleh penyelesaian sebagai berikut.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\ dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\ dx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left([x]_0^{\pi} + [2x]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(3\pi)$$

$$a_0 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\ \ cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\ \ cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\ \ cos(nx)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\ \ cos(nx)\, dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{n}\ \sin(nx)\right)_0^{\pi} + \left(\frac{2}{n}\ \sin(nx)\right)_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{n}\ \sin(nx)\right)_0^{\pi} + \left(\frac{2}{n}\ \sin(nx)\right)_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\ \ sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\ \ sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\ sin(nx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\ sin(nx)\,dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)_0^{\pi} + \left(-\frac{2}{n}\cos(nx)\right)_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)_0^{\pi} + \left(-\frac{2}{n}\cos(nx)\right)_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{1}{n}\cos(n\pi)\right) - \left(-\frac{1}{n}\cos(0)\right) + \left(-\frac{2}{n}\cos(2n\pi)\right) - \left(-\frac{2}{n}\cos(n\pi)\right)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \left(\frac{1}{n}\cos(n\pi)\right)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}(-1)^n\right)\right)$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

dengan $n = 1, 2, 3, ...$ dan $b_n = 0$ apabila n genap.

Setelah diketahui hasil dari a_0, a_n dan b_n. Maka deret Fourier dari $f(x)$ adalah.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

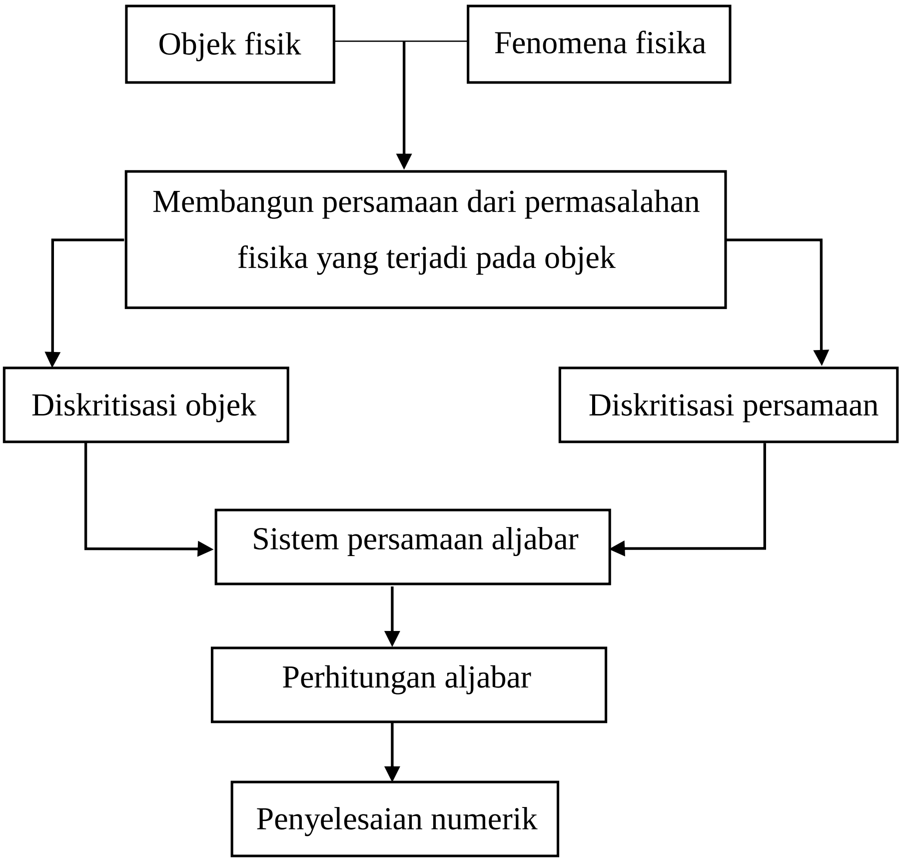
$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n}\sin(nx)$$

E. METODE VOLUME HINGGA

Metode volume hingga merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada masalah-masalah fisis. Pada dasarnya metode volume hingga adalah mengubah masalah persamaan diferensial menjadi sebuah sistem dalam persamaan aljabar. Metode volume hingga sering digunakan untuk mencari pendekatan terhadap penyelesaian analitik dari suatu persamaan diferensial parsial. Dibandingkan dengan metode beda hingga, metode volume hingga memiliki beberapa kelebihan sebagai berikut :

1. Diskritisasi terhadap ruang yang fleksibel. Apabila terdapat suatu bidang yang akan didiskritisasi, maka bidang tersebut dipartisi ke dalam ukuran lebih kecil yang sering disebut dengan kontrol volume. Partisi tersebut dapat berbentuk tidak beraturan untuk mengurangi kesalahan geometri dan partisi dapat dibuat lebih rinci untuk mendapat penyelesaian yang mendekati penyelesaian analitik.
2. Persamaan ditulis dalam bentuk integral yang seringkali berasal dari hukum-hukum fisika.
3. Dari Nomor (2), kelebihan selanjutnya dari metode volume hingga adalah tidak ada kebutuhan untuk variabel dependent untuk menjadi terdiferensial.

Langkah-langkah dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial dengan metode volume hingga hampir mirip dengan *finite difference method* ataupun *finite element method*. Menurut (Moukalled, et al : 2016), adapun tahap-tahap dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan metode volume hingga secara garis besar dapat dilihat dari Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.2 Bagan alur metode volume hingga

Langkah awal dalam metode volume hingga adalah menurunkan persamaan matematik untuk fenomena fisika yang dialami oleh suatu objek. Setelah ditentukan persamaan matematik (dalam hal ini persamaan matematik yang dimaksud adalah persamaan diferensial parsial) untuk permasalahan fisika tersebut, lalu dilakukan diskritisasi terhadap objek (benda). Benda akan dibagi menjadi beberapa kontrol volume (dipartisi menjadi beberapa bagian dengan panjang yang sama). Sehingga akan terdapat beberapa titik yang mewakili tiap kontrol volume tersebut.

Langkah selanjutnya setelah menentukan kontrol volume adalah melakukan diskritisasi terhadap persamaan matematik yang telah diperoleh. Kedua ruas persamaan matematik diintegralkan terhadap waktu dan terhadap kontrol volume. Hingga diperoleh suatu sistem persamaan aljabar. Dengan diperoleh sistem persamaan aljabar maka akan diperoleh juga matrik dari sistem persamaan aljabar. Untuk mendapat penyelesaian numerik maka dilakukan penyelesaian terhadap matrik untuk mendapat nilai dari variabel terikat.

Beberapa cara untuk memperoleh hasil dari matrik tersebut adalah dengan metode Jacobi, eliminasi *sistem Gauss-Jordan*, *Forward Elimination, Backward Subtitution.*