BAB II

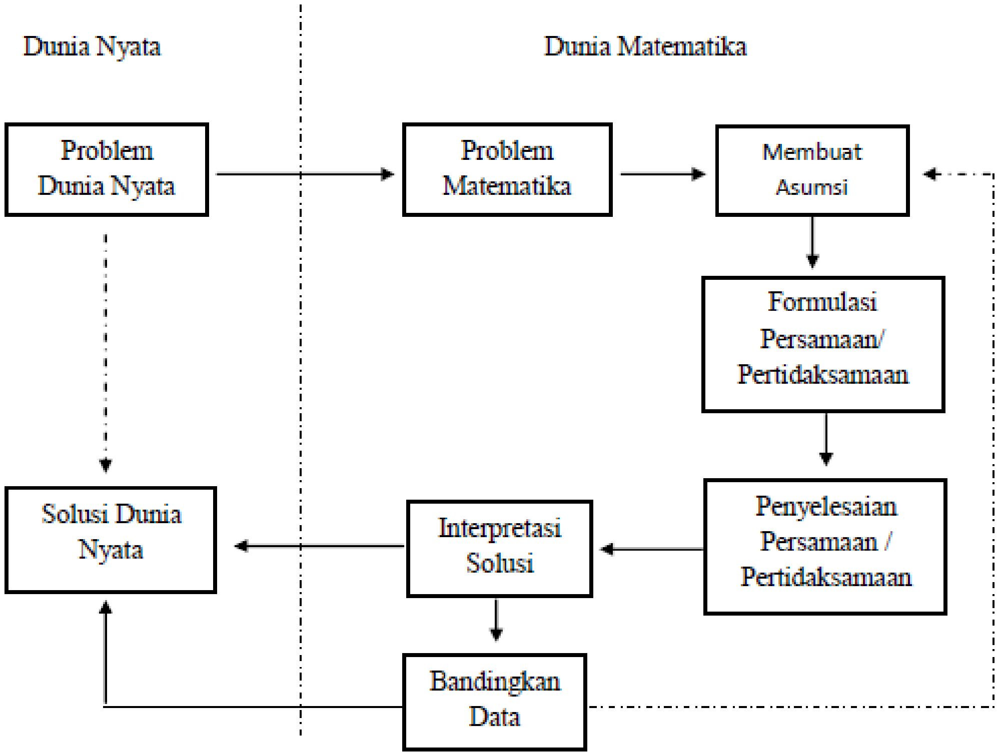
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan di bahas tentang landasan teori yang digunakan pada bab selanjutnya sebagai bahan acuan yang mendukung tujuan penulisan. Materi-materi yang diuraikan berupa definisi-definisi dan teorema. Adapun materi – materi yang dibahas yaitu pemodelan matematika, persamaan diferensial, solusi persamaan diferensial, nilai eigen dan vektor eigen, titik ekuilibrium, linearisasi, analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar *(Basic Reproduction Number)*, Kriteria *Routh Hurwitz*.

A. Pemodelan Matematika

Peran matematika pada permasalahan kehidupan sehari-hari maupun pada bidang studi yang berbeda dapat disajikan dalam pemodelan matematika. Menurut Widowati dan Sutimin, (2007:1) menyatakan bahwa pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia nyata dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia nyata ini menjadi lebih tepat.

Representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika disebut sebagai model matematika. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda seperti fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi , bisnis dan keuangan, juga problem jaringan komputer. Menurut Widowati dan Sutimin, (2007:3) proses pemodelan matematika dapat dinyatakan dalam alur diagram yang disajikan pada Gambar 2.1 berikut ini:



Gambar 2. 1 Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh langkah-langkah pemodelan matematika sebagai berikut:

1. Menyatakan masalah dunia nyata kedalam pengertian matematika

   Penyelesaian masalah dunia nyata secara langsung kadang sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, guna mempermudah penyelesaian masalah dunia nyata dimodelkan kedalam bahasa matematis. Berdasarkan masalah yang diperoleh, kemudian diidentifikasi variabel-variabel yang ada dalam masalah dan dibentuk beberapa hubungan antara variabel-variabel yang dihasilkan dari masalah tersebut.

2. Membuat asumsi-asumsi model

Langkah selanjutnya adalah membuat asumsi-asumsi yang sesuai dengan masalah dunia nyata. Pada dasarnya, asumsi tersebut mencerminkan bagaimana proses berfikir sehingga model dapat berjalan. Asumsi-asumsi ini dibuat agar model yang dihasilkan dapat menggambarkan dengan tepat masalah dalam dunia nyata.

3. Memformulasikan persamaan atau pertidaksamaan

Berdasarkan variabel-variabel yang ditentukan, hubungan antar variabel dan asumsi-asumsi yang telah dibuat dapat dibentuk persamaan ataupun pertidaksamaan yang menggambarkan permasalahan dalam dunia nyata. Langkah ini merupakan langkah yang paling penting dan sulit. Terkadang langkah tersebut diperlukan kembali guna menguji kembali asumsi-asumsi agar memformulasikan persamaan yang sesuai, sehingga dapat diselesaikan dan realistik.

4. Menyelesaikan persamaan atau pertidaksamaan

Setelah didapatkan suatu persamaan dan pertidaksamaan, selanjutya dapat dicari solusi dari model matematika dengan penyelesaian secara matematis. Namun, tidak semua model matematika dapat dengan mudah dicari solusinya. Persamaan model matematika mungkin saja tidak memiliki solusi atau bahkan mempunyai lebih dari satu solusi. Oleh karena itu, pada langkah ini dapat dilakukan analisis sifat atau perilaku dari solusi model matematika tersebut.

5. Interpretasi hasil atau solusi

Interpretasi hasil atau solusi adalah salah satu langkah terakhir yang menghubungkan formulasi matematika kembali ke masalah dunia nyata. Interpretasi dapat dikerjakan dengan berbagai cara, salah satunya dengan bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh kemudian diinterpretasikan sebagai solusi dunia nyata. Selanjutnya solusi yang didapatkan dengan membandingkan data yang diketahui dan dihubungkan untuk merevikasi bahwa solusi merupakan representasi masalah dunia nyata. Apabila solusi yang didapatkan belum sesuai dengan masalah dunia nyata maka dapat ditinjau ulang asumsi-asumsi yang telah dibuat sebelumnya.

B. Persaman Diferensial

Definisi 2.1 (Ross, 2010: 3)

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

Berikut beberapa contoh persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 3x = \sin t \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.4}$$

Persamaan diferensial (PD) dibagi menjadi 2 yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

   Definisi 2.2 (Ross, 2010: 4)

   Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau variabel bebas.

   Contoh 2.2

   Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa. Variabel x pada Persamaan (2.1) merupakan variabel bebas tunggal dan y merupakan variabel tak bebas. Pada Persamaan (2.2) variabel bebasnya adalah t dimana x merupakan variabel tak bebas.

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

   Definisi 2.3 (Ross, 2010:4)

   Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu atau lebih variabel bebas.

   Contoh 2.3

   Persamaan (2.3) dan Persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial parsial. Pada Persamaan (2.3) variabel s dan t merupakan variabel bebas dan *v* merupakan variabel tak bebas. Pada Persamaan (2.4) terdapat tiga (3) variabel *x*, *y*, dan *z* yang merupakan variabel bebas sedangkan *u* merupakan variabel tak bebas.

C. Solusi Persamaan Diferensial

Definisi 2.4 (Ross, 2010:8)

Diberikan suatu persamaan diferensial orde-n berikut:

$$F\left[x, y\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0 \qquad (2.5)$$

dengan F adalah fungsi real.

1. *Misalkan f adalah fungsi bilangan real yang terdefinisi untuk semua x dalam interval I dan mempunyai turunan ke-n untuk semua* $x\epsilon I$. *Fungsi f disebut solusi eksplisit dari Persamaan (2.5) dalam interval I jika fungsi f memenuhi syarat berikut:*
   a. $F[x, f(x), f'(x), \dots., f^n(x)]$, *terdefinisi* $\forall x\epsilon\ I$
   b. $F[x, f(x), f'(x), \dots., f^n(x)] = 0\ \ \forall x\epsilon\ I$

   Hal ini berarti bahwa substitusi f(x) dan variasi turunan y dan turunannya yang berkorespondensi ke Persamaan (2.5) akan membuat Persamaan (2.5) menjadi suatu identitas di interval I.
2. *Suatu relasi g (x,y) = 0 disebut solusi implisit dari Persamaan (2.5) jika relasi ini mendefinisikan sedikitnya satu fungsi bilangan real f dengan variabel x di interval I.*
3. *Solusi eksplisit dan solusi implisit biasa disebut sebagai solusi sederhana.*

Contoh 2.4

Akan ditentukan solusi dari persamaan diferensial berikut,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1$$

dengan $x_1(0) = 1$

Penyelesaian:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1$$

$$\frac{1}{x_1} dx_1 = dt$$

$$\int \frac{1}{x_1} dx_1 = \int dt$$

$$\ln|x_1| + c_1 = t + c_2$$

$$e^{\ln|x_1|} = e^{t+c}$$

$$x_1 = ce^t$$

karena $x_1(0) = 1$ maka

$$x_1(t) = ce^t$$

$$1 = ce^0$$

$$1 = c$$

Jadi solusi persamaan diferensial $\frac{dx_1}{dt} = x_1$ adalah $x_1 = e^t$.

D. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan dari beberapa persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \epsilon E, E \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots.., x_n)^T$ dan E adalah himpunan terbuka dari $\mathbb{R}^n$. Fungsi $f: E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots.., f_n)^T$ dan $f \in C'(E)$ dimana $C'(E)$

adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di *E*. Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ menyatakan turunan pertama *x* terhadap *t*, maka sistem persamaan diferensial dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n) \\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sistem (2.6) dapat dituliskan menjadi,

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.7}$$

Berdasarkan kelinearannya sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial non-linear.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas $x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n$ serta variabel bebas *t* dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 + \ldots + a_{3n}(t)x_n + F_3(t) \qquad (2.8) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + a_{n3}(t)x_3 + \dots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t)$$

diasumsikan bahwa untuk semua fungsi didefinisikan oleh $a_{ij}(t), i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $F_i(t) = 1, 2, 3, \dots., n,$ kontinu di interval $a \leq t \leq b$. Jika $F_i(t) = 0,$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ untuk setiap t maka Sistem (2.8) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen. Sedangkan jika $F_i(t) \neq 0$ maka Sistem (2.8) disebut sistem persamaan diferensial linear nonhomogen (Ross, 2010: 505-506).

Selanjutnya Sistem (2.8) dapat dinyatakan menjadi,

$$\dot{x} = Ax + F(t) \tag{2.9}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ merupakan variabel tak bebas dan *A* adalah matriks ukuran *n x n*. Matriks *A* dengan $a_{ij}(t), i = 1, 2, 3, \dots, n,\ j = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $F(t)$ adalah matriks *n x 1* dalam fungsi *t*. Sehingga dapat dinyatakan,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

Jika pada Sistem (2.9) didefinisikan $F(t) = 0$ dan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ dimana vektor $x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots., x_n)^T$ dan $x_1, x_2, x_3, \dots., x_n \in \mathbb{R}$ maka diperoleh sistem persamaan diferensial linear homogen,

$$\dot{x} = Ax \tag{2.10}$$

dengan *A* adalah matriks berukuran *n x n*.

Contoh 2.5

Diberikan sistem persamaan diferensial linear sebagai berikut,

$$\frac{dx}{dt} = 7x - 3y + 6z$$

$$\frac{dy}{dt} = -10x + 4y - 12z \qquad (2.11)$$

$$\frac{dz}{dt} = -2x + y - z$$

Sistem Persamaan diferensial (2.11) merupakan persamaan diferensial linear homogen.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear

Definisi 2.5 (Ross, 2010:5)

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Suatu persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut (Ross, 2010:5).

1. Memuat variabel tak bebas dan/atau turunannya yang berpangkat selain satu
2. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
3. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.6

Beberapa contoh persamaan diferensial non linear sebagai berikut,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x \tag{2.14}$$

Persamaan (2.12) merupakan persamaan diferensial non linear, karena terdapat variabel tak bebas yang berpangkat dua $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ dan turunannya variabel bebas berpangkat dua $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Kemudian Persamaan (2.13) merupakan persamaan diferensial non linear, karena terdapat perkalian variabel tak bebas dan turunannya $\left(y\frac{dy}{dx}\right)$. Selanjutnya untuk Persamaan (2.14) merupakan persamaan diferensial non linear, karena terdapat perkalian variabel tak bebas dan turunannya (xe^x). Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan non linear jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial non linear.

Contoh 2.7

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear sebagai berikut,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1x_2 \tag{2.15a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 \tag{2.15b}$$

Sistem (2.15a) dan (2.15b) merupakan sistem persamaan diferensial non linear dengan variabel tak bebas x_1 dan x_2 sedangkan variabel bebasnya t. Sistem (2.15a) dan (2.15b) dikatakan sistem persamaan diferensial non linear karena pada Persamaan (2.15a) dan (2.15b) memuat perkalian antara variabel tak bebas .

E. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai Eigen adalah suatu nilai yang digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem. Nilai Eigen didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Anton, 2010: 277)

Jika A adalah matriks n x n, maka vektor taknol x didalam R^n disebut vektor eigen dari A, jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu:

$$Ax = \lambda x \tag{2.16}$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dari A dan x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran n x n, maka dituliskan kembali Persamaan (2.16) sebagai berikut:

$$Ax = \lambda I x \tag{2.17}$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{2.18}$$

dengan *I* adalah matriks identitas.

Menurut Howard Anton (2010:278) Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari Persamaan (2.18). Persamaan (2.18) memiliki pemecahan taknol (solusi non trivial) jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) merupakan persamaan karakteristik dari matriks A dan skalar yang memenuhi Persamaan (2.19) adalah nilai eigen dari A.

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots. + c_n$$

Sehingga persamaan karakteristik dari A menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots. + c_n = 0$$

dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \ldots., n$.

Contoh 2.8

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A.

Penyelesaian:

Akan dicari nilai eigen dari A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0.$$

Jadi, diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_1 = 2$. Kemudian akan dicari vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen dari A.

Untuk $\lambda_1 = 3$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 = x_2$$

Sehingga, misal $x_1 = t$ maka $2t = x_2$, dimana $t \in \mathbb{R}$ maka vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_1 = 2$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

Misal $x_1 = s$ maka $s = x_2$, dimana $t \in \mathbb{R}$ maka vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi diperoleh vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks A yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$.

F. Titik Ekuilibrium

Berikut ini disajikan definisi dari titik ekuilibrium,

Definisi 2.7 (Perko, 2000: 102)

Titik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik ekulibrium atau titik kritis jika* $f(x_0) = 0$.

Contoh 2.9

Akan dicari titik ekulibrium dari sistem berikut ini:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 \tag{2.20a}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - x_1^2 \tag{2.20b}$$

Penyelesaian:

Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ adalah titik ekulibrium dari Sistem (2.20a) dan (2.20b), maka:

$$0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_1\bar{x}_2$$

$$0 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1^2$$

Dari Persamaan (2.20a) diperoleh

$$0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_1\bar{x}_2$$

$$0 = \bar{x}_1(1 - \bar{x}_2)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = 0 \text{ atau } \bar{x}_2 = 1.$$

Subtitusikan $\bar{x}_1 = 0$ ke Persamaan (2.20b) sehingga diperoleh $\bar{x}_2 = 0$. Jika $\bar{x}_2 = 1$ disubtitusikan ke Persamaan (2.20b) sehingga diperoleh:

$$0 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1^2$$

$$0 = 1 - \bar{x}_1^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = \pm 1.$$

Jadi Sistem (2.21a) dan (2.21b) memiliki titik ekulibrium yaitu $(0,0)^T, (1, 1)^T$ dan $(-1, 1)^T$.

G. Linearisasi

Linearisasi adalah proses mengubah suatu sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Proses ini dilakukan dengan linearisasi di sekitar titik ekulibrium. Dalam hal ini proses linearisasi perlu dilakukan pada model matematika penyebaran flu burung karena persamaan yang diperoleh dari model tersebut adalah persamaan nonlinear. Analisis dari sistem persamaan diferensial non linear ini akan lebih mudah dilakukan jika sistem persamaan diferensial non linear diubah ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial linear. Namun sebelum membahas proses linearisasi tersebut akan dibahas terlebih dahulu mengenai Matriks Jacobian yang akan dijelaskan pada Teorema 2.1 berikut:

Teorema 2.1 (Perko, 2000:67)

Jika $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *terdeferensial di* x_0 *maka turunan parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ *di* x_0 *ada untuk semua* $x \in \mathbb{R}^n$ *dan*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$= Df(x_0)x.$

Matriks $Df(x_0)x$ disebut Matriks Jacobian dari fungsi $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ yang terdeferensial di $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $Df(x_0)$ dapat dinotasikan $Jf(x_0)$. Selanjutnya akan ditunjukan proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial non linear ke dalam sistem persamaan diferensial linear.

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear sebagai berikut,

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.21}$$

dengan $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n, f: E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f merupakan fungsi non linear dan kontinu. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekulibrium Sistem (2.21), maka pendekatan linear disekitar titik ekulibrium diperoleh dengan menggunakan deret Taylor dari fungsi f disekitar titik ekulibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T$ yaitu:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T =$$

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) +$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n -$$

$$\bar{x}_n) + Rf_1$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T =$$

$$f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) +$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n -$$

$$\bar{x}_n) + Rf_2$$

$$\vdots$$

$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T =$

$f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) +$

$\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n -$

$\bar{x}_n) + Rf_n.$

Karena nilai $Rf_1, Rf_2, Rf_3, \dots, Rf_n$ mendekati 0, maka $Rf_1, Rf_2, Rf_3, \dots, Rf_n$ dapat diabaikan. Oleh karena itu, pendekatan linear Sistem (2.21) adalah

$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 -$

$\bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n)$

$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 -$

$\bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n)$ (2.22)

$\dot{x}_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 -$

$\bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n)$

$$\vdots$$

$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_2 -$

$\bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots., \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n).$

Sistem (2.22) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - \bar{x}_1) \\ (x_2 - \bar{x}_2) \\ \vdots \\ (x_n - \bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

Misalkan $y_1 = (x_1 - \bar{x}_1)$, $y_2 = (x_2 - \bar{x}_2), \dots, y_n = (x_n - \bar{x}_n)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Matriks Jacobian dari Persamaan (2.23) adalah

$$J =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

Jika Matriks Jacobian memiliki nilai eigen yang tidak nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan sistem dapat dilihat dari

$$\dot{x} = J\big(f(x_0)\big)x \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) disebut hasil linearisasi dari Sistem (2.21). Selanjutya akan diberikan definisi mengenai linearisasi pada sistem persamaan diferensial non linear sebagai berikut:

Definisi 2.8 (Perko, 2000: 102)

Diberikan matriks Jacobian $J\big(f(\bar{x})\big)$. *Sistem linear* $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)x$ *disebut linearisasi dari sistem* $\dot{x} = f(x)$ *di* $\bar{x}$.

Setelah dilakukannya linearisasi, maka dapat dilihat perilaku kestabilan dari sistem persamaan diferensial nonlinear disekitar titik ekuilibrium. Kestabilan Sistem (2.21) disekitar titik ekulibrium $\bar{x}$ dapat dilihat dari kestabilan hasil linearisasinya jika $\bar{x}$ hiperbolik. Diberikan definisi untuk titik ekulibrium hiperbolik yang dijelaskan pada Definisi (2.9) berikut ini:

Definisi 2.9 (Perko, 2000: 102)

Titik ekulibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik ekulibrium hiperbolik dari Sistem (2.21) jika tidak ada bagian real nilai eigen yang bernilai nol. Jika titik ekuilibrium dari sistem mempunyai bagian real nol, maka disebut titik ekuilibrium nonhiperbolik.*

Contoh 2.10

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$\dot{x}_1 = -4x_2 + 2x_1x_2 - 8$

$$\dot{x}_2 = 4x_2^2 - x_1^2 \tag{2.25}$$

Sistem (2.25) memiliki titik ekulibrium $\bar{x}_1 = (-2,-1)^T$ dan $\bar{x}_2 = (4,2)^T$. Akan dicari Matriks Jacobian di $\bar{x}_1 = (-2,-1)^T$ dan $\bar{x}_2 = (4,2)^T$ serta akan dilakukan identifikasi untuk masing-masing titik ekulibrium.

Matriks Jacobian dari Sistem (2.25) adalah

$$J(f(\bar{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-4x_2 + 2x_1x_2 - 8)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-4x_2 + 2x_1x_2 - 8)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(4x_2^2 - x_1^2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(4x_2^2 - x_1^2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_2 & -4 + 2x_1 \\ -2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

Untuk $\bar{x}_1 = (-2,-1)^T$, didapatkan Matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(f(-2,-1)^T) = \begin{bmatrix} 2x_2 & -4 + 2x_1 \\ -2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen untuk $J(f(-2,-1)^T)$,

$$\det(J(f(-2,-1)^T) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda)(-8-\lambda) - ((-8)x4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 + 10\lambda + \lambda^2 + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 10 + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-10+2\sqrt{23}i}{2} \text{ atau } \lambda_2 = \frac{-10-2\sqrt{23}i}{2}.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol sehingga titik ekulibrium $\bar{x}_1 = (-2,-1)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

Untuk $\bar{x}_2 = (4,2)^T$, didapatkan Matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(f(4,2)^T) = \begin{bmatrix} 2x_2 & -4+2x_1 \\ -2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen untuk $J(f(4,2)^T)$,

$$\det(J(f(4,2)^T) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(16-\lambda) - ((-8)x4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 64 - 20\lambda + \lambda^2 + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 12 \text{ atau } \lambda_2 = 8.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol sehingga titik ekulibrium $\bar{x}_2 = (4,2)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

H. Analisis Kestabilan

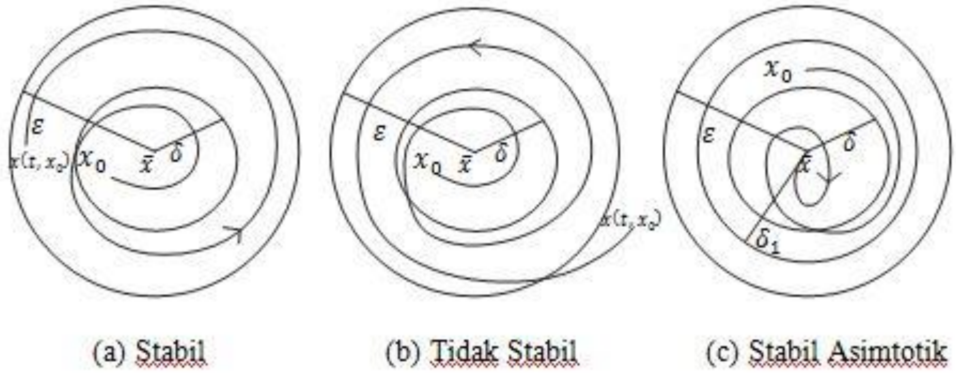
Kestabilan di titik ekuilibrium secara umum dibagi menjadi tiga jenis yaitu stabil, stabil asimtotik dan tidak stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear akan dijelaskan pada Definisi 2.10 dan Teorema 2.2.

Definisi 2.10 (Olsder, 2004:57)

Diberikan persamaan diferensial orde pertama $\dot{x} = f(\bar{x})$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi persamaan $\dot{x} = f(\bar{x})$ pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$

1. *Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut sebagai titik ekuilibrium.*
2. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.*
3. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$, sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$ berlaku $lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$.*
4. *Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tidak memenuhi (2).*

Ilusitrasi dari Definisi 2.10 disajikan pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2. 2 Ilustrasi Kestabilan

Menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial disekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan Definisi 2.10 tidak mudah untuk ditemukan. Oleh karena itu, diberikan teorema mengenai sifat kestabilan suatu sistem yang ditinjau dari niali eigen untuk mempermudah dalam menganalisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium. Teorema tersebut dijelaskan dalam Teorema 2.2 berikut ini:

Teorema 2.2 (Olsder, 2004: 58)

Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax,$ *dengan* A *adalah matriks berukuran n x n, mempunyai k nilai eigen yang berbeda yaitu* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ *dengan* $k \leq n.$

1. *Titik ekulibrium* $\bar{x} = 0$ *adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) < 0$ *untuk semua* $i = 1, 2, 3, \dots., k.$
2. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *adalah stabil jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) \leq 0,$ *untuk semua* $i = 1, 2, 3, \dots., k$ *dan untuk setiap nilai eigen* λ_1 *pada sumbu imajiner dengan* $\Re e(\lambda_i) = 0$ *yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen sama.*

3. *Titik ekulibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \ldots., k$ atau terdapat nilai eigen λ_1 pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.*

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa titik ekulibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$.

   ($\Longrightarrow$)

   Jika titik ekulibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik maka $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$.

   Menurut Definisi 2.10, titik ekulibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Sehingga untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ menuju $\bar{x} = 0$. $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Artinya agar $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$ maka $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$.

   ($\Longleftarrow$)

   Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

   Solusi $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \to \infty$, $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Berdasarkan Definisi 2.10 titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$ dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

   $(\Longrightarrow)$

   Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$.

   Andai $\Re e(\lambda_i) > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$). Untuk $t \to \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini terjadi kontraposisi dengan pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$.

   $(\Longleftarrow)$

   Jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots., k$ dan untuk setiap nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

   $x(t, x_0)$ adalah solusi dari Persamaan (2.22) maka $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_1)t}$. Jika $\Re e(\lambda_1) < 0$ maka $e^{\Re e(\lambda_1)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$ yang artinya stabil asimtotik. Tiitk ekuilibrium yang stabil asimtotik pasti stabil. Jika $\Re e(\lambda_i) = 0$ maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979: 85), multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen dan multiplisitas geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama. Ambil sebarang sistem di $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni. Diambil sistem sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ dengan } p > 0, q > 0. \qquad (2.26)$$

Akan dicari nilai eigen dari Sistem (2.26)

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -p \\ q & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + pq = 0 \qquad (2.27)$$

Akar-akar dari Persamaan (2.27) adalah

$$\lambda_{1.,2} = \frac{\pm\sqrt{-4pq}}{2}$$

$$\lambda_{1.,2} = \frac{\pm 2\sqrt{pq}i}{2} = \pm\sqrt{pq}i$$

Sehingga $\lambda_{1.} = \sqrt{pq}i$ dan $\lambda_{2.} = -\sqrt{pq}i$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{1.} = \sqrt{pq}i$,

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{pq}i & -p \\ q & -\sqrt{pq}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\left(\begin{matrix} -\sqrt{pq}i & -p \\ q & -\sqrt{pq}i \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) R_1 \rightarrow R_2$$

$$\left(\begin{matrix} q & -\sqrt{pq}i \\ -\sqrt{pq}i & -p \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \frac{1}{q} R_1$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -\frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ -\sqrt{pq}i & -p \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) R_2 + \sqrt{pq}i\ R_1$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -\frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - \frac{\sqrt{pq}i}{q} y = 0$$

Misal $y = t$ maka $x = \frac{\sqrt{pq}i}{q} t$ sehingga,

$$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Diambil $t = 1$ maka didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{1.} = \sqrt{pq}i$ adalah $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{2.} = -\sqrt{pq}i$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{pq}i & -p \\ q & \sqrt{pq}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$\left(\begin{matrix} \sqrt{pq}i & -p \\ q & \sqrt{pq}i \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{matrix} q & \sqrt{pq}i \\ \sqrt{pq}i & -p \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \frac{1}{q} R_1$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & \frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ \sqrt{pq}i & -p \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) R_2 - \sqrt{pq}i\ R_1$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & \frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Selanjutnya diperoleh,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \frac{\sqrt{pq}i}{q} y = 0$$

Misal $y = t$ maka $x = -\frac{\sqrt{pq}i}{q} t$ sehingga

$$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Diambil $t = 1$ maka didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{2.} = \sqrt{pq}i$ adalah $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{pq}i}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi terbukti banyaknya nilai eigen sama dengan banyaknya vektor eigen.

3. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \dots, k$atau terdapat nilai eigen $\lambda_{1.}$ pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.

   Bukti:

   $\Longrightarrow$

   Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil maka $\Re e(\lambda_i) > 0,\ \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$. Titik ekuilibrium tidak stabil apabila $t \longrightarrow \infty, x(t, x_0)$ menuju ∞. Hal tersebut terjadi apabila $\Re e(\lambda_i) > 0$.

   $\Longleftarrow$

   Jika $\Re e(\lambda_i) > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil. Apabila $\Re e(\lambda_i) > 0, x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan selalu menuju ∞. Oleh karena itu, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Disimpulkan bahwa untuk melihat kestabilan Sistem (2.22) digunakan linearisasi agar Sistem (2.22) menjadi sistem linear $\dot{x} = Ax$ dimana $A = J(f(\bar{x}))$ adalah Matriks Jacobian. Kestabilan yang dimaksud adalah kestabilan lokal. Titik ekuilibrium $\bar{x} \epsilon \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bilangan real negatif.

I. Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Menurut Driessche dan Watmough (2001) bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan rata-rata banyaknya individu yang dapat terinfeksi akibat tertular individu terinfeksi yang berlangsung dalam populasi *Susceptible*. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit tidak menyerang populasi, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar.

Model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen (kelas) disebut kompartemen penyakit jika individu-individu didalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Dimisalkan x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi dengan $x \epsilon \mathbb{R}^n$ dan $y \epsilon \mathbb{R}^m$ untuk $n, m \epsilon \mathbb{N}$. Model kompartemen (kelas) dapat dituliskan dalam bentuk berikut,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \dot{y} &= \eta_j(x, y), j = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \tag{2.28}$$

dengan φ_i merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi dan ψ_i merupakan matriks laju perkembangan penyakit, kematian dan kesembuhan yang mengurangi kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari Sistem (2.28) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut,

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V matriks berukuran *n x n*,

$$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0, y_0)$$

dengan $(0, y_0)$ merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1} \tag{2.29}$$

K disebut sebagai *Next Generation Matriks*. Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model kompartemen adalah $R_0 = \rho(FV^{-1})$ yaitu nilai eigen terbesar dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2001).

Contoh 2.11

Diberikan Sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - kI - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= kI - \mu R \end{aligned} \tag{2.30}$$

dengan *S* menyatakan populasi individu sehat dan rentan terhadap penyakit pada saat *t*, *I* menyatakan populasi terinfeksi pada saat *t* dan *R* menyatakan populasi individu sembuh pada saat *t*, Sistem (2.30) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0)$.

Pada Sistem (2.30) kelas terinfeksi adalah *I*. *Next Generation Matriks* dapat diperoleh dari kelas *I* sehingga kelas *I* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$I = \varphi_i((S, R), I) - \psi_i((S, R), I)$$

dengan $\varphi = (\beta SI)$ dan $\psi = (kI + \mu I)$. Hasil linearisasi dari φ dan ψ masing-masing adalah

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI)}{\partial I} = \beta S$$

$$V = \frac{\partial\psi}{\partial I} = \frac{\partial(kI + \mu I)}{\partial I} = k + \mu.$$

Sehingga diperoleh *Next Generation Matriks* berikut:

$$K = FV^{-1} = [\beta S]\left[\frac{1}{k + \mu}\right]. \qquad (2.31)$$

Selanjuntya, substitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0)$ ke Persamaan (2.32) maka diperoleh

$$K = \frac{\beta}{k + \mu}.$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks *K*. Jadi, nilai bilangan reproduksi dasar dari Sistem (2.32) adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{k + \mu}.$$

J. Kriteria Routh Hurwitz

Kestabilan titik ekuilibrium dari Sistem (2.21) dapat dilihat berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobiannya. Permasalahan yang sering terjadi dalam menentukan tipe kestabilan sistem menggunakan nilai eigen adalah ketika mencari akar-akar persamaan yang berorde tinggi. Oleh karena itu, diperlukan suatu kriteria yang dapat menjamin akar-akar persamaan bernilai negatif atau ada akar persamaan yang bernilai positif. Tanda negatif ataupun positif digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu titik ekuilibrium. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* sebagai alternatif menentukan tanda bagian real dari nilai-nilai eigen.

Diberikan suatu persamaan karakteristik dari matriks A_{nxn},

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \tag{2.33}$$

dengan $a_i \neq 0, i = 1,2,3,\ldots,n$.

Menurut Olsder (2004: 60), kriteria *Routh-Hurwitz* dipakai untuk mengecek kestabilan secara langsung dengan mempertimbangkan nilai koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari Persamaan (2.33). Koefisien-koefisien dari Persamaan (2.33) dapat disusun ke dalam sebuah tabel *Routh-Hurwitz* berikut ini,

Tabel 2. 1 Tabel Routh-Hurwitz

a_0	a_2	a_4	$\cdots$
a_1	a_3	a_5	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	$\cdots$
c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

dimana koefisien b_1, b_2, c_1, c_2 didefinisikan sebagai

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

perhitungan pada tabel *Routh-Hurwitz* terus dilakukan sampai kolom pertama menghasilkan perhitungan sama dengan nol. Matriks A_{nxn} dikatakan stabil jika semua bagian real dari nilai eigen bernilai negatif. Dalam kriteria *Routh-Hurwitz* hal ini ditunjukkan dengan tidak adanya perubahan tanda pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz*, sehingga berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* suatu sistem persamaan diferensial dikatakan stabil jika semua elemen pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* memiliki tanda sama (semua positif atau semua negatif).

Menurut Olsder (2004: 61) akar-akar dari Polinomial (2.33) semuanya mempunyai bagian real bernilai negatif jika dan hanya jika Tabel 2.1 terdiri dari *n+1* baris dan semua elemen pada kolom pertama dari Tabel 2.1 mempunyai tanda sama (semua elemen dari kolom pertama adlah bernilai positif atau negatif).