BAB II

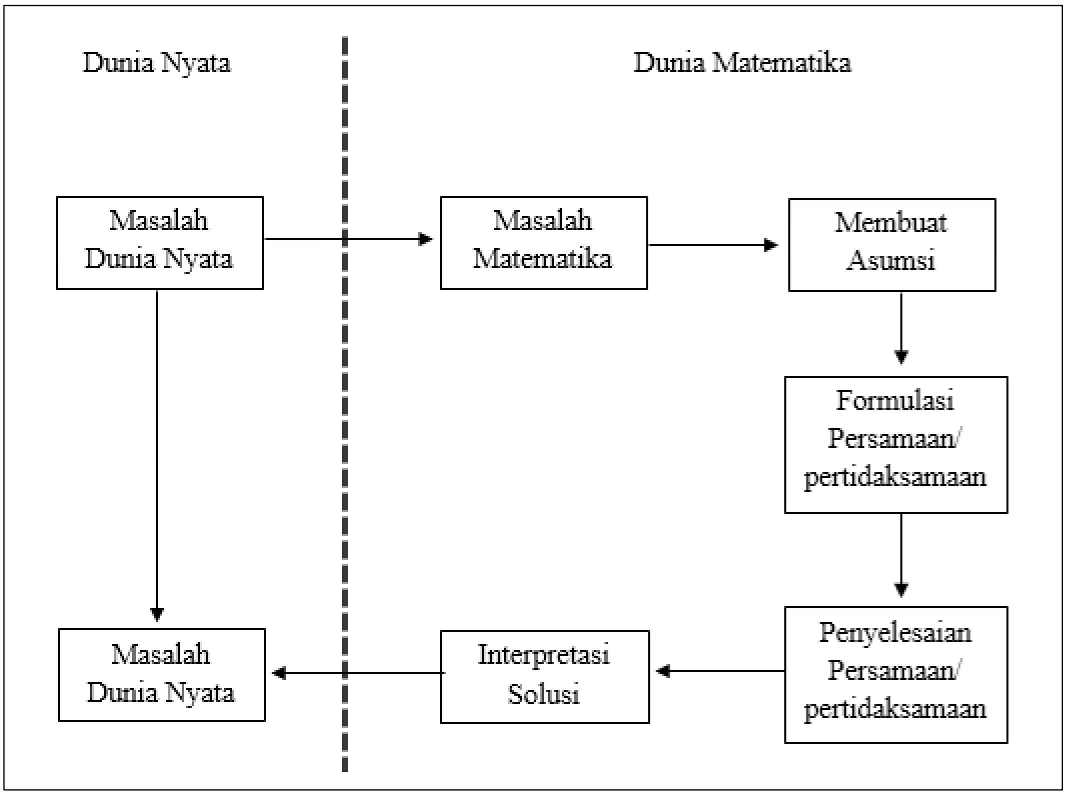
LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan dijelaskan landasan teori yang akan digunakan dalam bab selanjutnya sebagai bahan acuan yang mendukung dan memperkuat tujuan penelitian. Landasan teori yang dimaksud meliputi pemodelan matematika, nilai eigen dan vektor eigen, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinear, kestabilan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, dan kriteria *Routh-Hurwitz*.

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasi dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata yang dituangkan ke dalam pernyataan matematik (Widowati & Sutimin, 2007).

Tahap-tahap dalam menyusun model matematika dapat dinyatakan dalam alur diagram berikut (Widowati & Sutimin, 2007).



Gambar 1. Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan Gambar 1 dapat diperoleh langkah-langkah dalam pemodelan matematika sebagai berikut:

1. Menyatakan permasalahan nyata ke dalam pengertian matematika

   Permasalahan yang terjadi di dalam kehidupan nyata dinyatakan dalam bahasa matematis. Langkah ini meliputi menentukan faktor yang dianggap penting dan sesuai, identifikasi variabel-variabel dalam masalah, dan membentuk beberapa hubungan antar variabel-variabel yang dihasilkan dari permasalan tersebut.

2. Menentukan asumsi yang akan digunakan

   Membuat asumsi dalam model matematika mengarah pada tujuan bagaimana agar model dapat berjalan dan dapat diselesaikan.

3. Membentuk model matematika

   Dengan memahami asumsi dan hubungan antar variabel, kemudian memformulasi persamaan atau sistem persamaan. Dalam menformulasi model, terkadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi yang telah dibuat agar formulasi model sesuai dan dapat diselesaikan.

4. Menentukan solusi dari persamaan

   Dilakukan analisis apakah model mempunyai penyelesaian atau tidak. Proses dalam memodelkan sangat perlu diperhatikan secara menyeluruh karena ada kemungkinan model yang telah diformulasi tidak mempunyai solusi. Namun pada kondisi lain dapat dibangun bahwa persamaan dapat mempunyai lebih dari satu solusi.

5. Interpretasi hasil

   Interpretasi hasil merupakan kesimpulan yang diperoleh dari formulasi model yang kemudian diterjemahkan kembali ke dalam masalah dunia nyata. Interpretasi ini dapat diwujudkan dalam bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh dan selanjutnya diinterpretasi sebagai solusi dalam dunia nyata.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen dalam suatu matriks akan digunakan dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan linear.

Definisi 2.2.1 (Anton, 1987)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen (eigenvector) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x. \tag{2.1}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita dapat menuliskan kembali Persamaan (2.1) sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0. \tag{2.2}$$

dengan I adalah matriks identitas.

Persamaan (2.2) akan memiliki solusi nontrivial jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0. \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) merupakan persamaan karakteristik dari matriks A dan skalar yang memenuhi Persamaan (2.3) adalah nilai eigen dari A.

Pada matriks A dengan ukuran $n \times n$, maka polinomial karakteristik A mempunyai bentuk

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n.$$

Sehingga persamaan karakteristik A menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n = 0.$$

dengan $c_i \epsilon \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Contoh 1

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.

Penyelesaian:

a. Akan ditentukan nilai eigen dari matriks A

$$det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\begin{bmatrix} \lambda - 6 & -4 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 4$.

b. Akan ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen A

Untuk $\lambda_1 = 2$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 = 0 \\ \ \ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Persamaan $-4x_1 - 4x_2 = 0$ dan $2x_1 + 2x_2 = 0$, ekuivalen dengan $x_1 = -x_2$.

Misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = -t$, dengan $t \in \mathbb{R}$ maka vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 4$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 = 0 \\ \ \ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Persamaan $-2x_1 - 4x_2 = 0$ dan $2x_1 + 4x_2 = 0$, ekuivalen dengan $x_1 = -2x_2$.

Misalkan $x_2 = s$, maka $x_1 = -2s$, dengan $t \in \mathbb{R}$ maka vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 4$ adalah $\begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix}$.

2.3 Persamaan Diferensial

Definisi 2.3.1 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan/menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.3.2 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.3.3 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial parsial yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh 2

Contoh persamaan diferensial biasa

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^x + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Contoh persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0.$$

Persamaan diferensial dikatakan linear jika memenuhi kriteria berikut (Ross, 1984).

i. Variabel tak bebas dan turunan-turunannya berpangkat satu.
ii. Tidak terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan dirinya sendiri, variabel tak bebas dengan turunan-turunannya, dan antar turunan-turunannya.

iii. Variabel tak bebas bukan merupakan argumen dari fungsi logaritma, trigonometri, dan eksponensial.

Definisi 2.3.4 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Gabungan dari n persamaan diferensial disebut sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

Sistem persamaan diferensial linear dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \cdots + p_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\
\frac{dy_2}{dt} &= p_{21}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \cdots + p_{2n}(t)y_n + q_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \cdots + p_{nn}(t)y_n + q_n(t).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

dengan kondisi awal $y_i(t) = c_i, i = 1,2,3, \cdots, n$.

Jika $q_i, i = 1,2, \ldots, n$ bernilai nol, maka Persamaan (2.4) disebut sistem persamaan linear homogen sedangkan jika bernilai tak nol, maka Persamaan (2.4) disebut sistem persamaan diferensial linear nonhomogen.

Contoh 3

Contoh dari sistem persamaan diferensial linear.

$$\frac{dy_1}{dt} = 5y_1 + y_2 - 1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3y_1 - y_2.$$

Sistem persamaan diferensial nonlinear dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, y_2, \cdots, y_n).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dengan kondisi awal $y_i(t_0) = c_i, \quad i = 1,2,3, \cdots, n$ atau dapat ditulis dalam bentuk persamaan di bawah ini

$$\frac{dy}{dt} = f(t).$$

f adalah fungsi tidak linear dan kontinu.

Contoh 4

Contoh dari sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + y_1y_2 - 1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = {y_1}^2 - 6y_2$$

$$\frac{dy_3}{dx} = e^{y_1} + sin(y_3).$$

Persamaan di atas merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y_1, y_2, dan y_3. Persamaan tersebut dikatakan sistem persamaan diferensial nonlinear karena terdapat perkalian antara variabel tak bebas y_1 dan y_2 pada persamaan pertama, terdapat kuadrat dari variabel tak bebas y_1 pada persamaan kedua, dan terdapat fungsi eksponensial dan trigonometri pada persamaan ketiga.

2.5 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Adapun pengertian titik ekuilibrium disajikan dalam Definisi 2.5.1. Berikut diberikan sistem persamaan diferensial autonomus yaitu sistem persamaan diferensial dimana secara eksplisit tidak memuat variabel t, sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.6}$$

Dengan $x = \left(x_1, x_{2,}, \cdots, x_n\right)^T \in E \subseteq \mathbb{R}^n, f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$, f fungsi nonlinear dan kontinu.

Definisi 2.5.1 (Wiggins, 2003)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik ekuilibrium dari Sistem* (2.6) *jika memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$.

Contoh mengenai Definisi 2.5.1

Contoh 5

Diberikan sistem persamaan diferensial yaitu

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + {x_2}^2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Tentukan titik ekuilibrium dari Sistem (2.7).

<u>Penyelesaian</u>

Misal $E = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ merupakan titik ekuilibrium Sistem (2.7).

Titik ekuilibrium dari sistem di atas dapat diperoleh jika $f(\bar{x}) = 0$, sehingga Sistem (2.7) di atas menjadi

$$x_1 + {x_2}^2 = 0. \tag{2.8}$$

dan

$$4x_1 + x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1(4 + x_2) = 0. \tag{2.9}$$

Berdasarkan Persamaan (2.9) diperoleh $\bar{x}_1 = 0$ dan $\bar{x}_2 = -4$.

Selanjutnya substitusikan $\bar{x}_1 = 0$ pada Persamaan (2.8) sehingga diperoleh

$\bar{x}_2 = 0$ dan didapatkan $E_1 = (0,0)^T$.

Substitusi $\bar{x}_2 = -4$ pada Persamaan (2.8) sehingga diperoleh $\bar{x}_1 = -16$ dan didapatkan $E_2 = (-16, -4)^T$.

Sehingga dari Sistem (2.7) diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu $(0,0)^T$ dan $(-16, -4)^T$.

2.6 Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Linearisasi merupakan proses mengubah suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut dan dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik.

Andaikan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium Sistem (2.6), maka pendekatan linear untuk Sistem (2.6) diperoleh dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T$ yaitu

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2}$$

$$\vdots \qquad (2.10)$$

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}.$$

Pendekatan linear untuk Sistem (2.10) adalah

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2}$$

$$\vdots \tag{2.11}$$

$$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}.$$

dengan $R_{f_1}, R_{f_2}, \cdots, R_{f_n}$ merupakan bagian nonlinear yang selanjutnya dapat diabaikan karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \cdots, R_{f_n}$ mendekati nol. Sehingga Sistem (2.11) dapat dituliskan sebagai matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \cdots, y_n = x_n - \bar{x}_n$, maka dari Sistem (2.12) diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Sistem (2.13) merupakan linearisasi Sistem (2.6), sehingga diperoleh matriks *Jacobian* pada titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T$ dari Sistem (2.6) yaitu:

$$J(f(\bar{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}.$$

Jika matriks $J\big(f(\bar{x})\big)$ tidak mempunyai nilai eigen yang bernilai nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan sistem dapat dilihat dari

$$\dot{y} = J\big(f(\bar{x})\big)y. \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) adalah sebagai hasil linearisasi Sistem (2.6). Setelah dilakukan linearisasi pada Persamaan (2.14), analisa kestabilan sistem nonlinear di sekitar titik ekuilibrium dapat diselidiki melalui analisa linearisasi di sekitar titik yang sama, jika titik ekuilibrium dari sistem nonlinear tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik ekuilibrium hiperbolik.

Definisi 2.6.1 (Perko, 2000)

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (2.6) *jika tidak ada bagian real nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ bernilai nol.*

Contoh 6

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear (2.7) dimana mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $(0,0)^T$ dan $(-16,-4)^T$. Akan dicari matriks $J\big(f(\bar{x})\big)$ dengan $\bar{x}_1 = (0,0)^T, \bar{x}_2 = (-16,-4)^T$ dan akan diidentifikasi apakah masing-masing titik ekuilibrium tersebut hiperbolik atau nonhiperbolik.

<u>Penyelesaian</u>

Matriks *Jacobian* dari sistem (2.14) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})^T = \begin{bmatrix} 4 + x_2 & x_1 \\ 1 & 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Matriks *Jacobian* untuk $\bar{x}_1 = (0,0)^T$

$$J(f(0,0)^T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan dicari nilai eigen untuk $J(f(0,0)^T)$ sebagai berikut

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(4-\lambda) = 0.$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu $\lambda = 0$ dan $\lambda = 4$. Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,0)^T$adalah titik ekuilibrium nonhiperbolik karena terdapat nilai eigen nol dibagian realnya.

Matriks *Jacobian* untuk $\bar{x}_2 = (-16,-4)^T$ adalah

$$J(f(-16,-4)^T) = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

akan dicari nilai eigen untuk $J(f(-2,-1)^T)$ adalah

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -16 \\ -4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -16 \\ -4 & -(8+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(8+\lambda) - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda - 64 = 0.$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu $\lambda = -4 + 4\sqrt{5}$ dan $\lambda = -4 - 4\sqrt{5}$. Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = (-2,-1)^T$ adalah titik ekuilibrium hiperbolik karena tidak terdapat nilai eigen yang bernilai nol di bagian realnya.

2.7 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.7.1 (Olsder & Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$, *solusi dengan kondisi awal* $x(0) = x_0$, *yang dinotasikan oleh* $x(t, x_0)$.

i. *Vektor* $\bar{x}$ *yang memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$ *dikatakan sebagai titik ekuilibrium.*

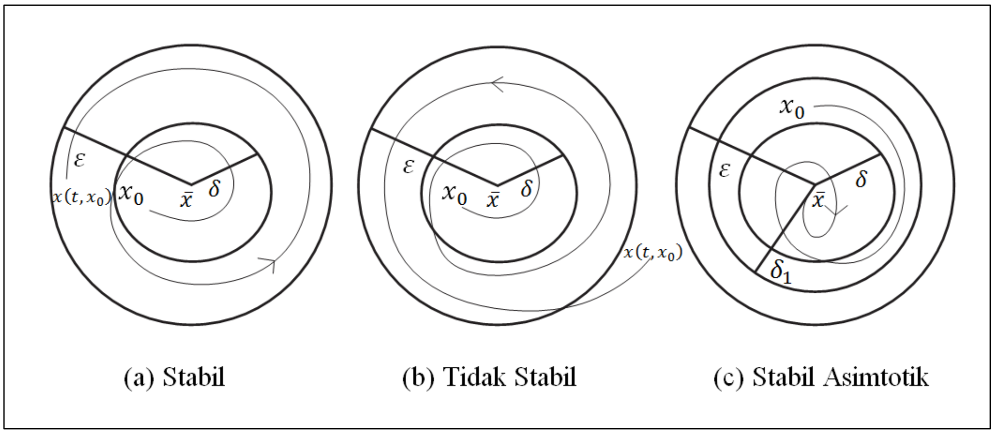
ii. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan stabil jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, *maka* $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ *untuk semua* $t \geq 0$.

iii. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat* $\delta_1 > 0$ *sedemikian sehingga* $\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, *asalkan* $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.

iv. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan tidak stabil jka titik-titik ekuilibriumnya tidak memenuhi (ii).*

Pada definisi di atas, $\|.\|$ menyatakan norm atau panjang pada $\mathbb{R}^n$.

Berikut merupakan ilustrasi titik ekuilibrium stabil, stabil asimtotik, dan tidak stabil yang akan ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Ilustrasi Kestabilan

Berdasarkan Gambar 2, titik ekuilibrium dikatakan stabil jika solusi dari sistem persamaan pada saat t selalu berada pada jarak yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium, titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik jika solusi dari sistem persamaan pada saat t akan menuju ke titik ekuilibrium, dan titik ekuilibrium dikatakan tidak stabil jika solusi dari sistem persamaan pada saat t bergerak menjauhi titik ekuilibrium.

Selanjutnya, diberikan teorema mengenai sifat kestabilan sebagai berikut:

Teorema 2.7.2 (Olsder & Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, *dengan* A *suatu matriks* $n \times n$ *yang mempunyai* k *nilai eigen berbeda* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *dengan* $k \leq n$.

1. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika* $\Re e\ \lambda_i < 0$ *untuk setiap* $i = 1, 2, \cdots, k$.
2. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *dikatakan stabil jika dan hanya jika* $\Re e\ \lambda_i \leq 0$ *untuk setiap* $i = 1, 2, \cdots, k$ *dan jika setiap nilai eigen* λ_i *imajiner dengan*

$\Re e\ \lambda_i = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

3. *Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu $\Re e\ \lambda_i > 0$ untuk $i = 1, 2, \cdots, k$.*

Bukti:

1. <u>Bukti ke kanan</u>

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik, maka $\Re e\ \lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$.

Berdasarkan Definisi (2.7.1) titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Hal ini berarti bahwa untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Sehingga, agar $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$, maka λ haruslah bernilai negatif.

<u>Bukti ke kiri</u>

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re e\ \lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

Solusi dari sistem persamaan diferensial adalah $x(t, x_0)$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e\ \lambda_i < 0$, maka untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Sehingga, berdasarkan Definisi (2.7.1), titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e\, \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$.

Andaikan $\Re e\, \lambda_i > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$) untuk $t \to \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e\, \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e\, \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re e\, \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan jika ada $\Re e\, \lambda_i = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

Solusi dari sistem persamaan diferensial adalah $x(t, x_0)$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e\, \lambda_i < 0$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik (pasti stabil). Jika $\Re e\, \lambda_i = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen. Sehingga akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Tanpa mengurangi pembuktian secara umum, diambil sembarang sistem pada $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad p > 0, q > 0. \tag{2.15}$$

Nilai eigen dari Sistem (2.15) akan ditentukan dengan mensubstitusi matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix}$ ke dalam $det(\lambda I - A) = 0$ sehingga didapatkan

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & p \\ -q & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 + pq = 0. \tag{2.16}$$

Akar dari Persamaan (2.16) adalah $\lambda_1 = -i\sqrt{pq}$ dan $\lambda_2 = i\sqrt{pq}$.

Berdasarkan definisi, $x = (x_1, x_2)^{T}$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan nontrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, yakni

$$\begin{bmatrix} \lambda & p \\ -q & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Untuk $\lambda_1 = -i\sqrt{pq}$ maka Persamaan (2.17) menjadi

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & p \\ -q & -i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Matriks *augmented* dari Sistem (2.18) yaitu

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & p & 0 \\ -q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{bmatrix} \text{baris pertama dikali dengan } \frac{i\sqrt{pq}}{pq}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ -q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{bmatrix} \text{baris kedua dikali dengan } -\frac{1}{q}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \end{bmatrix} \text{baris kedua dikurang dengan baris pertama}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Berdasarkan matriks eselon baris tereduksi pada Sistem (2.19) diperoleh solusi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q}\ t \\ t \end{bmatrix}.$$

atau dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -i\sqrt{pq}$ adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = i\sqrt{pq}$ maka Persamaan (2.17) menjadi

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{pq} & p \\ -q & i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Matriks *augmented* dari Sistem (2.20) yaitu

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{pq} & p & 0 \\ -q & i\sqrt{pq} & 0 \end{bmatrix} \text{baris pertama dikali dengan } \frac{-i\sqrt{pq}}{pq}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ -q & i\sqrt{pq} & 0 \end{bmatrix} \text{baris kedua dikali dengan } -\frac{1}{q}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 1 & \frac{-i\sqrt{pq}}{q} & 0 \end{bmatrix} \text{baris kedua dikurang dengan baris pertama}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Berdasarkan matriks eselon baris tereduksi pada Sistem (2.21) diperoleh solusi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q}\ t \\ t \end{bmatrix}.$$

atau dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = i\sqrt{pq}$ adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Terbukti bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

3. <u>Bukti ke kanan</u>

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil, maka $\Re e\ \lambda_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$.

Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika $t \to \infty$, maka $x(t, x_0)$ akan menuju ∞. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Untuk $x(t, x_0)$ menuju ∞ dipenuhi jika $\Re e\ \lambda_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$.

<u>Bukti ke kiri</u>

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re e\ \lambda_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Diketahui bahwa jika $\Re e\ \lambda_i > 0$ maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞. Hal ini berarti solusi akan menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$. Sehingga titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil.

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks *Jacobian* mempunyai bagian real negatif. Sementara itu, titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal $x(t_0)$ yang diberikan, solusi Sistem (2.6) $x(t)$ berada dekat dengan titik ekuilibrium $\bar{x}$ dan untuk t membesar menuju tak hingga, $x(t)$ konvergen ke titik ekuilibrium $\bar{x}$.

Contoh 7

Diberikan Sistem (2.7). Akan diselidiki tipe kestabilan dari Sistem (2.7) di sekitar titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,0)^T$ dan $\bar{x}_2 = (-2,-1)^T$.

Berdasarkan analisa pada Contoh 6 diperoleh bahwa titik ekuilibrium $(0,0)^T$ merupakan titik ekuilibrium nonhiperbolik. Sehingga perilaku kestabilan sistem linear di sekitar titik ekuilibrium $(0,0)^T$ tidak dapat ditentukan. Untuk titik ekuilibrium $(-2,-1)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik, sehingga perilaku kestabilan sistem linear di sekitar titik ekuilibrium sama dengan perilaku sistem nonlinearnya yaitu tidak stabil karena terdapat bagian real dari nilai eigen matriks *Jacobian* $J(f(-2,-1)^T)$ bernilai positif.

2.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah suatu parameter tertentu yang digunakan untuk melihat seberapa besar potensi penyebaran penyakit atau infeksi dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar (R_0) didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus sekunder yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan populasi rentan (Diekmann & Heesterbeek, 2000).

Bilangan reproduksi dari suatu model, jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan penyakit tidak menyerang populasi, namun jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan penyakit sangat mungkin untuk menyebar (Driessche & Watmough, 2001). Untuk $R_0 > 1$, maka penyakit endemik dan individu yang terinfeksi penyakit akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan sehingga penyakit akan menyebar ke populasi.

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^n$, dan $y \in \mathbb{R}^n$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y), j = 1,2, \cdots, m. \tag{2.22}$$

dengan φ_i adalah matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi dan ψ_i adalah matriks laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Hasil linearisasi dari kelas terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{x} = (F - V)x. \tag{2.23}$$

dengan F dan V matriks berukuran $n \times n$, dan

$$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$$

$$V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0).$$

dengan $(0, y_0)$ merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai

$$K = FV^{-1}. \tag{2.24}$$

dengan K disebut sebagai *next generation matrix*. Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model kompartemen adalah

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}).$$

yaitu nilai eigen terbesar dari matriks K (Driessche & Watmough, 2001).

Contoh 8

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \tag{2.25}$$

dengan

$S(t)$: populasi individu rentan pada saat t

$I(t)$: populasi individu terinfeksi pada saat t

$R(t)$: populasi individu sembuh dari infeksi pada saat t

Tentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari Sistem (2.25).

<u>Penyelesaian</u>

Sistem (2.25) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (1, 0, 0)$. Penentuan bilangan reproduksi (R_0) menggunakan metode *next generation matrix* dapat diperoleh dari kelas I, sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\varphi = [\beta SI] \text{ dan } \psi = [\gamma I + \mu I].$$

Hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (S, I, R) = (1, 0, 0)$ pada φ dan ψ adalah

$$F = [\beta] \text{ dan } V = [\gamma + \mu].$$

Selanjutnya akan dicari V^{-1} dan didapatkan

$$V^{-1} = \frac{1}{\gamma + \mu}.$$

Sehingga diperoleh *next generation matrix* berikut

$$K = FV^{-1}$$

$$\Leftrightarrow K = [\beta]\left[\frac{1}{\gamma + \mu}\right]$$

$$\Leftrightarrow K = \left[\frac{\beta}{\gamma + \mu}\right]. \qquad (2.26)$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks K. Jadi, nilai R_0 dari Sistem (2.25) adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}.$$

2.9 Kriteria *Routh-Hurwitz*

Nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar dari persamaan karakteristik $det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$ (Olders & Woude, 2004). Namun seringkali muncul permasalahan dalam menetukan akar-akar persamaan karakteristik. Sehingga diperlukan suatu aturan atau kriteria yang menjamin nilai dari akar-akar suatu persamaan karakteristik bernilai negatif atau ada yang bernilai positif. Tanda negatif ataupun positif dapat digunakan untuk menetukan sifat kestabilan dari suatu titik ekuilibrium. Salah satu kriteria yang efektif untuk menguji kestabilan sistem adalah kriteria *Routh-Hurwitz*.

Diberikan persamaan karakteristik nilai eigen λ dari matriks A yang berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0. \tag{2.27}$$

dengan $a_i, i = 0,1,2,\cdots,n$ dan $a_0 \neq 0$ merupakan koefisien dari persamaan karakteristik. Akar-akar dari Persamaan (2.27) dapat diketahui dengan menyusun tabel *Routh-Hurwitz* sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel *Routh-Hurwitz*

a_0	a_2	a_4	$\cdots$
a_1	a_3	a_5	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	$\cdots$
c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

dimana :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \qquad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \qquad d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \qquad \cdots$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \qquad \cdots$$

Perhitungan berhenti sampai kolom pertama menghasilkan nilai nol. Dalam kriteria *Routh-Hurwitz* semua akar-akar dari Persamaan (2.27) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua elemen pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* memiliki tanda yang sama (semua bernilai positif atau semua bernilai negatif (Olsder & Woude, 2004).

Contoh 9

Diberikan persamaan karakteristik

$$P(x) = x^3 + 10x^2 + 4x - 10. \tag{2.28}$$

Selidiki apakah Persamaan (2.26) termasuk kriteria *Routh-Hurwitz.*

<u>Penyelesaian</u>

Berdasarkan Persamaan (2.28) didapatkan nilai $a_0 = 1, a_1 = 10, a_2 = 4,$ dan $a_3 = -10.$ Akan dibuktikan bahwa semua elemen pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* memiliki tanda yang sama.

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = 10 > 0$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{10(4) - 1(-10)}{10} = \frac{40 + 10}{10} = 5 > 0$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = \frac{10(0) - 1(0)}{10} = 0$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = \frac{10(0) - 1(0)}{10} = 0$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{5(-10) - 10(0)}{5} = -10 < 0$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} = \frac{5(0) - 10(0)}{5} = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} = \frac{-10(0) - 5(0)}{-10} = 0$$

Karena $c_1 < 0$ maka persamaan karakteristik dari Persamaan (2.28) tidak memenuhi kriteria *Routh-Hurwitz*.

Contoh 10

Diberikan persamaan karakteristik

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 6. \tag{2.29}$$

Selidiki apakah Persamaan (2.29) termasuk kriteria *Routh-Hurwitz*

Penyelesaian

Berdasarkan Persamaan (2.29) didapatkan nilai $a_0 = 1,\ a_1 = 6,\ a_2 = 3,$ dan $a_3 = 6.$ Akan dibuktikan bahwa semua elemen pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* memiliki tanda yang sama.

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = 6 > 0$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} = \frac{6(3) - 1(6)}{6} = \frac{18 - 6}{6} = 2 > 0$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} = \frac{6(0) - 1(0)}{6} = 0$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} = \frac{6(0) - 1(0)}{6} = 0$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} = \frac{2(6) - 6(0)}{2} = 6 > 0.$$

$$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1} = \frac{2(0) - 6(0)}{2} = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1} = \frac{6(0) - 2(0)}{6} = 0$$

Karena $a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ b_1 > 0,$ dan $c_1 > 0,$ maka persamaan karakteristik dari Persamaan (2.29) memenuhi kriteria *Routh-Hurwitz*.